Основне леме предикатског рачуна

У овом тексту ће $\bar{x}$ бити ознака за $x_1, \ldots, x_m$, $\bar{y}$ за $y_1, \ldots, y_n$, $\bar{c}$ ознака за $c_1, \ldots, c_m$, $\bar{f}$ за $f_1, \ldots, f_n$, а $\bar{f}(\bar{x})$ за $f_1(\bar{x}), \ldots, f_n(\bar{x})$. Такође ће T бити теорија првог реда језика $\mathcal{L}$.

Лема 1 (*о универзалној константи*) Нека је $\varphi(\bar{x})$ било која формула језика $\mathcal{L}$ и нека је $\mathcal{L}^*$ језик који се од језика $\mathcal{L}$ разликује само по томе што садржи још међусобно различите константске симболе $\bar{c}$ који нису у језику $\mathcal{L}$. Тада

$$T \vdash \forall \bar{x} \varphi(\bar{x}) \quad \text{акко} \quad T \vdash \varphi(\bar{c}).$$

Доказ: Јасно је да из $T \vdash \forall \bar{x} \varphi(\bar{x})$ следи $T \vdash \varphi(\bar{c})$. Претпоставимо зато да $T \vdash \varphi(\bar{c})$. Уочимо произвољан доказ за $\varphi(\bar{c})$ у теорији T и изаберимо међусобно различите променљиве $z_1, \ldots, z_n$ које се не појављују нигде у доказу. У уоченом доказу заменимо свако јављање c_i са z_i. На тај начин добићемо доказ за $\varphi(\bar{z})$ у теорији T. Ова чињеница се доказује индукцијом по дужини доказа (у овом случају по редном броју формуле у уоченом доказу). Продужимо тај доказ тако што ћемо применити генерализацију на променљиве $\bar{z}$ у формули $\varphi(\bar{z})$. Тиме смо доказали реченицу $\forall \bar{z} \varphi(\bar{z})$ у теорији T која је логички еквивалентна са $\forall \bar{x} \varphi(\bar{x})$ будући да је замена регуларна јер је формула $\varphi(\bar{c})$ добијена заменом само слободних јављања променљивих $\bar{x}$. QED

Лема 2 (*Правило C*) Нека је $\mathcal{L}^*$ језик који се од језика $\mathcal{L}$ разликује само по томе што садржи још међусобно различите константске симболе $\bar{c}$ који нису у језику $\mathcal{L}$ и нека је $\varphi(\bar{x})$ формула језика $\mathcal{L}$ за коју $T \vdash \exists \bar{x} \varphi(\bar{x})$. Тада за теорију $T^* = T \cup \{\varphi(\bar{c})\}$ и произвољну реченицу ψ језика $\mathcal{L}^*$ важи

$$T \vdash \psi \quad \text{акко} \quad T^* \vdash \psi.$$

Доказ: Јасно је да из $T \vdash \psi$ следи $T^* \vdash \psi$. Претпоставимо зато да $T^* \vdash \psi$. Тада добијамо да важи

$$\begin{aligned} &T \cup \{\varphi(\bar{c})\} \vdash \psi, \\ &T \vdash \varphi(\bar{c}) \to \psi, \\ &T \vdash \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \to \psi), \\ &T \vdash \exists \bar{x} \varphi(\bar{x}) \to \psi. \end{aligned}$$

Међутим, будући да по претпоставци $T \vdash \exists \bar{x} \varphi(\bar{x})$, добијамо да $T \vdash \psi$. QED

Теореме о дефиниционим екстензијама

Теорема 1 Нека је $\mathcal{L}^*$ језик који се од језика $\mathcal{L}$ разликује само по томе што садржи још и међусобно различите константске симболе $\bar{c}$ који нису у језику $\mathcal{L}$ и нека је $\varphi(\bar{x})$ формула језика $\mathcal{L}$ таква да $T \vdash \exists \bar{x} \varphi(\bar{x})$ и $T^* = T \cup \{\varphi(\bar{c})\}$ теорија језика $\mathcal{L}^*$. Тада важи:

а) За сваку реченицу ψ језика $\mathcal{L}$ важи

$$T \vdash \psi \quad \text{акко} \quad T^* \vdash \psi.$$

б) Ако још $T \vdash \exists_1 \bar{x} \varphi(\bar{x})$, онда за сваку формулу ψ језика $\mathcal{L}^*$ постоји формула θ језика $\mathcal{L}$ за коју $T^* \vdash \forall(\psi \leftrightarrow \theta)$.

