Primene kompleksnih brojeva u geometriji

Radoslav Dimitrijević

07.12.2011.

§1 Neki osnovni geometrijski pojmovi

1.1. Rastojanje između tačaka

Neka su tačke A i B u kompleksnoj ravni određene kompleksnim brojevima a i b respektivno. Tada je **rastojanje** AB između ovih tačaka dato formulom

$$AB = |a-b|\,.$$

Lako je proveriti da ovako određeno rastojanje između dveju tačaka ima sva svojstva funkcije rastojanja.

1.2. Duž, poluprava, prava

Za tačku $M(z)$ kompleksne ravni kažemo da je između tačaka A i B ako je $z \neq a$, $z \neq b$ i

$$|a-z| + |z-b| = |a-b|\,,$$

pri čemu koristimo oznaku $A - M - C$.

Skup $(AB) := \{M \,:\, A - M - B\}$ nazivamo **otvoreni segment** ili **interval** određen tačkama A i B. Skup $[AB] := (A,B) \cup \{A,B\}$ je **zatvoreni interval** ili **segment** određen tačkama A i B.

Stav 1.1. *Neka su $A(a)$ i $B(b)$ dve različite tačke kompleksne ravni. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(a) $M(z) \in (AB)$;

(b) postoji pozitivan realan broj k tako da je $z - a = k(b-z)$;

(c) postoji realan broj $t \in (0,1)$ tako da je $z = (1-t)a + tb$.

Dokaz: Dokažimo najpre da su tvrđenja (a) i (b) ekvivalentna. Zaista, $M(z) \in (AB)$ onda i samo onda ako je $|a-z| + |z-b| = |a-b|$. Ovo je ekvivalentno sa činjenicom da postoji $k > 0$ tako da je $z - a = k(b-z)$.

Da dokažemo da je $(b) \Leftrightarrow (c)$, stavimo da je $t = k/(k+1) \in (0,1)$ ili $k = t/(1-t) > 0$. Tada je $z - a = k(b-z)$ onda i samo onda ako je $z = \dfrac{1}{k+1} + \dfrac{k}{k+1}b$, odn. $z = (1-t)a + tb$, što je i trebalo dokazati. ♣

Skup $(AB := \{M \,:\, A - M - B$ ili $A - B - M\}$ nazivamo **otvorenom polupravom** kroz tačku B i krajnjom tačkom A. Slično se definiše otvorena poluprava $AB)$.

Sledeći stav dokazuje se slično prethodnom.

Stav 1.2. *Ako su* $A(a)$ *i* $B(b)$ *dve različite tačke, tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(a) $M(z) \in (AB$;

(b) postoji pozitivan realan broj t *takav da je* $z = (1-t)a + tb$;

(c) $\arg(z-a) = \arg(b-a)$;

(c) $\dfrac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R}^+$.

Stav 1.3. *Neka su* $A(a)$ *i* $B(b)$ *dve različite tačke. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:*

(a) tačka $M(z)$ *pripada pravoj koja je određena tačkama* A *i* B;

(b) $\dfrac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R}$;

(c) postoji realan broj t *takav da je* $z = (1-t)a + tb$;

(d) $\begin{vmatrix} z-a & \overline{z}-\overline{a} \\ b-a & \overline{b}-\overline{a} \end{vmatrix} = 0$;

(e) $\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$

Dokaz: Da dokažemo da je $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c)$, primetimo najpre sledeću jednostavnu činjenicu. Ako je C tačka za koju je $C - A - B$, tada pravu određenu tačkama A i B možemo napisati kao skup $(AB \cup \{A\} \cup CA)$. Sada ekvivalencije $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c)$ neposredno slede iz Stava 1.2.

Dokažimo sada da je $(b) \Leftrightarrow (d) \Leftrightarrow (e)$. Zaista, očigledno je $\dfrac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R}$ onda i samo onda ako je $\dfrac{z-a}{b-a} = \overline{\left(\dfrac{z-a}{b-a}\right)} \Leftrightarrow \dfrac{z-a}{b-a} = \dfrac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}$ ili ekvivalentno, $\begin{vmatrix} z-a & \overline{z}-\overline{a} \\ b-a & \overline{b}-\overline{a} \end{vmatrix} = 0$, pa je $(b) \Leftrightarrow (d)$. Štaviše,

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ onda i samo onda ako je } \begin{vmatrix} z-a & \overline{z}-\overline{a} & 0 \\ a & \overline{a} & 1 \\ b-a & \overline{b}-\overline{a} & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Poslednja determinanta jednaka je sledećoj determinanti

$$\begin{vmatrix} z-a & \overline{z}-\overline{a} \\ b-a & \overline{b}-\overline{a} \end{vmatrix} = 0\,,$$

što dokazuje da je $(d) \Leftrightarrow (e)$. ♣

1.3. Deljenje duži u zadatom odnosu

Neka su $A(a)$ i $B(b)$ dve različite tačke. Tačka $M(z)$ na pravoj AB deli duž AB u odnosu $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ako važi sledeća vektorska jednakost:

$$\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB}\,.$$

U terminima kompleksnih brojeva ovu jednakost možemo napisati u sledećem obliku

$$a - z = k(b - z) \text{ ili } z(1 - k) = a - kb\,.$$

Stoga je

$$z = \frac{a - kb}{1 - k}$$

kompleksan broj koji određuje tačku M. Za $k < 0$ tačka M pripada segmentu koji spaja tačke A i B. Ako je $k \in (0, 1)$, onda je $M \in (AB \setminus [A, B]$, a ako je $k > 1$, onda je $M \in AB) \setminus [AB]$. Za $k = -1$ tačka M je sredina duži AB, a određena je kompleksnim brojem $z_M = \dfrac{a + b}{2}$.

Primer 1.1. Neka su $A(a)$, $B(b)$ i $C(c)$ tri nekolinearne tačke u ravni. Sredina C_1 duži AB je određena kompleksnim brojem $c_1 = \dfrac{a + b}{2}$. Težište G trougla ABC deli medijanu CC_1 u odnosu $2 : 1$, pa je njena kompleksna koordinata određena parametrom $k = -2$, odn.

$$z_G = \frac{c + 2c_1}{1 + 2} = \frac{a + b + c}{3}\,.$$

1.4. Mera ugla

Za trougao se kaže da je orijentisan ako su njegova temena uređena na specifičan način. On je pozitivno ili direktno orijentisan, ako su njegova temana, označena u rastućem azbučnom redosledu, poređana u smeru suprotnom od kretanja kazaljki na satu. U protivnom, on je negativno orijentisan. Razmotrimo dve različite tačke $M_1(z_1)$ i $M_2(z_2)$, koje su različite od koordinatnog početka. Ugao $\widehat{M_1OM_2}$ je **pozitivno orijentisan** ako su tačke M_1 i M_2, tim redosledom, uređene suprotno od kretanja kazaljki na satu, ili ekvivalentno, ako je trougao M_1OM_2 pozitivno orijentisan. Drugim rečima, ugao $\widehat{M_1OM_2}$ je pozitivno orijentisan, ako se krak OM_1 pri rotaciji oko tačke O do poklapanja sa krakom OM_2 kreće u smeru suprotnom od kretanja kazaljki na satu, krećući se pri tome preko oblasti ugla.

