Univerzitet Singidunum

Miroslav Lutovac

ELEKTROTEHNIKA

Beograd, 2015.

UNIVERZITET SINGIDUNUM

Miroslav Lutovac

ELEKTROTEHNIKA

Prvo izdanje

Beograd, 2015.

ELEKTROTEHNIKA

Autor:
dr Miroslav Lutovac

Recenzenti:
dr Miroslav Dukić
dr Vladimir Mladenović

Izdavač:
UNIVERZITET SINGIDUNUM
Beograd, Danijelova 32
www.singidunum.ac.rs

Za izdavača:
dr Milovan Stanišić

Priprema za štampu:
Miroslav Lutovac

Dizajn korica:
Aleksandar Mihajlović

Godina izdanja:
2015.

Tiraž:
300 primeraka

Štampa:
Mobid, Loznica

ISBN: 978-86-7912-611-5

1 Uvod

Ovaj udžbenik nastao je tokom predavanja prvim generacijama studenata studijskog programa Elektrotehnika i računarstvo na Tehničkom fakultetu Univerziteta Singidunum, prvom privatnom akreditovanom studijskom programu iz oblasti elektrotehnike u Srbiji. Predavanja su bila bazirana na skriptama profesora Miodraga Popovića (Osnovi elektronike za studente Odseka za softversko inženjerstvo, na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Beogradu). Ovaj udžbenik većim delom tematski i sadržajno prati udžbenik profesora Miodraga Popovića.

Cilj predmeta jeste sticanje osnovnih znanja iz elektrotehnike, koja se kasnije koriste za savladavanje gradiva iz oblasti analogne i digitalne elektronike, električnih merenja i računarske elektronike. Ishod predmeta treba da obezbedi sticanje teorijskih i praktičnih znanja o elektrostatičkim i elektro-magnetnim pojavama, analognim elektronskim komponentama, sposobnost rešavanja osnovnih pasivnih i aktivnih analognih električnih kola sa jednosmernom i naizmeničnim strujama, teorijske osnove osnovnih mernih kola i njihova praktična primena kao i poznavanje osnovnih računarskih komponenti.

Tradicionalno, za uspešno savladavanje gradiva iz oblasti elektrotehnike, potrebno je odlično znanje iz matematike, pre svega rad sa integralima, sistemima linearnih jednačina, kompleksnim brojevima i diferencijalnim jednačinama. Danas postoje brojni matematički softverski alati, kao što su MATLAB i Mathematica, koje studenti i inženjeri elektrotehnike i računarstva mogu da koriste za rešavanje složenih matematičkih problema. Umesto da se studenti iscrpljuju na sticanju rutina u rešavanju matematičkih problema, u ovom kursu se prezentuju osnovne teorije elektrotehnike, a studentima se objašnjava kako da to znanje iskoriste u postavci problema sa kojima mogu da se sretnu u praksi. Najveći broj studenata se opredeljuje za izbornu opciju Softversko inženjerstvo gde se specijalizuju za izradu softverskih rešenja. Neophodno je da se što pre dobiju osnovna znanja iz elektrotehnike kako bi se već od prve godine studenti više posvetili osnovnim tehnikama programiranja. Iako se tradicionalna usmerenja kao što su elektronika, telekomunikacije, energetika i automatika zasnivaju na hardverskim rešenjima i komponentistici, potrebe kompanija koje zapošljavaju inženjere elektrotehnike i računarstva su pre svega u oblasti programabilnog hardvera i primene računara. Stoga je i izborna opcija Računarska tehnika i elektronika koncipirana na poznavanju programabilnih analognih i digitalnih električnih kola i sistemskom pristupu. Izborna opcija Elektronske komunikacije obuhvataju tradicionalne telekomunikacije u kombinaciji sa računarskom tehnikom i specifičnim uslovima u kojima rade mobilni uređaji. Izborna opcija Energetska efikasnost treba da obezbedi osnovna znanja za upravljanje elektro-energetskim sistemima. U osnovi svih izbornih opcija jeste poznavanje specifičnog hardvera i tehnika programiranja, tako da se ova znanja stiču kroz obavezne predmete, a posebna specifična znanja kroz izborne predmete. Obim gradiva koje studenti treba da osvoje kroz obavezne i izborne predmete treba da se savladaju za četiri godine. Stoga je i kurs Elektrotehnike prilagođen kao bazičan za uspešno ovladavanjem znanjima neophodnim za kompetencije inženjera elektrotehnike i računarstva. Studenti se upućuju da koriste srodnu literaturu koja se koristi na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Beogradu i drugim tehničkim fakultetima (kao što je Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu). Savremeni pristup izučavanju elektrotehnike može se naći u Electrical Engineering - Principles and Applications, peto izdanje, autora Allan R. Hambley, Department of Electrical and Computer Engineering, Michigan Technological University, Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 2011. Od literature na srpskom jeziku preporučuje se udžbenik profesora Miodraga Popovića, Osnovi elektronike za studente Odseka za softversko inženjerstvo, na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Beogradu, 2006. Studenti koji žele da detaljnije izučavaju teoriju elektrotehnike mogu da koriste udžbenik profesora Dragana Kandića, Elektrotehnika, Mašinski fakultet, Beograd, 2008 i Elektrotehnika, skripta, 2013. Odličan pregled osnovnih elektronskih komponenti i sistema može se naći u udžbeniku profesora Spasoja Tešića i profesora Dragana Vasiljevića, Osnovi elektronike, Beograd, 2009. Naprednim studentima se preporučuje da koriste udžbenike profesora Antonija Đorđevića, Osnovi elektrotehnike, koji su štampani u četiri posebne celine Elektrostatika, Stalne struje, Elektromagnetizam i Kola promenljivih struja.