Доказ:

а) Ово је заправо правило C.

б) Нека су $\bar{y}$ међусобно различите променљиве које немају слободних јављања у формули ψ и такве да је замена свих слободних јављања променљиве x_i променљивом y_i у формули $\varphi(\bar{x})$ регуларна. За формулу θ можемо узети формулу $\forall \bar{y}(\varphi(\bar{y}) \to \psi)$. По претпоставци важи

$$T^* \vdash \forall \bar{y}(\varphi(\bar{y}) \leftrightarrow y_1 = c_1 \wedge \cdots \wedge y_n = c_n).$$

Отуда и из дефиниције формуле θ следи

$$T^* \vdash \forall(\theta \leftrightarrow \forall \bar{y}(y_1 = c_1 \wedge \cdots \wedge y_n = c_n \to \psi)).$$

Будући да се променљиве $\bar{y}$ не јављају слободно у ψ, имамо да

$$T^* \vdash \forall(\theta \leftrightarrow (\exists \bar{y}(y_1 = c_1 \wedge \cdots \wedge y_n = c_n) \to \psi)),$$

одакле $T^* \vdash \forall(\theta \leftrightarrow \psi)$, што је и требало доказати. QED

Теорема 2 Нека је $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ формула језика $\mathcal{L}$ и нека је $\mathcal{L}^*$ језик који се разликује од језика $\mathcal{L}$ само по томе што садржи још функцијске симболе $\bar{f}$ арности m који су међусобно различити и који не припадају језику $\mathcal{L}$. Претпоставимо да $T \vdash \forall \bar{x} \exists \bar{y} \varphi(\bar{x}, \bar{y})$. Тада под претпоставком да је замена у формули $\varphi(\bar{x}, \bar{f}(\bar{x}))$ регуларна, за теорију $T^* = T \cup \{\forall \bar{x} \varphi(\bar{x}, \bar{f}(\bar{x}))\}$ важи:

а)

$$T \vdash \psi \quad \text{акко} \quad T^* \vdash \psi$$

за ма коју реченицу ψ језика $\mathcal{L}$.

б) Ако још $T \vdash \forall \bar{x} \exists_1 \bar{y} \varphi(\bar{x}, \bar{y})$, онда за сваку формулу ψ језика $\mathcal{L}^*$ постоји формула θ језика $\mathcal{L}$ тако да

$$T^* \vdash \forall(\psi \leftrightarrow \theta).$$

Доказ:

а) Поново ћемо доказати само нетривијалан смер. Нека $T \nvdash \psi$. Тада постоји модел $\mathbf{M} = (M, I)$ језика $\mathcal{L}$ у коме важе све аксиоме теорије T као и реченица $\neg\psi$. Међутим, будући да $T \vdash \forall \bar{x} \exists \bar{y} \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ и да је $\mathbf{M}$ модел теорије T, постојаће модел $\mathbf{M}' = (M, I')$ језика $\mathcal{L}^*$ чија интерпретација I' продужује интерпретацију I модела $\mathbf{M}$ и тако да $\mathbf{M}' \models \forall \bar{x} \varphi(\bar{x}, \bar{f}(\bar{x}))$. Будући да модели $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$ имају исти скуп носач и исте интерпретације свих симбола језика $\mathcal{L}$, они ће задовољавати исте реченице језика $\mathcal{L}$, одакле је заједно са $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$ модел теорије $T \cup \{\neg\psi\}$. Али, пошто такође $\mathbf{M}' \models \forall \bar{x} \varphi(\bar{x}, \bar{f}(\bar{x}))$, $\mathbf{M}'$ ће заправо бити модел теорије $T^* \cup \{\neg\psi\}$, па $T^* \nvdash \psi$.