Stav 1.4. *Mera pozitivno orijentisanog ugla* $\widehat{M_1OM_2}$ *jednaka je* $\arg \dfrac{z_2}{z_1}$.

Stav 1.5. *Ako su* $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ *i* $M_3(z_3)$ *tri različite tačke, onda je mera pozitivno orijentisanog ugla* $\widehat{M_2M_1M_3}$ *jednaka* $\arg \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.

Dokaz: Translacijom za vektor $-\overrightarrow{OM_1}$ tačke $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ i $M_3(z_3)$ preslikavaju se u tačke $O(0)$, $M_2'(z_2 - z_1)$ i $M_3'(z_3 - z_1)$, pri čemu je $\widehat{M_2M_1M_3} = \widehat{M_2'OM_3'}$. No onda je prema prethodnom stavu

$$\widehat{M_2'OM_3'} = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\,.$$

1.5. Rotacija tačke

Neka je tačka M određena kompleksnim brojem $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ i neka je $\varepsilon = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Za kompleksan broj $z\varepsilon = r[\cos(\varphi+\alpha) + i\sin(\varphi+\alpha)]$ imamo da je $|z\varepsilon| = |z|$ i $\arg(z\varepsilon) = \arg z + \arg\varepsilon = \varphi + \alpha$. Tačka $M'(z\varepsilon)$ ima moduo $|z|$, dok je argument $\varphi + \alpha$, što znači da je tačka M' dobijena rotacijom tačke M oko koordinatnog početka za ugao $\alpha = \arg\varepsilon$.

Stav 1.6. *Ako je tačka* $C(c)$ *dobijena rotacijom tačke* $B(b)$ *oko tačke* $A(a)$ *za ugao* α, *onda je* $c = a + (b-a)\varepsilon$, *gde je* $\varepsilon = \cos\alpha + i\sin\alpha$.

Dokaz: Translacijom za vektor $-\overrightarrow{OA}$ tačke A, B, C preslikavaju se u tačke $O(0)$, $B'(b-a)$ i $C'(c-a)$. Tačka C' se dobija sada rotacijom tačke B' oko koordinatnog početka za ugao α, pa je prema prethodno rečenom, $c - a = (b-a)\varepsilon$, odn. $c = a + (b-a)\varepsilon$. ♣

Zadatak 1.1. *Neka su* $ABCD$ *i* $BNMK$ *kvadrati u istoj ravni koji sem tačke* B *nemaju drugih zajedničkih tačaka. Ako je* E *srednja tačka duži* AN, *a* F *podnožje normale iz tačke* B *na pravu određenu tačkama* C *i* K, *dokazati da su tačke* E, F, B *kolinearne.*

Rešenje: Razmotrimo zadate kvadrate u kompleksnoj ravni čiji je koordinatni početak u tački F, pri čemu je realna osa određena tačkama C i K, dok je imaginarna osa određena tačkama B i F. Neka su c, k, bi, $c, k, b \in \mathbb{R}$, kompleksni brojevi koji u posmatranoj kompleksnoj ravni određuju tačke C, K, B respektivno. Tačka A se dobija rotacijom tačke C oko tačke B za ugao $\pi/2$, pa je ona određena kompleksnim brojem $a = ib + (c - ib)[\cos(\pi/2) +$

$i\sin(\pi/2)] = b + i(b+c)$. Slično se dobija kompleksan broj $n = -b + i(b-k)$ koji određuje tačku N. Srednja tačka E duži AN određena je kompleksnim brojem $e = (a+n)/2 = [b + (c-k)/2]i$, pa su tačke F, B i E očigledno kolinearne.

Zadatak 1.2. *Na stranicama AB, BC, CD, DA četvorougla $ABCD$ konstruisani su kvadrati sa središtima u tačkama O_1, O_2, O_3, O_4 respektivno, koji sa kvadratom $ABCD$ nemaju drugih zajedničkih tačaka, sem odgovarajućih zajedničkih stranica. Dokazati da je $O_1O_3 \perp O_2O_4$ i $O_1O_3 = O_2O_4$.*

Rešenje: Neka su $ABMM'$, $BCNN'$, $CDPP'$, $DAQQ'$ kvadrati sa središtima u tačkama O_1, O_2, O_3, O_4 respektivno. Za svaku tačku označimo odgovarajućim malim slovom kompleksan broj koji je određuje. Tačka M se dobija rotacijom tačke A oko tačke B za ugao $\pi/2$, pa je stoga ona određena kompleksnim brojem $m = b + (a-b)i$. Slično dobijamo kompleksne brojeve koji određuju tačke N, P, Q: $n = c + (b-c)i$, $p = d + (c-d)i$, $q = a + (d-a)i$. Tačke O_1, O_2, O_3, O_4 su sredine duži AM, BN, CP, DQ respektivno, pa je

$$o_1 = \frac{a+m}{2} = \frac{a+b+(a-b)i}{2}\,, \quad o_2 = \frac{b+n}{2} = \frac{b+c+(b-c)i}{2}\,,$$
$$o_3 = \frac{c+p}{2} = \frac{c+d+(c-d)i}{2}\,, \quad o_4 = \frac{d+q}{2} = \frac{d+a+(d-a)i}{2}\,.$$

Kako je

$$\frac{o_3 - o_1}{o_4 - o_2} = \frac{c+d-a-b+(c-d-a+b)i}{a+d-b-c+(d-a-b+c)i} = -i \in i\mathbb{R}^*\,,$$

to je $O_1O_3 \perp O_2O_4$. Osim toga je

$$\left|\frac{o_3 - o_1}{o_4 - o_2}\right| = |-i| = 1\,,$$

pa je $O_1O_3 = O_2O_4$.

§2 Uslovi za kolinearnost, ortogonalnost i kocikličnost

Stav 2.1. *Tačke $M_i(z_i)$, $i \in \{1,2,3\}$, su kolinearne onda i samo onda ako je*

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Dokaz: Tačaka M_1, M_2, M_3 biće kolinearne onda i samo onda ako je zadovoljen uslov $\widehat{M_2M_1M_3} \in \{0, \pi\}$. No onda je prema Stavu 1.5. $\arg \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \{0, \pi\}$, ili ekvivalentno, $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, što je i trebalo dokazati. ♣

Stav 2.2. *Prave M_1M_2 i M_3M_4 su ortogonalne onda i samo onda ako je* $\dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Dokaz: $M_1M_2 \perp M_3M_4$ onda i samo onda ako je $\angle(M_1M_2, M_3M_4) \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$. Ovo je ekvivalentno sa činjenicom da je $\arg \dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$. Stoga je $M_1M_2 \perp M_3M_4$ onda i samo onda ako je $\dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$. ♣

Stav 2.3. *Tačke $M_i(z_i)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, pripadaju istoj kružnici (u tom slučaju kažemo da su* **kociklične***) onda i samo onda ako je*

$$k = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Dokaz: Neka su tačke M_1, M_2, M_3, M_4 na kružnici zadate u tom redosledu. Tada je $\widehat{M_1M_2M_3} + \widehat{M_1M_4M_3} \in \{3\pi, \pi\}$. Stoga je

$$\arg \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} + \arg \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} \in \{3\pi, \pi\}\,,$$

odn.

$$\arg \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} - \arg \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \{3\pi, \pi\}\,,$$

pa je $k < 0$.