Ovaj udžbenik je koncipiran tako da mogu da ga koriste i oni koji žele da se upoznaju detaljnije sa elektrotehnikom a nemaju visok nivo matematičkog znanja. Elektronika je prisutna u svim sferama današnjeg života i razvoj novih uređaja i sistema nije moguć bez poznavanja osnovnih principa elektrotehnike. Kako su savremeni tehnološki problemi veoma kompleksni i njihovo rešavanje zahteva timski rad stručnjaka iz raznih oblasti, a koje ne može da ima jedan član tima, potrebni su timovi koji se sastoje od istraživača sa komplementarnim znanjima ali i osnovnim znanjima koje imaju ostali članovi tima. Da bi se savladala sva znanja koja su se tradicionalno izučavala u okviru klasičnih kurseva elektrotehnike, ali i nova znanja koje nameće sve brži razvoj tehnologija, školovanje bi trebalo da traje znatno duže od četiri godine. Kako se u međuvremenu pojavljuju nove tehnologije i softverski alati, predugo trajanje studiranja bi dovelo da neka od savladanih gradiva više nisu aktuelna. Stoga je ovaj kurs zamišljen da pruži osnovna znanja da bi se pratili srodni predmeti u skladu sa željenom specijalizacijom i potrebama budućih inženjera, i istovremeno dovoljnim nivoom znanja da se dodatno obrade one lekcije koje su u skladu sa potrebama rada budućih inženjera. Timski rad i komplementarnost znanja postaju osnovni zahtev savremenog poslovanja upravo da bi svako od članova tima mogao dodatno da se specijalizuje za određenu oblast. U rešavanju problema koji zahtevaju znanja iz elektrotehnike, da bi se olakšala saradnja inženjera različitih specijalnosti, svako od članova tima treba da ima i elementarna znanja iz elektrotehnike, što će omogućiti da se bolje razume suština problema koji se rešava, kao i ograničenja u rešavanju problema u celini.

Neke od oblasti u kojima budući inženjeri mogu da rade su auto-elektronika gde se koriste elektronski uređaji za nadzor i upravljanje, uređaji koji se koriste u domaćinstvima sa složenim funkcijama koje se realizuju posebnim elektronskim komponentama. Mobilni telefoni su napravili revoluciju u telekomunikacijama, jer skoro svaki mobilni uređaj objedinjuje brojne funkcije korisne za zabavu ali i poslovanje. Uvođenje računara i Interneta u kuće pretvara ceo svet u jednu zajednicu koja razmenjuje privatne podatke ali istovremeno ostvaruje sveprisutnost.

2 Elektrostatika

Osnovni zadatak savremene elektrotehnike jeste da pruži osnovna znanja iz oblasti elektrotehnike, kao što su razumevanje pojava elektrostatičkih i elektromagnetskih pojava, definisanje osnovnih pojmova iz oblasti komponenti električnih kola, rešavanja složenih električnih kola za različite vrste pobudnih signala, kao i osnovne pojmove o elektronskim komponentama i razumevanja rada složenijih elektronskih sklopova koja se najčešće koriste u praksi.

Elektrotehnika se uobičajeno bavi električnim opterećenjima (naelektrisanjima) i silama koje deluju na njih, njegovim kretanjem i efektima tog kretanja. Za nepokretno naelektrisanje koristi se termin statičko naelektrisanje. Pojave koje nastaju sa pokretnim naelektrisanjima se opisuju terminima električna struja. Efekti kretanja naelektrisanja opisuju se u elektromagnetici.

Teorija elektrotehnike je nastala tumačenjem eksperimenata i uočavanjem pojava u prirodi. Iako se polazi od modela atoma i elementarnih čestica, pojave se objašnjavaju na primerima većeg broja čestica i njihovo združeno dejstvo, zato što bi matematički model bio previše složen ako bi se istovremeno posmatrao uticaj svake čestice na sve čestice iz njenog okruženja i na okolinu. U velikom broju slučajeva, kao na primer u analizi rada tranzistora, nemoguće je dati tačne vrednosti za analizirane veličine, već se posmatraju usrednjena dejstva.

2.1 Električno opterećenje

Prva saznanja o elektricitetu potiču iz antičkog doba kada je uočena pojava da ćilibar ima osobinu da privlači lake deliće materija nakon što se protrlja vunenom tkaninom. Za telo koje ima ovu osobinu kaže se da je naelektrisano. Kao najupečatljiviji primer efekta elektriciteta jeste sevanje i udar groma koji može biti smrtonosan na ljude koji su njime pogođeni, ali isto tako i oštećenje elektronskih komponenti koje dodirne naelektrisana osoba, ili peckanje metalnih vrata koja dodirne osoba koja nosi vunenu odeću. Postavljanje gromobrana na stambene zgrade, korišćenje anti-elektrostatičkih podloga u fabrikama poluprovodničkih komponenti i uređaja, su samo neki primeri da se svakodnevno srećemo sa pojavom elektriciteta.

