Naći sva rešenja (x, y, z, w) iz skupa nenegativnih celih brojeva jednačine

$$2^x \cdot 3^y - 5^z \cdot 7^w = 1$$

Rešenje:

Razmatramo različite slučajeve:

1 $x = 0$

Imamo $3^y - 5^z \cdot 7^w = 1$, što je nemoguće jer je leva strana parna a desna neparna.

2 $y = 0$

2.1 $z = 0$

2.1.1 $x = 1$

$2 - 7^w = 1$, što daje rešenje $(x, y, z, w) = (1, 0, 0, 0)$.

2.1.2 $x = 2$

$4 - 7^w = 1$, što očigledno nema rešenja.

2.1.3 $x = 3$

$8 - 7^w = 1 \iff 7^w = 1$ i ovde nalazimo rešenje $(x, y, z, w) = (3, 0, 0, 1)$.

2.1.4 $x \geqslant 4$

Posmatrajmo kongruenciju po modulu 16.

$$7^w = 2^x - 1 \equiv -1 \pmod{16}$$

S druge strane je

$$7^1 \equiv 7 \pmod{16}$$

$$7^2 = 49 \equiv 1 \pmod{16}$$

Dalje se sve ponavlja, pa je očigledno da ni za jednu vrednost w ne može biti $7^w \equiv -1 \pmod{16}$, i ovo je kontradikcija.

2.2 $z \geqslant 1$

Posmatrajmo kongruenciju po modulu 5.

$$2^x = 1 + 5^z \cdot 7^w \equiv 1 \pmod 5$$

S druge strane je

$$2^1 \equiv 2 \pmod 5$$
$$2^2 \equiv -1 \pmod 5$$
$$2^3 \equiv -2 \pmod 5$$
$$2^4 \equiv 1 \pmod 5$$

Dalje se sve ponavlja, pa je očigledno da je x paran broj (štaviše, x mora biti deljivo sa 4, ali to nam nije potrebno), odnosno $x = 2k$. Sada je

$$2^{2k} - 1 = 5^z \cdot 7^w$$

Međutim,

$$2^{2k} - 1 = 4^k - 1 \equiv 1^k - 1 = 0 \pmod 3$$

pa dolazimo do kontradikcije.

3 $x = 1,\ y \geqslant 1$

3.1 $z = 0$

3.1.1 $y = 1$

$6 - 7^w = 1 \iff 7^w = 5$ što očigledno nema rešenja.

3.1.2 $y \geqslant 2$

Posmatrajmo kongruenciju po modulu 9.

$$7^w = 2 \cdot 3^y - 1 \equiv -1 \pmod 9$$

S druge strane je

$$7^1 \equiv -2 \pmod 9$$
$$7^2 \equiv 4 \pmod 9$$
$$7^3 \equiv 1 \pmod 9$$

Dalje se sve ponavlja, pa je očigledno da ni za jednu vrednost w ne može biti $7^w \equiv -1 \pmod 9$, i ovo je kontradikcija.

3.2 $w = 0$

3.2.1 $y = 1$

$6 - 5^z = 1 \iff 5^z = 5$, i ovde nalazimo rešenje $(x, y, z, w) = (1, 1, 1, 0)$

3.2.2 $y \geqslant 2$

Posmatrajmo kongruenciju po modulu 9.

$$5^z \equiv 2 \cdot 3^y - 1 \equiv -1 \pmod 9$$

S druge strane je

$$5^1 \equiv -4 \pmod 9$$
$$5^2 \equiv -2 \pmod 9$$
$$5^3 \equiv -1 \pmod 9$$
$$5^4 \equiv 4 \pmod 9$$
$$5^5 \equiv 2 \pmod 9$$
$$5^6 \equiv 1 \pmod 9$$

Dalje se sve ponavlja, pa je očigledno da je $z = 6k + 3$. Sada je

$$5^{6k+3} + 1 = 2 \cdot 3^y$$

Međutim,

$$5^{6k+3} + 1 = 5^{3(2k+1)} + 1 = 125^{2k+1} + 1 \equiv (-1)^{2k+1} + 1 = 0 \pmod 7$$

pa dolazimo do kontradikcije.