Za svaki drugi raspored tačaka na kružnici dokaz je sličan. Četiri tačke možemo na 6 različitih načina rasporediti na kružnici. U tri slučaja je $k > 0$, dok je u ostala tri $k < 0$. ♣

Zadatak 2.1. *Tačke $A(a)$, $B(b)$ i $C(c)$ su temena trougla. Ako je $u = a-b$, $v = c - a$, dokazati da je $\angle A = 90^\circ$ onda i samo onda ako je $Re(u\overline{v}) = 0$.*

Rešenje: $\angle A = 90^\circ$ onda i samo onda ako je $\dfrac{b-a}{c-a} \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$, što je ekvivalentno $\dfrac{u}{-v} \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$, tj., $Re\left(\dfrac{u}{-v}\right) = 0$. Poslednja jednakost ekvivalentna je sa $Re\left(\dfrac{u\overline{v}}{-|v|^2}\right) = 0$, odn. sa $Re(u\overline{v}) = 0$, što je i trebalo dokazati. ♣

Zadatak 2.2. *Ako se iz ma koje tačke kružne linije opisane oko trougla konstruišu normale na njegove stranice, dokazati da podnožja normala pripadaju istoj pravoj (Simsonova teorema).*

Rešenje: Ne umanjujući opštost razmatranja, možemo pretpostaviti da je kružnica k opisana oko trougla ABC jediničnog poluprečnika sa središtem u koordinatnom početku. Označimo sa A_1, B_1, C_1 podnožja normala iz proizvoljne tačke $M \in k$ na stranice BC, CA, AB trougla ABC. Označimo malim slovima kompleksne brojeve koji određuju tačke označene odgovarajućim velikim slovima. Tačke A_1, B_1, C_1 određene su respektivno kompleksnim brojevima

$$a_1 = \frac{1}{2}(m - bc\overline{m} + b + c)\,,\ b_1 = \frac{1}{2}(m - ac\overline{m} + a + c)\,,\ c_1 = \frac{1}{2}(m - ab\overline{m} + a + b)$$

i kolinearne su onda i samo onda ako je

$$\frac{b_1 - a_1}{c_1 - a_1} = \frac{b-a}{c-a} \cdot \frac{c\overline{m} - 1}{b\overline{m} - 1} \in \mathbb{R}\,.$$

Ovaj uslov će biti zadovoljen onda i samo onda ako je

$$\frac{b_1 - a_1}{c_1 - a_1} = \frac{\overline{b}_1 - \overline{a}_1}{\overline{c}_1 - \overline{a}_1}\,.$$

Tačke A, B, C i M pripadaju jediničnom krugu k, pa je $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = m\overline{m} = 1$. Stoga je

$$\frac{\overline{b}_1 - \overline{a}_1}{\overline{c}_1 - \overline{a}_1} = \frac{\overline{b} - \overline{a}}{\overline{c} - \overline{a}} \cdot \frac{\overline{c}m - 1}{\overline{b}m - 1} = \frac{1/b - 1/a}{1/c - 1/a} \cdot \frac{1/c\overline{m} - 1}{1/b\overline{m} - 1} = \frac{b-a}{c-a} \cdot \frac{c\overline{m} - 1}{b\overline{m} - 1} = \frac{b_1 - a_1}{c_1 - a_1}\,,$$

što je i trebalo dokazati. Prava određena tačkama A_1, B_1, C_1 poznata je kao **Simsonova prava**.

Zadatak 2.3. *Dijagonale AC i BD trapeza $ABCD$ seku se u tački E, a prave određene dužima AD i BC u tački F. Ako je O središte kruga opisanog oko trapeza $ABCD$, dokazati*

(a) da tačke A, D, O, E pripadaju istoj kružnoj liniji;

(b) da tačke A, C, O, F pripadaju istoj kružnoj liniji.

Rešenje: (a) Neka je poluprečnik kruga opisanog oko trapeza $ABCD$ osnovice AB jednak jedan, pri čemu se središte nalazi u koordinatnom početku.

Kako je $AB \| CD$, to je $\dfrac{b-a}{d-c} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ovo će biti zadovoljeno onda i samo onda ako je $\dfrac{b-a}{d-c} = \dfrac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{d}-\overline{c}}$. Iz ove jednakosti se lako dobija da je $ab = cd$, pri čemu se koristi činjenica da je $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = d\overline{d} = 1$. Tačke A, O, E, D pripadaju istoj kružnici onda i samo onda ako je $\dfrac{a-e}{d-e} : \dfrac{a}{d} \in \mathbb{R}$, ili ekvivalentno, ako je $\dfrac{a-c}{d-b} : \dfrac{a}{d} \in \mathbb{R}$. Poslednji uslov će biti zadovoljen ako i samo ako je $\dfrac{a-c}{d-b} : \dfrac{a}{d} = \dfrac{\overline{a}-\overline{c}}{\overline{d}-\overline{b}} : \dfrac{\overline{a}}{\overline{d}}$. Kako je

$$\frac{\overline{a}-\overline{c}}{\overline{d}-\overline{b}} : \frac{\overline{a}}{\overline{d}} = \frac{1/a-1/c}{1/d-1/b} : \frac{1/a}{1/d} = \frac{bd(c-a)}{ac(b-d)} : \frac{d}{a} = \frac{c-a}{b-d} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a-c}{d-b} : \frac{a}{d},$$

tačke A, O, E, D pripadaju istoj kružnici.

(b) Tačke A, O, C, F će pripadati istoj kružnici ako dokažemo da je $\sphericalangle AOC + \sphericalangle AFC = \arg \dfrac{b-c}{a-d} \cdot \dfrac{a}{c} = \pi$. Kako je $ab = cd$, to je

$$\frac{b-c}{a-d} \cdot \frac{a}{c} = \frac{cd-ac}{c(a-d)} = \frac{c(d-a)}{c(a-d)} = -1,$$

tačke A, O, C, F pripadaju istoj kružnici.

§3 Sličnost trouglova

Stav 3.1. *Trouglovi $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$ istih orijentacija su slični onda i samo onda ako je*

$$\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1} = \frac{b_2-b_1}{b_3-b_1}. \tag{1}$$

Dokaz: $\triangle A_1A_2A_3 \sim \triangle B_1B_2B_3$ onda i samo onda ako je $A_1A_2/A_1A_3 = B_1B_2/B_1B_3$ i $\widehat{A_3A_1A_2} = \widehat{B_3B_1B_2}$. Ovo je ekvivalentno sa

$$\frac{|a_2-a_1|}{|a_3-a_1|} = \frac{|b_2-b_1|}{|b_3-b_1|} \ \text{ i } \ \arg \frac{a_2-a_1}{a_3-a_1} = \arg \frac{b_2-b_1}{b_3-b_1}.$$

Poslednje dve jednakosti okvivalentne su sa uslovom

$$\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1} = \frac{b_2-b_1}{b_3-b_1},$$

što je i trebalo dokazati,. ♣

Uslov (1) u prethodnom stavu ekvivalentan je uslovu da je

$$(1') \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Lako je proveriti da za trouglove $A_1(0)$, $A_2(1)$, $A_3(2i)$ i $B_1(0)$, $B_2(-i)$, $B_3(-2)$ ovaj uslov nije zadovoljen mada su oni očigledno slični. Ovi trouglovi, međutim, nisu istih orijentacija. Za trouglove suprotnih orijentacija važi sledeći stav.