Da bi razumeli pojavu elektriciteta, pođimo od danas opšteprihvaćenog modela atoma koji se sastoji od protona i neutrona u jezgru atoma, i elektrona koji kruže po različitim orbitama oko tog jezgra. Ako uspemo da nateramo jedan elektron da napusti svoju orbitu kojom je kružio oko jezgra i udalji se od atoma, tada će atom imati višak pozitivnog naelektrisanja, a elektron će se ponašati kao da ima jedinično negativno naelektrisanje. Da bi atom ponovo postao električno neutralan, pojaviće se privlačne sile koje će težiti da privuku elektron koji se nađe u blizini atoma. Istovremeno, elektron će delovati na elektrone iz okruženja. Prema tome, postoje dva tipa naelektrisanja, negativno i pozitivno naelektrisanje. Dva naelektrisanja se međusobno odbijaju ako su istog polariteta (dva pozitivna ili dva negativna naelektrisanja), a međusobno privlače ako su suprotnog polariteta (jedno pozitivno i jedno negativno naelektrisanja). Grupa od N elektrona ponašaće se kao zapremina koja ima N puta veće naelektrisanje od naelektrisanja jednog elektrona, a grupa od N atoma koji imaju manjak elektrona u svojoj orbiti ponašaće se kao zapremina koja ima N puta veće pozitivno jedinično naelektrisanje. Električno opterećenje je fundamentalno svojstvo materije koje se ne može se stvoriti niti uništiti. To znači da ako se naelektrisanje odstrani sa jednog mesta, ono se mora pojaviti na nekom drugom mestu.

Električno opterećenje elektrona je najmanje naelektrisanje koje postoji i naziva se elementarno naelektrisanje ili kvant naelektrisanja. Naelektrisanje jezgra kome nedostaje jedan elektron u orbiti ima istu količinu naelektrisanja kao elektron ali je ono pozitivno. Atom kome nedostaje elektron u orbiti i elektron koji se nalazi u blizini ovakvog atoma imaju isto svojstvo da je električki neutralan kao i kada elektron zauzme svoje mesto u orbiti atoma. Ako N elektrona pređe na drugo telo, kao u slučaju vunene tkanine i ćilibara, tada se jedno telo ponaša kao da ima negativno naelektrisanje N elektrona, a drugo telo ima isto toliko pozitivno naelektrisanje.

Uobičajeni simbol za opterećenje je veliko slovo Q a jedinica je Kulon (C). Apsolutna vrednost električnog opterećenje jednog elektrona je e =1,602×10^{-19} C. U nekim knjigama se koristi malo slovo q.

Postoje dve vrste naelektrisanja: pozitivno i negativno. Minimalna apsolutna vrednost naziva se elementarno naelektrisanje i iznosi 1,602×10^{-19} C. C je jedinica naelektrisanja koja se naziva Kulon. Elementarne čestice su elektron (ima negativno naelektrisanje), proton (ima pozitivno naelektrisanje, i neutron (električki je neutralan). Naelektrisanja istog tipa (ili pozitivna ili negativna) se odbijaju, a naelektrisanja različitog tipa (jedno pozitivni i jedno negativno) se privlače. Na tela u prirodi može da se prenese količina elektriciteta, i kaže se da tela mogu da se naelektrišu. Ako telo ima višak čestica jednog znaka kaže se da je telo naelektrisano. Za telo koje ima n_p protona i n_e elektrona kaže se da je je njegovo naelektrisanje $Q=(n_p - n_e)e$. Ako je broj elektrona veći od broja protona tada je telo negativno naelektrisano, a ako je broj elektrona manji od broja protona tada je telo pozitivno naelektrisano. Svako telo koje ima algebarsku sumu naelektrisanja jednaku nuli, a to je kada je broj elektrona jednak broju protona, naziva se električki neutralno.

2.2 Sila između dva tačkasta naelektrisanja

Dva naelektrisanja, Q_1 i Q_2, koja su dovoljno malih dimenzija u odnosu na njihovo rastojanje nazivaju se tačkasta naelektrisanja. Sila između dva tačkasta naelektrisanja proporcionalno je proizvodu naelektrisanja, Q_1 i Q_2, a obrnuto proporcionalno kvadratu rastojanja između ova dva tačkasta naelektrisanja:

$$F_c = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2} \tag{1}$$

Sila koja je iskazana relacijom (1) naziva se Kulonova sila. Sila deluje u centru naelektrisanja i ima pravac koji se poklapa sa pravom linijom koja prolazi kroz dve tačke u kojima su centri naelektrisanja; sila između opterećenja je odbojna ako su opterećenja istog tipa, a privlačna ako su suprotnog tipa. Ovaj opis vektora sile naziva se Kulonov zakon i izveden je Kulonovim eksperimentom. U vakuumu je konstanta proporcionalnosti k = 8,99×10^9 Nm^2/C^2, a približno istu vrednost ima i u vazduhu. Uobičajeno je da se faktor proporcionalnosti k piše korišćenjem dielektrične konstante vakuuma ε_0 (naziva se i permitivnost vakuuma), koja iznosi približno ε_0=8,8542×10^{-12} farada po metru (F/m), a koja se češće koristi umesto jedinice koja odgovara formuli (1) a to je C^2/Nm^2 (F je Farad, jedinica za kapacitivnost)

