1. Možemo bez umanjenja opštosti pretpostaviti $a \geqslant b$. Tada očigledno važi $a^m b^n \leqslant a^{m+n}$, kao i $a^n b^m \leqslant a^{m+n}$ pa sabiranjem ove dve relacije imamo $a^m b^n + a^n b^m \leqslant a^{m+n}$ iz čega možemo zaključiti $a^m b^n + a^n b^m \leqslant a^{m+n} + b^{m+n}$ (pošto su m i n iste, parnosti $m+n$ je paran broj, pa je b^{m+n} nenegativan). Imamo sledeći lanac ekvivalencija:

$$a^m b^n + a^n b^m \leqslant a^{m+n} + b^{m+n} \iff a^{m+n} + a^m b^n + a^n b^m + b^{m+n} \leqslant 2(a^{m+n} + b^{m+n}) \iff$$

$$\iff (a^m + b^m)(a^n + b^n) \leqslant 2(a^{m+n} + b^{m+n}) \iff \frac{a^m + b^m}{2} \cdot \frac{a^n + b^n}{2} \leqslant \frac{a^{m+n} + b^{m+n}}{2}$$

2. Najpre faktorišemo dati izraz:

$$(a+b)^5 - a^5 - b^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5 - a^5 - b^5 = 5ab(a^3 + 2a^2 b + 2ab^2 + b^3) =$$

$$= 5ab(a^3 + a^2 b + a^2 b + ab^2 + ab^2 + b^3) = 5ab(a^2(a+b) + ab(a+b) + b^2(a+b)) = 5ab(a+b)(a^2 + ab + b^2)$$

Zaključujemo da svih 5 činilaca u ovom proizvodu moraju biti prosti brojevi, što znači da su (između ostalih) i a, b i $a+b$ prosti. Ukoliko su i a i b neparni onda je $a+b$ paran broj pa samim tim ne može biti prost. Zbog simetrije možemo pretpostaviti $a = 2$. Izraz se sada svodi na

$$10b(b+2)(b^2 + 2b + 4) = 10b(b+2)(b(b+2) + 1 + 3)$$

$b = 3$ je jedan broj koji ispunjava uslove zadatka. Za $b > 3$ sledi da jedan od brojeva b i $b+2$ pri deljenju sa 3 daje ostatak 1 a drugi -1 pa je izraz $b(b+2) + 1 + 3$ deljiv sa 3 i ne može biti prost. Dakle, jedina rešenja zadatka su:

$$(a, b) \in \{(2, 3), (3, 2)\}$$

3. Neka je R poluprečnik opisane kružnice datog trougla. Primenom sinusne teoreme dobijamo:

$$AB = 2R \sin 50^o \tag{1}$$
$$BC = 2R \sin 80^o \tag{2}$$

Dalje, primenom sinusne teoreme na trougao ADB dobijamo:

$$\frac{AD}{\sin 50^o} = \frac{AB}{\sin 80^o}$$

što nam zajedno sa (1) daje:

$$AD = \frac{2R \sin^2 50^o}{\sin 80^o} \tag{3}$$

Slično, primenom sinusne teoreme na trougao BCE imamo:

$$\frac{BE}{\sin 50^o} = \frac{BC}{\sin 110^o}$$

pa u kombinaciji sa (2) zaključujemo:

$$BE = \frac{2R \sin 50^o \sin 80^o}{\sin 70^o} \tag{4}$$

Dalje, primenom sinusne teoreme na trougao AOB dobijamo:

$$\frac{AO}{\sin 30^o} = \frac{AB}{\sin 100^o}$$

$$\frac{BO}{\sin 50^o} = \frac{AB}{\sin 100^o}$$

i zajedno sa (1) imamo:

$$AO = \frac{2R\sin 30^o \sin 50^o}{\sin 80^o} \tag{5}$$

$$BO = \frac{2R\sin^2 50^o}{\sin 80^o} \tag{6}$$

Sada iz (4) i (6) imamo

$$OE = BE - BO = \frac{2R\sin 50^o \sin 80^o}{\sin 70^o} - \frac{2R\sin^2 50^o}{\sin 80^o} = 2R\sin 50^o \frac{\sin^2 80^o - \sin 50^o \sin 70^o}{\sin 70^o \sin 80^o} =$$

$$= 2R\sin 50^o \frac{4\sin 20^o \cos 20^o \cos 40^o \sin 80^o - \cos 20^o \cos 40^o}{2\cos 20^o \sin 40^o \cos 40^o} = 2R\sin 50^o \frac{4\sin 20^o \sin 80^o - 1}{2\sin 40^o} =$$

$$= 2R\sin 50^o \frac{2(\cos 60^o - \cos 100^o) - 1}{2\sin 40^o} = 2R\sin 50^o \frac{1 + 2\sin 10^o - 1}{2\sin 40^o}$$

$$OE = \frac{2R\sin 10^o \sin 50^o}{\sin 40^o} \tag{7}$$

dok iz (3) i (5) sledi:

$$OD = AD - AO = \frac{2R\sin^2 50^o}{\sin 80^o} - \frac{2R\sin 30^o \sin 50^o}{\sin 80^o} = 2R\sin 50^o \frac{2\sin 10^o \cos 40^o}{2\sin 40^o \cos 40^o}$$

$$OD = \frac{2R\sin 10^o \sin 50^o}{\sin 40^o} \tag{8}$$

Iz (7) i (8) sledi da su duži OE i OD zaista jednake, što je i trebalo dokazati.

4. Pretpostavimo da postoji ceo broj d takav da je $P(d) = 0$. Primetimo da važi sledeće:

$$a - d | P(a) - P(d) \iff a - d | \pm 1$$

$$b - d | P(b) - P(d) \iff b - d | \pm 1$$

$$c - d | P(c) - P(d) \iff c - d | \pm 1$$

Zaključujemo da različiti brojevi $a-d$, $b-d$ i $c-d$ mogu uzeti samo dve vrednosti (konkretno 1 i -1) što je nemoguće pa polazna pretpostavka da postoji ceo broj d takav da je $P(d) = 0$ nije tačna.