Stav 3.2. *Trouglovi $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$ suprotnih orijentacije su slični onda i samo onda ako je*

$$(2) \qquad \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{\bar{b}_2 - \bar{b}_1}{\bar{b}_3 - \bar{b}_1}\,.$$

Dokaz: Preslikajmo tačke $B_i(b_i)$ simetrično u odnosu na x-osu u tačke $B'(\bar{b}_i)$, $i \in \{1,2,3\}$. Trouglovi $B_1B_2B_3$ i $B_1'B_2'B_3'$ su slični, ali imaju suprotne orijentacije. Stoga su trouglovi $A_1A_2A_3$ i $B_1'B_2'B_3'$ slični i imaju iste orijentacije pa stoga prema prethodnom stavu važi (2). ♣

Zadatak 3.1. *Na stranicama AB, BC, CA trougla ABC konstruisani su slični trouglovi ADB, BEC, CFA istih orijentacija, koji sa trouglom ABC, sem stranica AB, BC, CA, nemaju drugih zajedničkih tačaka. Dokazati da trouglovi ABC i DEF imaju isto težište.*

Rešenje: Trouglovi ADB, BEC, CFA su slični i imaju iste orijentacije, pa prema Stavu 3.1. važi sledeća jednakost

$$\frac{d-a}{b-a} = \frac{e-b}{c-b} = \frac{f-c}{a-c} = \lambda\,.$$

Stoga je $d = a + (b-a)\lambda$, $e = b + (c-b)\lambda$, $f = c + (a-c)\lambda$, pa je

$$\frac{d+e+f}{3} = \frac{a+b+c}{3}\,,$$

što dokazuje da trouglovi ABC i DEF, na osnovu Primera 1.1., imaju zajedničko težište.

Zadatak 3.2. *Sa iste strane duži PQ konstruisani su slični trouglovi KPQ, QLP i PQM, pri čemu je $\angle QPM = \angle PQL = \alpha$, $\angle PQM = \angle KPQ = \beta$, $\angle PQK = \angle LPQ = \gamma$ i $\alpha < \beta < \gamma$. Dokazati da je trougao KLM sličan sa prva tri trougla.*

Rešenje: Označimo sa p, q, k, l, m kompleksne brojeve koji tim redosledom određuju tačke P, Q, K, L, M kompleksne ravni. Iz sličnosti trouglova KPQ, QLP i PQM imamo sledeću dvostruku jednakost: $\dfrac{k-q}{p-q} = \dfrac{q-p}{l-p} = \dfrac{p-m}{q-m} = \lambda$. Kako je

$$\frac{(k-q)+(q-p)+(p-m)}{(p-q)+(l-p)+(q-m)} = \frac{k-m}{l-m} = \lambda\,,$$

trougao KLM je sličan sa ostala tri trougla, pri čemu su svi trouglovi iste orijentacije.

§4 Jednakostraničan trougao

Stav 4.1. *Ako su temena A_1, A_2, A_3 trougla $A_1A_2A_3$ određena su kompleksnim brojevima z_1, z_2, z_3 respektivno, tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(a) $A_1A_2A_3$ *je jednakostraničan trougao;*

(b) $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$;

(c) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$;

(d) $\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$;

(e) $\dfrac{1}{z - z_1} + \dfrac{1}{z - z_2} + \dfrac{1}{z - z_3} = 0$, *gde je* $z = \dfrac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$;

(f) $(z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3)(z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_3) = 0$, *gde je* $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$;

(g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix} = 0.$

Dokaz: Trougao $A_1A_2A_3$ je jednakostraničan onda i samo onda ako je iste orijentacije i sličan sa trouglom $A_2A_3A_1$, odn. ako je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

odakle sledi da je $(a) \Leftrightarrow (g)$.

Kako je

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix} = \\ &= z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) = \\ &= -(z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3)(z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_3)\,, \end{aligned}$$

to je $(g) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (f)$. Jednostavnim algebarskim transformacijama se dokazuje da je $(d) \Leftrightarrow (c)$. Ekvivalentnost iskaza (a) i (b) očigledna. Čitaocu prpuštamo da sam dokaže ekvivalentnost iskaza (a) i (e). ♣

Stav 4.2. *Ako su $A_1(a_1)$, $A_2(a_2)$ i $A_3(a_3)$ temena pozitivno orijentisanog trougla $A_1A_2A_3$, dokazati da su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(a) $A_1A_2A_3$ je jednakostraničan trougao;

(b) $z_3 - z_1 = \varepsilon(z_2 - z_1)$, gde je $\varepsilon = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$;

(c) $z_2 - z_1 = \varepsilon(z_3 - z_1)$, gde je $\varepsilon = \cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin 5\pi 3$;

(d) $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0$.

Dokaz: Trougao $A_1A_2A_3$ je jednakostraničan i pozitivno orijentisan onda i samo onda ako je teme A_3 dobijeno rotacijom temena A_2 oko temena A_1 za ugao $\pi/3$, tj. ako je, na osnovu Stava 1.6., zadovoljen uslov (b). Dakle je $(a) \Leftrightarrow (b)$. Na sličan način zaključujemo da je $(a) \Leftrightarrow (c)$. Da dokažemo da je $(b) \Leftrightarrow (d)$, dokažimo da je (b) ekvivalentno sa

(b') $z_3 = z_1 + \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_2 - z_1) = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z_1 + \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2\,.$

Zaista,

$$\begin{aligned} z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 &= z_1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2 + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_3 = \\ &= z_1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2 + \\ &+ \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left[\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_1 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2\right] = \\ &= z_1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2 - z_1 + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2 = 0\,, \end{aligned}$$

pa je $(b) \Leftrightarrow (d)$. ♣

Zadatak 4.1. *Neka su temena trougla $A_1A_2A_3$ određena kompleksnim brojevima $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ako je $z_1^2 = z_2z_3$ i $z_2^2 = z_2z_3$, dokazati da je trougao $A_1A_2A_3$ jednakostraničan.*

Rešenje: Množenjem jednakosti $z_1^2 = z_2z_3$ i $z_2^2 = z_2z_3$ dobijamo jednakost $z_1^2z_2^2 = z_1z_2z_3^2$ iz koje sledi da je $z_3^2 = z_1z_2$. Stoga je

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1\,,$$

pa je trougao $A_1A_2A_3$ jednakostraničan prema Stavu 4.1.