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \tag{2}$$

Kulonov zakon je jednostavan kada se naelektrisanja nalaze na istoj pravoj, i kada sile imaju algebarski oblik, mogu da se sabiraju ili oduzimaju

Kada postoji više tačkastih naelektrisanja, sile se predstavljaju kao vektori. Sile se vektorski i sabiraju u centru tačkastog naelektrisanja, na primer Q_1, gde se izračunava intenzitet sile kojom ostala naelektrisanja deluju na Q_1. Sila se vektorski predstavlja intenzitetom definisanim sa (1) i vektorom $\vec{r}_{12}$ usmerenim od naelektrisanja Q_1 ka naelektrisanju Q_2, umesto koga može da se koristi jedinični vektor (ort) $\vec{r}_{012}$

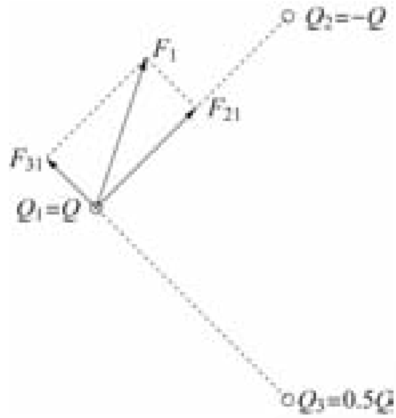
$$\vec{F}_{12} = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\vec{r}_{012} \tag{3}$$

U slučaju da na naelektrisanje Q_1 deluju sile većeg broja drugih naelektrisanja (Q_2, Q_3, Q_4, ..., Q_n), tada je rezultujuća sila koja deluje na tačkasto naelektrisanje Q_1, jednaka vektorskom zbiru svih sila

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} + \ldots + \vec{F}_{n1} \tag{4}$$

Važno je da se vodi računa da naelektrisanja (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, ..., Q_n), imaju pozitivnu ili negativnu vrednost, Proizvod dve pozitivne ili dve negativne vrednosti naelektrisanja je pozitivan i tada je i smer vektora sile u smeru vektora $\vec{r}_{012}$, odnosno sila je odbojna. U slučaju da je jedno naelektrisanje pozitivno a drugo negativno, rezultat proizvoda dva naelektrisanja je negativan, i tada je smer vektora sile u smeru vektora $-\vec{r}_{012}$, što znači da je sila privlačna. Jedinični vektor $-\vec{r}_{012}$ označava vektor suprotnog smera od $\vec{r}_{012}$, a intenzitet jediničnog vektora je jednak jedinici, $\left|\vec{r}_{012}\right| = 1$.

Na slici 2.1, naelektrisanje Q_2 koje je suprotnog znaka od Q_1 deluje silom koja privlači naelektrisanje Q_1 ka Q_2. Istovremeno, naelektrisanje Q_3 koje je istog znaka kao Q_1 deluje silom koja odbija naelektrisanje Q_1 od Q_3, pri čemu je intenzitet sile polovina sile kojom naelektrisanje Q_2 deluje na Q_1, zato što je i Q_3 polovina Q_2. Rezultantna sila F_1 je vektorski zbir ove dve sile, F_{21} i F_{31}.



Slika 2.1. Rezultantna sila $\vec{F}_1$ kojom dva tačkasta naelektrisanja Q_2=-Q i Q_3=0.5Q deluju na tačkasto naelektrisanje Q_1 =Q, (rezultantna sila $\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$).

Na isti način se može odrediti rezultantna sila kojom naelektrisanja Q_1 i Q_3 deluju na naelektrisanje Q_2, ($\vec{F}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}$), kao i sila kojom naelektrisanja Q_1 i Q_2 deluju na naelektrisanje Q_3, ($\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$).

2.3 Električno polje

Posmatrajmo telo koje je veoma malo, po dimenzijama i po naelektrisanju, koje je pozitivno naelektrisano sa Q_p, toliko malo da se može zanemariti njegov uticaj na okolna naelektrisana tela. Ovo naelektrisanje Q_p se naziva probno opterećenje ili probno punktualno opterećenje. Sva okolna naelektrisana tela delovaće prema Kulonovom zakonu na ovo probno opterećenje. Ako Kulonovu silu koja deluje na ovo opterećenje podelimo sa njegovim naelektrisanjem, tada dobijamo vektor koji predstavlja uticaj svih okolnih naelektrisanih tela na ovo naelektrisanje, a koji se naziva vektor jačine električnog polja, ili pojednostavljeno električno polje $\vec{E}$