б) Доказ ћемо извести индукцијом по броју знакова у формули ψ. Нека је дакле ψ произвољна формула језика $\mathcal{L}$.

1. Формула ψ је облика $\neg\psi'$ за неку формулу ψ'. Нека је θ' формула језика $\mathcal{L}$ за коју $T^* \vdash \forall(\psi' \leftrightarrow \theta')$. Тада за формулу θ једнаку $\neg\theta'$ важи $T^* \vdash \forall(\psi \leftrightarrow \theta)$.
2. Формула ψ је облика $\psi' \wedge \psi''$. Нека су θ' и θ'' формуле језика $\mathcal{L}$ за које $T^* \vdash \forall(\psi' \leftrightarrow \theta')$ и $T^* \vdash \forall(\psi'' \leftrightarrow \theta'')$. Тада за формулу θ једнаку $\theta' \wedge \theta''$ важи $T^* \vdash \forall(\psi \leftrightarrow \theta)$.
3. Формула ψ је облика $\exists x \psi'$. Нека је θ' формула језика $\mathcal{L}$ за коју $T^* \vdash \forall(\psi' \leftrightarrow \theta')$. Тада за формулу θ једнаку $\exists x \theta'$ важи $T^* \vdash \forall(\psi \leftrightarrow \theta)$.
4. Формула ψ је облика $R(t_1, \ldots, t_k)$, где је R релацијски симбол или једнакост, а t_i произвољни терми при чему се искључује могућност да је R једнакост и да је притом бар један од термова t_i променљива. Тада је формула ψ еквивалентна формули

$$\exists y_1 \cdots \exists y_k (t_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge t_k = y_k \wedge R(\bar{y})).$$

   где су $\bar{y}$ међусобно различите променљиве које се не јављају у термима $\bar{t}$. Нека је θ_i формула језика $\mathcal{L}$ за коју $T^* \vdash \forall(\theta_i \leftrightarrow t_i = y_i)$. Тада за формулу θ једнаку

$$\exists \bar{y}(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k \wedge R(\bar{y}))$$

   важи $T^* \vdash \forall(\psi \leftrightarrow \theta)$. Притом је формула θ на језику $\mathcal{L}$ јер R као релацијски симбол језика $\mathcal{L}^*$ припада језику $\mathcal{L}$. Овде смо атомску формулу $t = y$, где је t терм а y променљива третирали као простију формулу од формуле $t = c$, као и од формуле $c = t$, где је c константски симбол, иако имају исти број знакова.

5. Формула ψ је облика $t = z$ или облика $z = t$, где је t неки терм а z променљива. Ако је t променљива или константа, онда је формула ψ већ на језику $\mathcal{L}$, па можемо за формулу θ узети баш ψ. Нека је зато терм t једнак $f(t_1, \dots, t_k)$ за неке терме t_i и неки функцијски знак f. Но, тада је за међусобно различите променљиве $x_1, \dots, x_k$ које се не појављују у термима t_i и које се разликују од z

$$\vdash \forall(\psi \leftrightarrow \exists\bar{x}(t_1 = x_1 \wedge \dots \wedge t_k = x_k \wedge f(\bar{x}) = z).$$

   Нека је θ_i формула језика $\mathcal{L}$ таква да $T^* \vdash \forall(\theta_i \leftrightarrow t_i = x_i)$. Ако би постојала и формула θ' језика $\mathcal{L}$ за коју $T^* \vdash \forall(f(\bar{x}) = z \leftrightarrow \theta')$, онда би за формулу θ једнаку

$$\exists\bar{y}(\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_k \wedge \theta')$$