Zadatak 4.2. *Neka su z_1, z_2, z_3 kompleksni brojevi jednakih modula. Dokazati da oni određuju temena jednakostraničnog trougla ako i samo ako je $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Kakav je geometrijski smisao brojeva z_1z_2, z_2z_3, z_3z_1 u tom slučaju?*

Neka je $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r > 0$. Pretpostavimo najpre da kompleksni brojevi z_1, z_2, z_3 tim redosledom određuju temena A_1, A_2, A_3 jednakostraničnog trougla $A_1A_2A_3$. Neka je $\omega = -1/2 + i\sqrt{3}/2$. Kako je $|\omega| = 1$, a $\arg(\omega) = 2\pi/3$, to je $z_2 = z_1\omega$, $z_3 = z_2\omega = z_1\omega^2$, pa je $z_1 + z_2 + z_3 = z_1(1 + \omega + \omega^2) = 0$.

Da dokažemo obrat, pretpostavimo da za kompleksne brojeve važi relacija $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Tada je

$$\begin{aligned}
|z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) = z_1\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 = \\
&= 4r^2 - z_1\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 - z_2\overline{z}_2 = 4r^2 - (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) = \\
&= 4r^2 - |z_1 + z_2|^2 = 4r^2 - |z_3|^2 = 3r^2\,,
\end{aligned}$$

pa je $|z_1 - z_2| = r\sqrt{3}$. Analogno se dokazuje da je $|z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| = r\sqrt{3}$.

Kako je $|z_1z_2 - z_2z_3| = |z_2||z_3 - z_1| = r^2\sqrt{3}$, $|z_2z_3 - z_3z_1| = |z_3||z_1 - z_2| = r^2\sqrt{3}$ i $|z_3z_1 - z_1z_2| = |z_1||z_2 - z_3| = r^2\sqrt{3}$, to i kompleksni brojevi z_1z_2, z_2z_3, z_3z_1 pretstavljaju temena jednakostraničnog trougla sa središtem u koordinatnom početku. Primetimo da važi i obrat. Dokaz ove činjenice prepuštamo čitaocu.

Zadatak 4.3. *Nad stranicama trougla ABC konstruisani su pozitivno orijentisani jednakostranični trouglovi $AC'B, BA'C, CB'A$ tako da se nalaze u spoljašnosti trougla ABC. Dokazati da su težišta ovih trouglova temena jednakostraničnog trougla (Napoleonov problem).*

Rešenje: Neka su temena trougla ABC određena kompleksnim brojevima a, b, c. Ako su tačke A', B', C' određene kompleksnim brojevima a', b', c', tada je na osnovu Stava 4.2.

$$a + c'\varepsilon + b\varepsilon^2 = 0\,, \quad b + a'\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0\,, \quad c + b'\varepsilon + a\varepsilon^2 = 0\,.$$

Težišta trouglova $A'BC$, $AB'C$ i ABC' određena su prema Primeru 1.1. kompleksnim brojevima

$$a'' = \frac{1}{3}(a' + b + c)\,, \quad b'' = \frac{1}{3}(a + b' + c)\,, \quad c'' = \frac{1}{3}(a + b + c')$$

respektivno. Dokažimo da je $c'' + a''\varepsilon + b''\varepsilon^2 = 0$. Zaista,

$$\begin{aligned} 3(c'' + a''\varepsilon + b''\varepsilon^2) &= (a + b + c') + (a' + b + c)\varepsilon + (a + b' + c)\varepsilon^2 = \\ &= (b + a'\varepsilon + c\varepsilon^2) + (c + b'\varepsilon + a\varepsilon^2) + (a + c'\varepsilon + b\varepsilon^2) = 0\,, \end{aligned}$$

pa težišta trouglova $A'BC$, $AB'C$ i ABC' određuju temena jednakostraničnog trougla prema Stavu 4.2.

Zadatak 4.4. *Nad stranicama trougla ABC konstruisani su pravilni n-tougaonici, tako da sa unutrašnjošću trougla nemaju zajedničkih tačaka. Odrediti sve vrednosti prirodnog broja n za koje su centri n-tougaonika temena jednakostraničnog trougla.*

(Balkan Mathematical Olympiad 1990-Shortlist)

Rešenje: Označimo sa A_0, B_0, C_0, centre n-tougaonika koji su konstruisani nad stranicama BC, CA i AB respektivno. Malim slovima označimo kompleksne brojeve koji određuju tačke kompleksne ravni označene odgovarajućim velikim slovima. Neka je $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$. Kako su uglovi $\widehat{AC_0B}, \widehat{BA_0C}, \widehat{AB_0C}$ jednaki $2\pi/n$, to je

$$(*) \qquad a = c_0 + (b - c_0)\varepsilon\,, \quad b = a_0 + (c - a_0)\varepsilon\,, \quad c = b_0 + (a - b_0)\varepsilon\,.$$

Trougao $A_0B_0C_0$ biće jednakostraničan onda i samo ako je $a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 = a_0b_0 + b_0c_0 + c_0a_0$. Ako u ovoj jednakosti zamenimo a_0, b_0, c_0 iz $(*)$, dobićemo jednakost

$$(b-c\varepsilon)^2+(c-a\varepsilon)^2+(a-b\varepsilon)^2 = (b-c\varepsilon)(c-a\varepsilon)+(c-a\varepsilon)(a-b\varepsilon)+(a-b\varepsilon)(c-a\varepsilon)\,,$$

koja je ekvivalentna sa jednakosću

$$(1 + \varepsilon + \varepsilon^2)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] = 0\,.$$

Iz ove jednakosti sledi jednakost $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$, koja je ekvivalentna sa sledećom jednakosću $\varepsilon(1+2Re(\varepsilon))=0$. Stoga je $1+2Re\,\varepsilon=0$, pa je $\cos\frac{2\pi}{n}=-\frac{1}{2}$. No onda je $\frac{2\pi}{n}=\frac{2\pi}{3}$, pa je $n=3$, i to je jedina vrednost broja n za koju tačke A_0, B_0, C_0 čine temena jednakostraničnog trougla.

§5 Realan proizvod dva kompleksna broja

Skalarni proizvod vektora nam je poznat iz analitičke geometrije. U radu sa kompleksnim brojevima skalarnom proizvodu vektora odgovara pojam realnog proizvoda kompleksnih brojeva koji ne pretstavlja ništa drugo do skalarni proizvod vektora koji su određeni kompleksnim brojevima koji se množe.

Definicija 5.1. *Realan proizvod kompleksnih brojeva a i b, u oznaci $a\cdot b$, je realan broj određen kao*

$$a\cdot b := \frac{1}{2}(\overline{a}b+a\overline{b})\,.$$

Neka su A i B tačke određene kompleksnim brojevima $a=|a|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ i $b=|b|(\cos\psi+i\sin\psi)$. Lako je proveriti da je $a\cdot b=|a||b|\cos(\varphi-\psi)=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{AB}|\cos\widehat{AOB}$. Realan proizvod ima svojstva iskazana u sledećem stavu:

Stav 5.1. *Neka su a, b, c proizvoljni kompleksni brojevi. Realan proizvod dva kompleksna broja ima sledeća svojstva:*

(a) $a\cdot a=|a|^2$;
(b) $a\cdot b=b\cdot a$;
(c) $\overline{a\cdot b}=a\cdot b$;
(d) $(\alpha a)\cdot b=\alpha(a\cdot b)=a\cdot(\alpha b)$ za svako $\alpha\in\mathbb{R}$;
(e) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$;
(f) $(az)\cdot(bz)=|z|^2(a\cdot b)$;
(g) $a\cdot b=0$ onda i samo onda ako je $OA\perp OB$, gde su A i B tačke kompleksne ravni određene kompleksnim brojevima a i b.