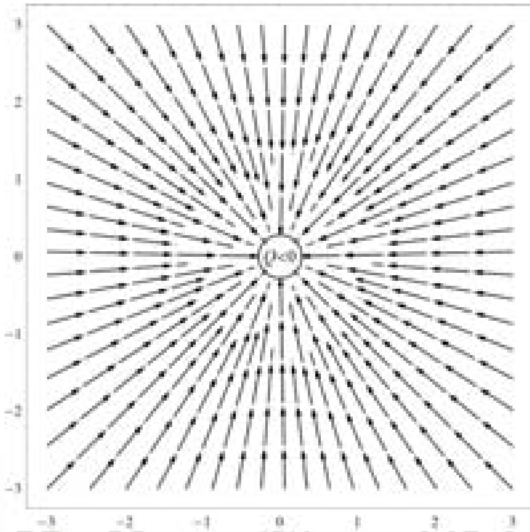
$$\vec{E} = \frac{\vec{F_c}}{Q_p} \tag{5}$$

Jedinica ove veličine je N/C (njutn po kulonu) prema (5), ali se u praksi češće koristi jedinica V/m (volt po metru).

Polazeći od izraza za Kulonovu silu (3) i izraza za električno polje (5), dobija se električno polje oko probnog naelektrisanja Q_p, koje stvara tačkasto naelektrisanje Q:

$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = k\frac{Q}{r^2}\vec{r}_0 \tag{6}$$

Vektor $\vec{r}$ je vektor položaja tačke u kojoj se određuje električno polje u odnosu na tačkasto naelektrisanje koje stvara to polje, a jedinični vektor $\vec{r}_0$ je ort vektora $\vec{r}$ koji je usmeren od izvora polja tačkastog naelektrisanja ka tački u kojoj se računa polje. Slika 2.2. ilustruje primer električnog polje koje stvara negativno usamljeno tačkasto opterećenje, tako da su linije polja radijalne oko tačkastog naelektrisanja sa smerom ka naelektrisanju.



Slika 2.2. Električno polje koje stvara negativno usamljeno tačkasto opterećenje.

Slika 2.3. ilustruje primer električnog polje koje stvara pozitivno usamljeno tačkasto opterećenje, tako da su linije polja ponovo radijalne oko tačkastog naelektrisanja sa smerom od naelektrisanja.

Električno polje usamljenog tačkastog naelektrisanja Q je radijalno, a intenzitet mu je obrnuto proporcijalan kvadratu rastojanja

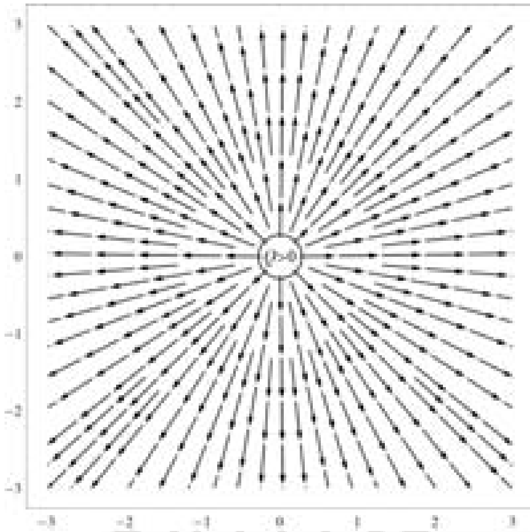
$$E = k\frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \tag{7}$$

Polje ne raste beskonačno kada se tačka posmatranja približava tački u kojoj je tačkasto naelektrisanje Q, zato što se podrazumeva da je rastojanje između tačkastog naelektrisanja i tačke u kojoj se određuje električno polje znatno veće od dimenzija tačkastog naelektrisanja.

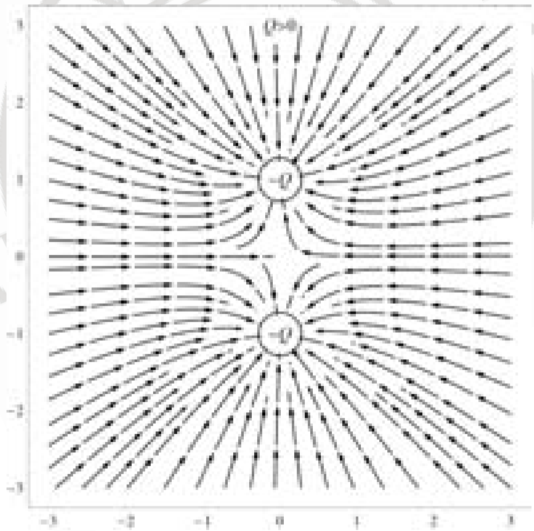
U slučaju da na probno naelektrisanje deluju sile većeg broja drugih naelektrisanja (Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_n), tada je rezultujuće polje koje deluje na probno naelektrisanje Q_p, odnosno u tački u kojoj se računa električno polje, jednako vektorskom zbiru svih polja

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + ... + \vec{E}_n \tag{8}$$

Važno je da se vodi računa da naelektrisanja Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_n mogu biti pozitivna i negativna. Od toga zavisi smer vektora električnog polja svakog pojedinačnog naelektrisanja Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_n.