   важило $T^* \vdash \forall(\psi \leftrightarrow \theta)$, при чему би формула θ била на језику $\mathcal{L}$. Дакле, остаје да докажемо да тражена формула θ' постоји.
   Ако је f функцијски знак из језика $\mathcal{L}$, онда можемо ставити да је θ' управо формула $f(\bar{x}) = z$. У противном је $f = f_i$ за неко i, и тада због $T \vdash \forall\bar{x}\exists_1\bar{y}\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ и $T^* = T \cup \{\forall\bar{x}\varphi(\bar{x}, \bar{f}(\bar{x}))\}$ важи

$$T^* \vdash \forall\bar{x}\forall z(f_i(\bar{x}) = z \leftrightarrow \exists\bar{u}(\varphi(\bar{x}, \bar{u}) \wedge u_i = z)),$$

   где су $u_1, \dots, u_n$ међусобно различите променљиве од којих ни једна није једнака са z, и такве да горња замена буде регуларна. Но, одатле непосредно следи да за формулу θ' можемо узети управо формулу $\exists\bar{u}(\varphi(\bar{x}, \bar{u}) \wedge u_i = z)$.

QED

Теорема 3 Нека је $\varphi(\bar{x})$ формула језика $\mathcal{L}$ и нека је $\mathcal{L}^*$ језик који се разликује од језика $\mathcal{L}$ само по томе што садржи још релацијски симбол R арности n који не припада језику $\mathcal{L}$. Тада за теорију $T^* = T \cup \{\forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow R(\bar{x}))\}$ важи:

а)

$$T \vdash \psi \quad \text{акко} \quad T^* \vdash \psi$$

за ма коју реченицу ψ језика $\mathcal{L}$.

б) За сваку формулу ψ језика $\mathcal{L}^*$ постоји формула θ језика $\mathcal{L}$ тако да

$$T^* \vdash \forall(\psi \leftrightarrow \theta).$$

Доказ:

а) Доказаћемо само нетривијалан смер. Нека $T^* \vdash \psi$ и нека је $\chi(\bar{x})$ формула која се добија преозначавањем свих међусобно различитих везаних променљивих у формули $\varphi(\bar{x})$ међусобно различитим променљивама које немају јављања у уоченом доказу за ψ. Тада се заменом сваког појављивања формуле $R(t_1, \dots, t_n)$ као потформуле неке формуле у доказу за ψ формулом $\chi(\bar{t})$ добија доказ за ψ у теорији $T \cup \{\forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \chi(\bar{x})\}$. Доказ се изводи индукцијом по редном броју формуле у доказу. Међутим, будући да је формула $\forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \chi(\bar{x}))$ ваљана, добијамо да $T \vdash \psi$.

б) Нека је ψ произвољна формула језика $\mathcal{L}^*$. Уочимо формулу $\chi(\bar{x})$ која се добија заменом свих међусобно различитих везаних променљивих у формули $\varphi(\bar{x})$ међусобно различитим променљивама које се не јављају у формули ψ. Тада заменом свих јављања потформула облика $R(t_1, \dots, t_n)$ формуле ψ одговарајућим формулама облика $\chi(\bar{t})$ добијамо формулу θ језика $\mathcal{L}$ за коју важи

$$T \cup \{\forall\bar{x}(\chi(\bar{x}) \leftrightarrow R(\bar{x}))\} \vdash \forall(\psi \leftrightarrow \theta).$$

Доказ се изводи индукцијом по сложености потформуле формуле ψ. Но, будући да је $\forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \chi(\bar{x}))$ ваљана формула, реченица $\forall\bar{x}(\chi(\bar{x}) \leftrightarrow R(\bar{x}))$ је теорема теорије T^*, па $T^* \vdash \forall(\psi \leftrightarrow \theta)$.