Napomena: Već smo videli da realan proizvod kompleksnih brojeva a i b pretstavlja skalarni proizvod vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$. Međutim, realan proizvod kompleksnih brojeva ima još jedan veoma interesantan geometrijski smisao.

Naime, realan proizvod kompleksnih brojeva a i b jednak je potenciji koordinatnog početka O kompleksne ravni u odnosu na krug čiji je prečnik AB, gde su A i B tačke kompleksne ravni određene kompleksnim brojevima a i b. Zaista, kako je sredina M duži AB određena kompleksnim brojem $\frac{a+b}{2}$, potencija tačke O u odnosu na krug sa središtem u tački M i poluprečnikom $r = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}|a-b|$ jednaka je

$$\begin{aligned} OM^2 - r^2 &= \left|\frac{a+b}{2}\right|^2 - \left|\frac{a-b}{2}\right|^2 = \\ &= \frac{(a+b)(\overline{a}+\overline{b})}{4} - \frac{(a-b)(\overline{a}-\overline{b})}{4} = \frac{a\overline{b}+a\overline{b}}{2} = a\cdot b\,. \end{aligned}$$

Stav 5.2. *Neka su Tačke A, B, C, D tačke kompleksne ravni određene kompleksnim brojevima a, b, c, d. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(a) $AB \perp CD$;

(b) $(b-a)\cdot(c-d) = 0$;

(c) $\frac{b-a}{d-c} \in i\mathbb{R}\setminus\{0\}$

(d) $Re\left(\frac{b-a}{d-c}\right) = 0.$

Dokaz: $(a) \Leftrightarrow (b)$ Uočimo tačke $M(b-a)$ i $N(d-c)$. Tada su $OABM$ i $ODCN$ paralelogrami kod kojih će biti $OM\perp ON$ onda i samo onda ako je $AB\perp CD$, odn. onda i samo onda ako je $m\cdot n = (b-a)\cdot(d-c) = 0$.

Ekvivalencije $(b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$ neposredno slede iz definicije realnog prizvoda kompleksnih brojeva. ♣

Stav 5.3. *Središte kružnice opisane oko trougla ABC nalazi se u koordinatnom početku kompleksne ravni. Ako su temena A, B, C trougla ABC određena kompleksnim brojevima a, b, c respektivno, tada je ortocentar H tog trougla određen kompleksnim brojem $h = a + b + c$.*

Dokaz: Neka su A', B', C' podnožja normala konstruisanih iz temena A, B, C na naspramne stranice. Tačka $Z(z)$ će pripadati pravoj određenoj tačkama A i A' onda i samo onda ako je $ZA\perp BC$, odn. ako je $(z-a)\cdot(b-c) = 0$. Na sličan način zaključujemo da je $(z-b)\cdot(c-a) = 0$ i $(z-c)\cdot(a-b) = 0$. Stav će biti dokazan ako pokažemo da tačka određena kompleksnim brojem $h = a+b+c$ pripada pravama AA', BB' i CC'. Ona pripada pravoj određenoj tačkama A i A'. Zaista, kako je $(h-a)\cdot(b-c) = (b+c)\cdot(b-c) =$

$b \cdot b - c \cdot c = |b|^2 - |c|^2 = 0$. Slično se dokazuje da tačka M određena kompleksnim brojem h pripada pravama BB' i CC', što je i trebalo dokazati. ♣

Napomena: Ako su temena A, B, C trougla ABC, središte O kružnice opisane oko trougla ABC određeni kompleksnim brojevima a, b, c, o, onda je ortocentar H tog trougla određen kompleksnim brojem $h = a+b+c-2o$.

Zaista, neka je A' tačka na kružnici opisanoj oko trougla ABC dijametralno suprotna tački A. Tada je četvorougao $HBA'C$ paralelogram. Ako je $\{M\} = HA' \cap BC$, onda je

$$m = \frac{b+c}{2} = \frac{h+a'}{2} = \frac{h+2o-a}{2}\,, \text{ pa je } h = a+b+c-2o\,.$$

Zadatak 5.1. *Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao. Dokazati da je*

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 \tag{1}$$

onda i samo onda ako je $AC \perp BD$.

Rešenje: Na osnovu svojstava realnog proizvod kompleksnih brojeva jednakost (1) će važiti onda i samo onda ako je

$$(b-a)\cdot(b-a) + (d-c)\cdot(d-c) = (c-b)\cdot(c-b) + (a-d)\cdot(a-d)\,.$$

Ova jednakost ekvivalentna je sa sledećom

$$a \cdot b + c \cdot d = b \cdot c + d \cdot a\,,$$

a ova sa jednakosću

$$(c-a)\cdot(d-b) = 0\,,$$

koja je prema Stavu 5.1. ekvivalentna sa $AC \perp BD$. ♣

Zadatak 5.2. *Neka su M, N, P, Q, R, S sredine stranica AB, BC, CD, DE, EF, FA šestougla $ABCDEF$. Dokazati da je*

$$RN^2 = MQ^2 + PS^2 \tag{2}$$

onda i samo onda ako je $MQ \perp PS$.

Rešenje: Neka su temena šestougla određena kompleksnim brojevima a, b, c, d, e, f. Tada su tačke M, N, P, Q, R, S određene sledećim kompleksnim brojevima

$$m = \frac{a+b}{2}\,,\ n = \frac{b+c}{2}\,,\ p = \frac{c+d}{2}\,,\ q = \frac{d+e}{2}\,,\ r = \frac{e+f}{2}\,,\ s = \frac{f+a}{2}$$

respektivno. Jednakost (2) će važiti onda i samo onda ako je

$$\begin{aligned}(e+f-b-c)\cdot(e+f-b-c) = (d+e-a-b)\cdot(d+e-a-b)\,+&\\ +\,(f+a-c-d)\cdot(f+a-c-d)\,.&\end{aligned}$$

Ova jednakost ekvivalentna je sa jednakosću

$$(d+e-a-b)\cdot(f+a-c-d) = 0\,,$$

a ova prema Stavu 5.1. sa činjenicom da je $MQ \perp PS$.