Slika 2.3. Električno polje koje stvara pozitivno usamljeno tačkasto opterećenje.



Slika 2.4. Električno polje koje stvaraju dva negativna tačkasta opterećenja.

Slika 2.4. ilustruje primer električnog polje koje stvaraju dva negativna tačkasta opterećenje, tako da su linije polja ponovo radijalne oko tačkastih naelektrisanja sa smerom ka naelektrisanjima, ako se posmatra sa udaljenosti koje je znatno veće od rastojanja tačkastih naelektrisanja. Kada se posmatra polje koje je blizu naelektrisanja, tada se može videti uticaj naelektrisanja, s tim da je između naelektrisanja polje jednako nuli zato što polje koje stvara jedno naelektrisanje se poništava poljem koje stvara drugo naelektrisanje.

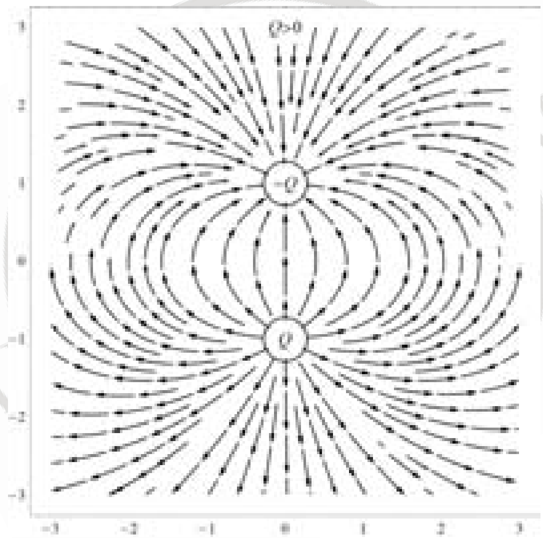
Ako se u električno polje $\vec{E}$ unese probno naelektrisanje Q_p, na probno naelektrisanje će delovati sila $\vec{F}$ tako da će pravac i smer sile biti isti kao pravac i smer polja ako je pozitivno Q_p, a isti pravac i suprotan smer ako je Q_p negativno

$$\vec{F} = Q_{\mathrm{p}}\vec{E} \qquad (9)$$

Električno polje se može predstaviti linijama koje pokazuju pravac, smer i intenzitet u svim tačkama polja i nazivaju se linije polja. Linije vektora jačine električnog polja se crtaju tako da u svakoj tački tangenta na linije predstavlja pravac vektora polja u toj tački, strelice pokazuju smer polja, a gustina linija je veća tamo gde je intenzitet polja veći.

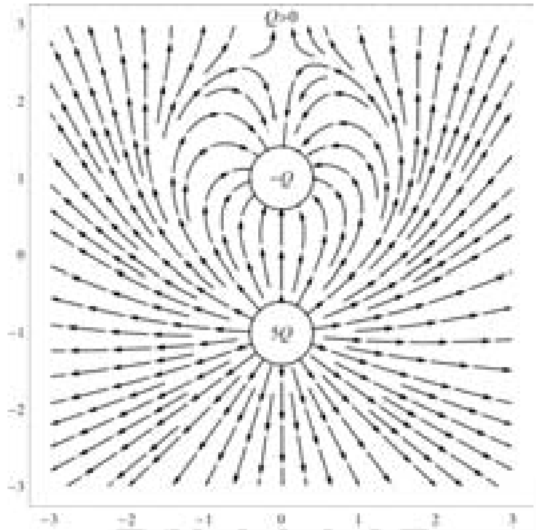
Pojam tačkastog naelektrisanja može da se koristi za određivanje električnog polja i može da se koristi kada su dimenzija tačkastog naelektrisanja znatno manje u odnosu na tačku u kojoj se računa polje. U situaciji kada se posmatra površina ili telo koje je naelektrisano, tada je komplikovano izračunati polje uzimajući svako pojedinačno tačkasto naelektrisanje. Zato se uvode novi pojmovi koji olakšavaju izračunavanje i prikaz električnog polja.

Slika 2.5. pokazuje električnog polje koje stvaraju dva tačkasta opterećenje od kojih je jedno pozitivno a drugo negativno, tako da su linije polja usmerene od pozitivnog ka negativnom naelektrisanju.



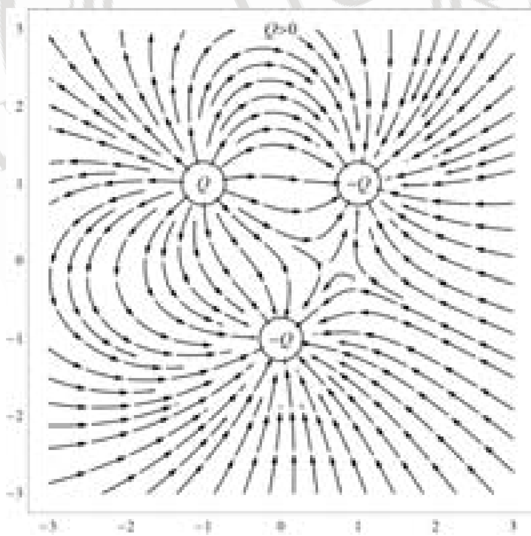
Slika 2.5. Električno polje koje stvaraju dva tačkasta opterećenja od kojih je jedno pozitivno a drugo negativno naelektrisanje.