QED

Илустрације

Да бисмо доказали формулу $\forall\bar{x}\varphi(\bar{x})$ довољно је да уведемо потпуно нове међуобно различите константске симболе $\bar{c}$ и да докажемо формулу $\varphi(\bar{c})$. То се обично изражава речима: ”Нека су $\bar{c}$ потпуно произвољни елементи. Докажимо да важи $\varphi(\bar{c})$.”

У посебном случају, када доказујемо у теорији T формулу облика $\forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))$, обично уводимо потпуно нове, међусобно различите константске симболе $\bar{c}$ и додатну аксиому $\varphi(\bar{c})$, да бисмо доказали формулу $\psi(\bar{c})$. Тада ћемо по правилу дедукције моћи да изведемо закључак да је у теорији T доказиво $\varphi(\bar{c}) \to \psi(\bar{c})$, одакле на основу претходног разматрања следи да $T \vdash \forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))$. То се обично изражава речима: ”Нека су $\bar{c}$ произвољни елементи за које важи $\varphi(\bar{c})$. Докажимо да онда важи $\psi(\bar{c})$.”

Када знамо да је формула облика $\exists\bar{x}\varphi(\bar{x})$ теорема теорије T, онда у циљу доказа било које теореме теорије T можемо увести потпуно нове константске симболе $\bar{c}$ и додатну аксиому $\varphi(\bar{c})$. То се обично изражава речима: ”Будући да знамо да постоје $\bar{x}$ такви да важи $\varphi(\bar{x})$, можемо их означити на пример са $\bar{c}$ тим редом.”

Слично, када доказујемо $\exists\bar{x}\varphi(\bar{x}) \to \psi$ у теорији T, можемо најпре применити правило дедукције да бисмо свели проблем на доказивање формуле ψ у теорији $T \cup \{\exists\bar{x}\varphi(\bar{x})\}$ у којој је $\exists\bar{x}\varphi(\bar{x})$ теорема (штавише аксиома). Тада према претходном имамо право да уведемо још једну аксиому $\varphi(\bar{c})$ у циљу доказивања формуле ψ. То ће уједно бити доказ да $T \cup \{\exists\bar{x}\varphi(\bar{x})\} \vdash \psi$, односно да $T \vdash \exists\bar{x}\varphi(\bar{x}) \to \psi$. Ово се обично изражава речима: ”Претпоставимо да су $\bar{c}$ такви да важи $\varphi(\bar{c})$ и докажимо ψ.”

Ови поступци би се схематски могли приказати на следећи начин.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi(\bar{c})\end{array}}{\forall\bar{x}\varphi(\bar{x})} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\varphi(\bar{c})\\ \vdots\\ \psi(\bar{c})\end{array}}{\forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))} \qquad \dfrac{\exists\bar{x}\varphi(\bar{x}) \qquad \begin{array}{c}\varphi(\bar{c})\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\psi} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\varphi(\bar{c})\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\exists\bar{x}\varphi(\bar{x}) \to \psi}$$

Нека је $\varphi(\bar{x})$ формула језика $\mathcal{L}$ за коју $T \vdash \exists_1\bar{x}\varphi(\bar{x})$. Тада језик можемо проширити потпуно новим међусобно различитим константским симболима $\bar{c}$ и теорију аксиомом $\varphi(\bar{c})$ и на тај начин дефинисати нове константе тако да се те дефиниције могу елиминисати из сваке формуле и из сваког доказа.

Проширење језика и теорије ће имати наведене особине и ако језик проширимо потпуно новим n-арним релацијским симболом R и теорију аксиомом $\forall\bar{x}(R(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x}))$, где је $\varphi(\bar{x})$ формула језика $\mathcal{L}$. Исто важи и у случају проширивања језика потпуно новим међусобно различитим n-арним функцијском знацима $\bar{f}$ и теорије аксиомом $\forall\bar{x}\varphi(\bar{x}, \bar{f}(\bar{x}))$, где је $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ формула језика $\mathcal{L}$ за коју $T \vdash \forall\bar{x}\exists_1\bar{y}\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ и за коју је замена у новоуведеној аксиоми регуларна.