Zadatak 5.3. *Neka je $A_1A_2\ldots A_n$ pravilan poligon upisan u kružnicu sa centrom u koordinatnom početku kompleksne ravni i poluprečnikom R. Dokazati da za proizvoljnu tačku M u kompleksnoj ravni važi sledeća jednakost:*

$$\sum_{k=1}^{n} MA_k^2 = n(OM^2 + R^2)\,.$$

Rešenje: Ne umanjujući opštost razmatranja, možemo pretpostaviti da su temena A_k zadatog poligona određena kompleksnim brojevima $R\varepsilon_k$, gde su ε_k n-ti koreni iz jedinice, $k = \overline{1,n}$. Ako je tačka M određena kompleksnim brojem m, onda je

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} MA_k^2 &= \sum_{k=1}^{n}(m - R\varepsilon_k)\cdot(m - R\varepsilon_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{n}(m\cdot m - 2R\varepsilon_k\cdot m + R^2\varepsilon_k\cdot\varepsilon_k) = \\ &= n|m|^2 - 2R\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\right)\cdot m + R^2\sum_{k=1}^{n}|\varepsilon_k|^2 = \\ &= n\cdot OM^2 + nR^2 = n(OM^2 + R^2)\,,\end{aligned}$$

jer je $\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k = 0$.

Napomena: Ako je tačka M na kružnici opisanoj oko poligona, onda je $\sum_{k=1}^{n} MA_k^2 = 2nR^2$.

Zadatak 5.4. *Neka je O središte kruga koji je opisan oko trougla ABC, neka je D srednja tačka duži AB i neka je E težište trougla ACD. Dokazati da su duži CD i OE normalne onda i samo onda ako je $AB = AC$.*
(Balkan Mathematical Olympiad, 1985)

Rešenje: Neka je trougao ABC u kompleksnoj ravni čiji se koordinatni početak nalazi u tački O i neka su a, b, c kompleksni brojevi koji određuju temana trougla ABC.Tada su

$$d = \frac{a+b}{2}, \quad e = \frac{a+c+d}{3} = \frac{3a+b+2c}{6}$$

kompleksni brojevi koji određuju tačke D i E respektivno. Neka je R poluprečnik kruga koji je opisan oko trougla ABC. Duž CD će biti upravna na duž OE onda i samo onda ako je realan proizvod kompleksnih brojeva e i $d - c$ jednak nuli: $e \cdot (d - c) = 0$. Ova jednakost će biti zadovoljena onda i samo onda ako je $(a+b-2c)\cdot(3a+b+2c) = 0$. Kako je $a \cdot a = b \cdot b = c \cdot c = R^2$, poslednja jednakost ekvivalentna je sa jednakošću $a \cdot b = a \cdot c$. S druge strane je $AB = AC$ onda i samo onda ako je $|b - a|^2 = |c - a|^2$, odnosno ako je $(b - a) \cdot (b - a) = (c - a) \cdot (c - a)$, što je ponovo ekvivalentno sa $a \cdot b = a \cdot c$. Stoga je $CD \perp OE$ onda i samo onda ako je $AB = AC$.

§6 Kompleksan proizvod dva kompleksna broja

Vektorski proizvod vektora ima važnu ulogu u vektorskoj algebri zbog raznovrsnih primena u različitim oblastima matematike. Kompleksan proizvod dva kompleksna broja je analogon tom proizvodu.

Definicija 6.1. *Kompleksan broj*

$$a \times b := \frac{1}{2}(\overline{a}b - a\overline{b})$$

nazivamo kompleksnim proizvodom kompleksnih brojeva a i b.

Neka su A i B tačke određene kompleksnim brojevima $a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ i $b = |b|(\cos\psi + i\sin\psi)$. Lako je proveriti da je $|a \times b| = |a||b|\sin(\varphi - \psi) = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{AB}|\sin\widehat{AOB} = 2P_{AOB}$. Realan proizvod ima svojstva iskazana u sledećem stavu:

Stav 6.1. *Neka su a, b, c kompleksni brojevi. Tada kompleksan proizvod dva kompleksna broja ima sledeća svojstva:*

(a) $\overline{a \times b} = -a \times b$;

(b) $a \times b = 0$ onda i samo onda ako je $a = 0$ ili je $b = 0$ ili je $a = \lambda b$, gde je $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(c) $a \times b = -b \times a$;

(d) $\alpha(a \times b) = (\alpha a) \times b = a \times (\alpha b)$ za svako $\alpha \in \mathbb{R}$;

(e) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$;

(f) Ako su $A(a)$ i $B(b)$ dve različite tačke različite od $O(0)$, tada je $a \times b = 0$ onda i samo onda ako su O, A, B kolinearne tačke.

Napomena: (a) Neka su $A(a)$ i $B(b)$ dve različite tačke u kompleksnoj ravni različite od koordinatnog početka. Kompleksan proizvod brojeva a i b ima sledeći geometrijski smisao:

$$a \times b = \begin{cases} 2iP_{AOB}\,, & \text{ako je trougao } OAB \text{ pozitivno orijentisan}\,, \\ -2iP_{AOB}\,, & \text{ako je trougao } OAB \text{ negativno orijentisan}\,. \end{cases}$$

Zaista, ako je trougao OAB pozitivno orijentisan, onda je

$$\begin{aligned} 2iP_{OAB} &= i \cdot OA \cdot OB \cdot \sin(\widehat{AOB}) = \\ &= i|a| \cdot |b| \cdot \sin\left(\arg\frac{b}{a}\right) = i \cdot |a| \cdot |b| \cdot Im\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{|a|}{|b|} = \\ &= \frac{1}{2}|a|^2\left(\frac{b}{a} - \frac{\overline{b}}{\overline{a}}\right) = \frac{1}{2}(\overline{a}b - a\overline{b}) = a \times b\,. \end{aligned}$$

U protivnom, trougao OBA je pozitivno orijentisan, pa je

$$2i \cdot P_{OBA} = b \times a = -a \times b.$$

(b) Neka su $A(a)$, $B(b)$ i $C(c)$ tri različite tačke u kompleksnoj ravni. Tada je

$$P_{ABC} = \begin{cases} \dfrac{1}{2i}(a \times b + b \times c + c \times a)\,, \\ \text{ako je } ABC \text{ pozitivno orijentisan}\,, \\ -\dfrac{1}{2i}(a \times b + b \times c + c \times a)\,, \\ \text{ako je } ABC \text{ negativno orijentisan}\,. \end{cases} \tag{3}$$

Jednostavnim transformacijama se dobija i sledeća formula za površinu trougla:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}Im(\overline{a}b + \overline{b}c + \overline{c}a)\,,$$

ako je pozitivno orijentisan.

Da pokažemo formulu (3), izvršimo translaciju trougla ABC za vektor $-\overrightarrow{OC}$. Trougao ABC se ovom translacijom preslikava u trougao $A'B'O'$ čija su temena određena kompleksnim brojevima $a-c, b-c, 0$ respektivno. Trouglovi ABC i $A'B'O'$ su podudarni i istih orijentacija. Ako je trougao ABC pozitivne orijentacije, tada je

$$P_{ABC} = P_{O'A'B'} = \frac{1}{2i}(a-c)\times(b-c) = \frac{1}{2i}(a\times b + b\times c + c\times a)\,,$$

što je i trebalo dokazati. Slično se dokazuje i druga formula u (3).

Stav 6.2. *Neka su $A(a)$, $B(b)$ i $C(c)$ tri različite tačke u kompleksnoj ravni. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(a) Tačke A, B, C su kolinearne;
(b) $(b-a)\times(c-a)=0$;
(c) $a\times b + b\times c + c\times a = 0$.