Slika 2.6. pokazuje električno polje koje stvaraju dva tačkasta opterećenje od kojih je jedno pozitivno a drugo negativno, takva da je vrednost pozitivnog naelektrisanje znatno veće od negativnog. Linije polja usmerene su od pozitivnog ka negativnom naelektrisanju, a kada se polje posmatra sa udaljenosti znatno veće od rastojanja između tačkastih naelektrisanja, polje izgleda kao da rezultantno jedno opterećenje $5Q - Q = 4Q$.



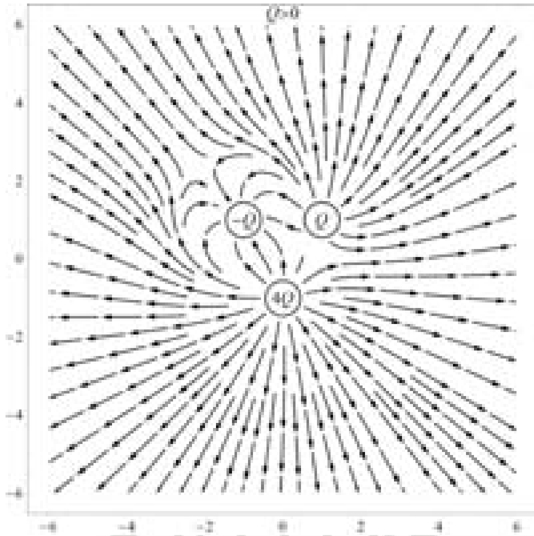
Slika 2.6. Električno polje koje stvaraju dva usamljena tačkasta opterećenje takva da je vrednost pozitivnog naelektrisanja znatno veća od negativnog naelektrisanja.

Električno polje kada se analiziraju dva tačkasta naelektrisanja mogu da se nacrtaju analiziraju po analogiji sa slikama 2.2 do 2.6, ali ručno crtanje postaje previše komplikovano kada se analizira tri i više naelektrisanja, kao što je to slučaj na slikama 2.7 i 2.8.



Slika 2.7. Električno polje koje stvaraju tri usamljena tačkasta naelektrisanja.

U praksi često nije potrebno da se znaju polja na rastojanjima koja su blizu samih opterećenja. Na većim rastojanjima se sa dovoljnom tačnošću mogu odrediti polja kao zbirni uticaj svih naelektrisanja.



Slika 2.8. Električno polje koje stvaraju tri usamljena tačkasta opterećenje takva da je vrednost jednog pozitivnog naelektrisanja znatno veća od negativnog naelektrisanja.

Za crtanje električnog polja u ovom udžbeniku korišćen je program Mathematica, tako što se napiše formula za polje prema formuli (6) sa centrom u određenoj tački. U slučaju naelektrisanja koja su raspodeljena po površini mogu da se izvedu formule, a zatim se nacrta polje pozivanjem funkcije. Definicije specifičnih polja date su nastavku teksta.

2.3.1 Električno polje linijskog naelektrisanja

Naelektrisanje Q može biti raspodeljeno duž tanke niti, čiju dužinu možemo da označimo sa L, i nazivamo ga linijsko naelektrisanje. Raspodela naelektrisanja duž linije naziva se podužna gustina, pri čemu je $\mathrm{d}l$ dužina segmenta linije L, a $\mathrm{d}Q$ je naelektrisanje segmenta $\mathrm{d}l$

$$Q' = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}l} \tag{10}$$

Jedinica podužne gustine naelektrisanja je C/m.

Kada je naelektrisanje Q ravnomerno raspoređeno duž linije L, tada se može odrediti podužna (linijska) gustina

$$Q' = \frac{Q}{L} \tag{11}$$

Ako se posmatra veoma dugačka provodna nit naelektrisana naelektrisanjem Q i može da se izračuna intenzitet električno polje u tački koja se nalazi normalno u odnosu na nit na rastojanju d od niti

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{d} \tag{12}$$

Pod pojmom veoma dugačka provodna nit podrazumeva se da je dužina niti L znatno veća od rastojanja d, kao i da su oba kraja niti u odnosu na posmatranu tačku na znatno većem rastojanju od d.

Drugi primer je kružna nit poluprečnika a, kada se određuje jačina električnog polja na pravoj koja prolazi kroz centar kruga i normalna je na površinu kruga. Ako je z rastojanje od centra kruga, tada je intenzitet električnog polja

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qz}{\left(\sqrt{a^2+z^2}\right)^3} \tag{13}$$

Intenzitet jačine polja u centru kruga je 0, a na velikim rastojanjima od centra kruga je obrnuto srazmeran kvadratu rastojanja

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{z^2} \tag{14}$$

kao da je u pitanju tačkasto naelektrisanje.

2.3.2 Električno polje površinskog naelektrisanja

Naelektrisanje Q može biti raspodeljeno po površini S i nazivamo ga površinsko naelektrisanje. Raspodela naelektrisanja po površini naziva se površinska gustina, pri čemu je $\mathrm{d}S$ element površi S, a $\mathrm{d}Q$ je naelektrisanje jednog elementa $\mathrm{d}S$

$$\rho_S = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S} \tag{15}$$

Jedinica površinske gustine naelektrisanja je $\mathrm{C/m^2}$.

