Дискусија по Delta

Најпре би требало рећи у вези једначине $x^3 - \alpha = 0$, да у једнакости $x_k = \sqrt[3]{\alpha}(cos\frac{2k\pi}{3} + isin\frac{2k\pi}{3})$, $\sqrt[3]{\alpha}$ представља прави трећи корен, односно да је $\sqrt[3]{\alpha} \in \mathbb{R}$.

Посматрајмо једначину $x^3 + px + q = 0$. Дискриминанта ове једначине је $\Delta = -(4p^3 + 27q^2)$. Имамо да је по Кардановој формули једно решење једначине дато са $x_1 = a + b$, где су $a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ и $b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$, односно да је $x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$.
Такође, знамо да су $u = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$ и $v = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ примитивни трећи корени јединице. Решавањем одговарајућег система дошли смо до Карданове формуле, али смо увидели да осим решења (a, b) овај систем има и (au, bv) и (av, bu) као решења, па долазимо до закључка да су сва три решења полазне једначине дата са: $x_1 = a + b$, $x_2 = au + bv$ и $x_3 = av + bu$.

Пре дискусије по Δ требало би рећи следеће. Лако("лако") се доказује да за $z \in \mathbb{C}$ и $m, n \in \mathbb{N}$ важи: $\overline{z^n} = \bar{z}^n$, $\overline{z^{\frac{m}{n}}} = \bar{z}^{\frac{m}{n}}$, односно $\overline{z^{\frac{1}{n}}} = \bar{z}^{\frac{1}{n}}$. Последња једнакост може да се лепше напише и као $\overline{\sqrt[n]{z}} = \sqrt[n]{\bar{z}}$, односно за оно што нам је сада битно: $\overline{\sqrt[3]{z}} = \sqrt[3]{\bar{z}}$. Трећи корени коњуговано комплексних бројева су коњуговано комплексни. Одавде следи да је збир трећих корена коњуговано комплексних бројева реалан број, јер је $z + \bar{z} = 2Re(z)$.

Дискусија по Δ:

1. $\Delta > 0$
   Пошто је $\Delta > 0$, после краћег срећивања добијамо да важи:
   $x_1 = a + b, x_2 = -\frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(a - b), x_2 = -\frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(a - b)$
   Пошто су a и b коњуговано комплексни, имамо да је $x_1 = a + b = 2Re(a) \in \mathbb{R}$, а $a - b = i2Im(a)$, односно $\pm\frac{1}{2}i\sqrt{3}(a - b) \in \mathbb{R}$. Дакле, за $\Delta > 0$ једначина $x^3 + px + q = 0$ има три различита реална корена.
2. $\Delta = 0$
   Пошто је $\Delta = 0$, важи да је $a = b$, па имамо да важи: $x_1 = 2a, x_2 = x_3 = -a$. Дакле, за $\Delta = 0$ једначина $x^3 + px + q = 0$ има три реална корена: x_1 и $x_2 = x_3$ као двоструки корен.
3. $\Delta < 0$
   Ако је $\Delta < 0$ тада, пошто су $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$, имамо да је:
   $x_1 = a + b, x_2 = -\frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(a - b), x_2 = -\frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(a - b)$. Дакле, за $\Delta < 0$ једначина $x^3 + px + q = 0$ има један реалан и два коњуговано комплексна корена.

Посматрајмо ово на неким примерима:

1. $\Delta > 0$
   $x^3 - 6x + 4 = 0$
   Имамо да је $\Delta = -(4p^3 + 27q^2) = -(4 \cdot (-6)^3 + 27 \cdot 4^2) = -(-864 + 432) = 432 > 0$.
   Решења су:
   $x_1 = \sqrt[3]{-2+2i} + \sqrt[3]{-2-2i} = 1 + i + 1 - i = 2, x_2 = -1 - \sqrt{3}, x_3 = -1 + \sqrt{3}$
   Три различита, реална корена.
2. $\Delta = 0$
   $x^3 - 3x + 2 = 0$
   Имамо да је $\Delta = -(4p^3 + 27q^2) = -(4 \cdot (-3)^3 + 27 \cdot 2^2) = -(-108 + 108) = 0$.
   Решења су:
   $x_1 = -2, x_2 = x_3 = 1$
   Три реална корена, x_1 и $x_2 = x_3$ двоструки корен.
3. $\Delta < 0$
   $x^3 + 6x + 2 = 0$
   Овај пример је решен у претходним порукама. Имамо да је $\Delta = -(4p^3 + 27q^2) = -(4 \cdot 6^3 + 27 \cdot 2^2) = -(864 + 108) = -972 < 0$. Решења су:
   $x_1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$
   $x_2 = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}) + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$
   $x_3 = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}) - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$
   Један реалан и два коњуговано комплексна корена.