Dokaz: Tačke A, B, C su kolinearne onda i samo onda ako je $P_{ABC}=0$, tj. ako je $a\times b + b\times c + c\times a = 0$. Poslednja jednakost ekvivalentna je sa jednakošću $(b-a)\times(c-a)=0$. ♣

Stav 6.3. *Neka su $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ i $D(d)$ četiri tačke od kojih nikoje tri nisu kolinearne. Tada je $AB\|CD$ onda i samo onda ako je $(b-a)\times(d-c) = 0$.*

Dokaz: Neka su $M(m)$ i $N(n)$ tačke izabrane tako da su $OABM$ i $OCDN$ paralelogrami. Tada je $m=b-a$ i $n=d-c$. Duži AB i CD su paralelne onda i samo onda ako su takve duži OM i ON, odn. ako su tačke O, A, B kolinearne, što je ekvivalentno uslovu da je $0 = m\times n = (b-a)\times(d-c)$. ♣

Zadatak 6.1. *Na stranicama AB i AC trougla ABC izabrane su tačke D i E respektivno tako da je $AD/AB = AE/AC = 3/4$. Neka je E' tačke na pravoj određenoj tačkama B i E sa one strane tačke E sa koje nije tačka B tako da je $EE' = 3BE$, a D' neka je tačka na pravoj određenoj tačkama C i D sa one strane tačke D sa koje nije tačka C tako da je $DD' = 3CD$. Dokazati:*

(a) da su tačke D', A, E' kolinearne;
(b) da je $AD' = AE'$.

Rešenje: Tačke D, E, D', E' određene su kompleksnim brojevima $d = \dfrac{a+3b}{4}$, $e = \dfrac{a+3c}{4}$, $e' = 4e - 3b = a + 3c - 3b$ i $d' = 4d - 3c = a + 3b - 3c$ respektivno.

(a) Kako je

$$(a - d') \times (e' - d') = (3c - 3b) \times (6c - 6b) = 18(c - b) \times (c - b) = 0\,,$$

to su prema Stavu 6.2. tačke D', A i E' kolinearne.

(b) Kako je

$$\frac{AD'}{D'E'} = \left|\frac{a - d'}{e' - d'}\right| = \frac{1}{2}\,,$$

to je tačka A sredina duži $D'E'$.

Zadatak 6.2. *Neka je $ABCDE$ konveksan petougao, a M, N, P, Q, X, Y sredine duži BC, CD, DE, EA, MP, NQ respektivno. Dokazati da je $XY \| AB$.*

Rešenje: Neka su temena A, B, C, D, E zadatog petougla određena kompleksnim brojevima a, b, c, d, e respektivno. Tada su tačke M, N, P, Q, X, Y određene kompleksnim brojevima

$$m = \frac{b+c}{2}\,,\quad n = \frac{c+d}{2}\,,\quad p = \frac{d+e}{2}\,,\quad q = \frac{e+a}{2}\,,$$
$$x = \frac{b+c+d+e}{4}\,,\quad y = \frac{c+d+e+a}{4}\,,$$

respektivno, pa je kompleksan proizvod vektora $y - x$ i $b - a$

$$(y - x) \times (b - a) = -\frac{1}{4}(b - a) \times (b - a) = 0\,,$$

što dokazuje da $XY \| AB$.

Zadatak 6.3. *Ako su temena pozitivno orijentisanog konveksnog poligona $A_1A_2\ldots A_n$ određena kompleksnim brojevima $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dokazati da je*

$$P_{A_1A_2\ldots A_n} = \frac{1}{2} Im(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \ldots + \overline{a_n}a_1)\,.$$

Rešenje: Neka je $M(m)$ proizvoljna tačka u unutrašnjosti poligona $A_1A_2\ldots A_n$, pri čemu je $A_{n+1} = A_1$. Tada je

$$P_{A_1A_2\ldots A_n} = \sum_{k=1}^{n} P_{MA_kA_{k+1}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} Im(\overline{m}a_k + \overline{a_k}a_{k+1} + \overline{a_{k+1}}m) =$$

$$= \frac{1}{2} Im\Big(\sum_{k=1}^{n} \overline{a_k} a_{k+1}\Big) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} Im(\overline{m} a_k + \overline{a_{k+1}} m) =$$
$$= \frac{1}{2} Im\Big(\sum_{k=1}^{n} \overline{a_k} a_{k+1}\Big) + \frac{1}{2} Im\left(\overline{m}\sum_{k=1}^{n} a_k + m\sum_{k=1}^{n}\overline{a_k}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \overline{a_k} a_{k+1}\,,$$

jer je $Im(\overline{m}a + m\overline{a}) = 0$ za svaka dva kompleksna broja m i a.

Napomena: Iz prethodne formule neposredno sledi da su tačke $A_1(a_1)$, $A_2(a_2)$,...,$A_n(a_n)$ kolinearne onda i samo onda ako je

$$Im(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \ldots + \overline{a_n}a_1) = 0\,.$$

Zadatak 6.4. *Neka je $A_1A_2\ldots A_n$, $n \geqslant 5$, konveksan poligon. Ako su B_k sredine stranica A_kA_{k+1} poligona, $k = 1, 2, \ldots, n$, $A_{n+1} = A_1$, dokazati da je $P_{B_1B_2\ldots B_n} \geqslant \frac{1}{2}P_{A_1A_2\ldots A_n}$.*

Rešenje: Neka su temena A_k poligona $A_1A_2\ldots A_n$ određena kompleksnim brojevima a_k. Tada su temena B_k poligona $B_1B_2\ldots B_n$ određena kompleksnim brojevima $b_k = (a_k{+}a_{k+1})/2$, $k = \overline{1,n}$. Pri tome je poligon $B_1B_2\ldots B_n$ konveksan i iste orijentacije kao i poligon $A_1A_2\ldots A_n$. Na osnovu Zadatka 6.3. imamo da je

$$\begin{aligned}
P_{B_1B_2\ldots B_n} &= \frac{1}{2} Im\Big(\sum_{k=1}^{n} \overline{b_k} b_{k+1}\Big) = \\
&= \frac{1}{8} Im\Big(\sum_{k=1}^{n} (\overline{a_k} + \overline{a_{k+1}})(a_{k+1} + a_{k+2}\Big) = \\
&= \frac{1}{8} Im\Big(\sum_{k=1}^{n} \overline{a_k} a_{k+1}\Big) + \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{8}\Big(\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{k+1}} a_{k+2}\Big) + \frac{1}{8} Im\Big(\sum_{k=1}^{n} \overline{a_k} a_{k+2}\Big) = \\
&= \frac{1}{2}P_{A_1A_2\ldots A_n} + \frac{1}{8} Im\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{a_k} a_{k+2}\right) = \\
&= \frac{1}{2}P_{A_1A_2\ldots A_n} + \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n} Im(\overline{a_k} a_{k+2}) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} P_{A_1 A_2 \ldots A_n} + \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{n} OA_k \cdot OA_{k+2} \sin \widehat{A_k O A_{k+2}} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2} P_{A_1 A_2 \ldots A_n} \,,$$

pri čemu smo koristili činjenicu da je $\sin \widehat{A_k O A_{k+2}} \geqslant 0$ za svako k.