3.3 $z \geqslant 1,\ w \geqslant 1$

Posmatrajmo kongruenciju po modulu 7.

$$2 \cdot 3^y = 1 + 5^z \cdot 7^w \equiv 1 \pmod 7$$

S druge strane je

$$2 \cdot 3^1 \equiv -1 \pmod 7$$
$$2 \cdot 3^2 \equiv -3 \pmod 7$$
$$2 \cdot 3^3 \equiv -2 \pmod 7$$
$$2 \cdot 3^4 \equiv 1 \pmod 7$$
$$2 \cdot 3^5 \equiv 3 \pmod 7$$
$$2 \cdot 3^6 \equiv 2 \pmod 7$$

Dalje se sve ponavlja, pa je očigledno da je y paran broj. Posmatrajmo sada kongruenciju po modulu 5.

$$2 \cdot 3^y = 1 + 5^z \cdot 7^w \equiv 1 \pmod 5$$

S druge strane je

$$2 \cdot 3^1 \equiv 1 \pmod 5$$
$$2 \cdot 3^2 \equiv -2 \pmod 5$$
$$2 \cdot 3^3 \equiv -1 \pmod 5$$
$$2 \cdot 3^4 \equiv 2 \pmod 5$$

Dalje se sve ponavlja, pa je očigledno da je $y = 4k + 1$, što znači da je y neparan broj. Kontradikcija.

4 $x = 2,\ y \geqslant 1$

Posmatrajmo kongruenciju po modulu 5.

$$4 \cdot 3^y = 1 + 5^z \cdot 7^w \equiv 1 \pmod 5$$

S druge strane je

$$4 \cdot 3^1 \equiv 2 \pmod 5$$
$$4 \cdot 3^2 \equiv 1 \pmod 5$$
$$4 \cdot 3^3 \equiv -2 \pmod 5$$
$$4 \cdot 3^4 \equiv -1 \pmod 5$$

Dalje se sve ponavlja, pa je očigledno da je y paran broj.

4.1 $y = 2$

$4 \cdot 9 - 5^z \cdot 7^w = 1 \iff 5^z \cdot 7^w = 35$, i ovde nalazimo rešenje $(x, y, z, w) = (2, 2, 1, 1)$.

4.2 $y \geqslant 4$

Neka je $y = 2y_1$, pri čemu je $y_1 \geqslant 2$. Sada je $5^z \cdot 7^w = 4 \cdot 3^{2y_1} - 1 = (2 \cdot 3^{y_1} - 1)(2 \cdot 3^{y_1} + 1)$. Pošto su ova dva činioca uzajamno prosti zaključujemo da je $2 \cdot 3^{y_1} - 1 = 7^w$ ili $2 \cdot 3^{y_1} - 1 = 5^z$. Međutim, u delu 3.1.2 odnosno 3.2.2 pokazali smo da ove jednačine nemaju rešenja.

5 $x \geqslant 3,\ y \geqslant 1$

Posmatrajmo kongruenciju po modulu 3.

$$5^z \cdot 7^w = 2^x \cdot 3^y - 1 \iff 5^z \equiv -1 \pmod 3$$

S druge strane je

$$5^1 \equiv -1 \pmod 3$$
$$5^2 \equiv 1 \pmod 3$$

Dalje se sve ponavlja, pa je očigledno da je z neparan broj. Posmatrajmo sada kongruenciju po modulu 8.

$$5^z \cdot 7^w = 2^x \cdot 3^y - 1 \iff 5^z \cdot (-1)^w \equiv -1 \pmod 8 \Rightarrow 5^z \equiv \pm 1 \pmod 8$$

S druge strane je

$$5^1 \equiv -3 \pmod 8$$
$$5^2 \equiv 1 \pmod 8$$

Dalje se sve ponavlja, pa je očigledno da je z paran broj. Kontradikcija.

Dakle, rešenja zadatka su:

$$(x, y, z, w) \in \{(1,0,0,0), (1,1,1,0), (2,2,1,1), (3,0,0,1)\}$$