Kada je naelektrisanje Q ravnomerno raspoređeno po površini S, tada se može odrediti površinska gustina

$$\rho_S = \frac{Q}{S} \tag{16}$$

Ako se posmatra ravnomerno naelektrisani krug poluprečnika a, a određuje se jačina električnog polja na pravoj koja prolazi kroz centar kruga i normalna je na površinu kruga, tako da je z rastojanje od centra kruga ($z>0$), tada je intenzitet električnog polja

$$E = \frac{\rho_S z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) \tag{17}$$

Intenzitet jačine polja kada se približavamo centru kruga $z\to 0$ ($z>0$), postaje približno

$$E = \frac{\rho_S z}{2\varepsilon_0} \tag{18}$$

Na velikim rastojanjima kada je $z>>a$, ($z>0$), dobija se izraz kao da je u pitanju tačkasto naelektrisanje ako se gustina naelektrisanja izrazi preko ukupnog naelektrisanja kružne površine

$$E = \frac{\rho_S \pi a^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{z^2} \tag{19}$$

2.3.3 Električno polje zapreminskog naelektrisanja

U nekim specifičnim situacijama, kao što je oblak naelektrisanih čestica (oblak elektrona u vakuumskim cevima, ili jona u gasnim cevima), a da se ne bi vodilo računa o svakom pojedinačnom naelektrisanju, uvodi se pojam gustine zapreminskog naelektrisanja (koje se naziva i gustina naelektrisanja) u nekoj tački oblaka zapremine $\mathrm{d}V$ čije je ukupno naelektrisanje $\mathrm{d}Q$

$$\rho_V = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V} \tag{20}$$

Kada je naelektrisanje Q ravnomerno raspoređeno u celom telu zapremine V, tada se može odrediti zapreminska gustina

$$\rho_V = \frac{Q}{V} \tag{21}$$

Jedinica zapreminske gustine naelektrisanja je C/m^3.

Ako se posmatra ravnomerno naelektrisana sfera poluprečnika R, tako da je zapremina sfere je $V = 4\pi R^3/3$, a određuje se jačina električnog polja na pravoj koja prolazi kroz centar kruga i normalna je na površinu kruga, tako da je z rastojanje od centra kruga (z>0), tada je intenzitet električnog polja na rastojanju r u odnosu na centar sfere

$$E = \frac{\rho_V}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}, \quad r \geq R \tag{22}$$

Na velikim rastojanjima kada je $r>>R$ dobija se izraz kao da je u pitanju tačkasto naelektrisanje ako se gustina naelektrisanja izrazi preko ukupnog naelektrisanja sfere.

2.4 Potencijal električnog polje

Korišćenje vektorskih veličina i integrala često nije neophodno da bi se analizirale pojave u elektrostatici. Stoga je uvedena skalarna veličina koja omogućava da se osobine polja opišu preko svake tačke polja, i ova veličina se naziva potencijal. U praksi se najčešće osobine opisuju u odnosu na neku tačku, često proizvoljno izabranu, i ova tačka se naziva referentnom tačkom R. Svaka druga tačka se opisuje u odnosu na ovu referentnu kao brojna vrednost rada koji bi električne sile izvršile kada bi prenele probno opterećenje Q_p iz te tačke u referentnu tačku. Kako je rad srazmeran probnom opterećenju, a da bi se izbeglo korišćenje vrednosti probnog opterećenja, za izračunavanje potencijala koristiće se izraz za rad podeljen sa probnim opterećenjem, koji se dobija izračunavanjem određenog integrala

$$V_A = \int_A^R \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} \tag{23}$$

Potencijal zavisi samo od položaja krajnjih tačaka *R* i *A*, a ne zavisi od oblika i dužine puta. Pretpostavlja se da je probno naelektrisanje toliko malo da ne remeti električno polje koje stvaraju druga naelektrisanja. Najčešće se usvaja da je potencijal referentne tačke jednak nuli, a površina zemlje se u praktičnim primenama usvaja da ima potencijal nula. Tada se potencijal električnog polja u tački *A* računa u odnosu na nulti potencijal i označava se sa V_A. Ukoliko se računa potencijal između dve tačke označene sa *A* i *B*, tada se izračunavaju potencijali od tačke *A* do *R*, i od tačke *B* do *R*. Zatim se primenjuje pravilo da je određeni integral jednak razlici vrednosti neodređenog integrala u tački *A* i tački *B*; razlika potencijal se naziva električni napon između tačaka *A* i *B*

$$U_{AB} = V_A - V_B \tag{24}$$

Jedinica za potencijal i električni napon je V (volt). Napon gradske mreže koju koristimo u Srbiji je 220 V.

Ako se napon izračunava u odnosu na referentnu tačku *R*, u kojoj je potencijal jednak nuli, tada možemo da pišemo da je napon u tački *A* jednak potencijalu u tački *A*. Nije neophodno da pišemo drugi indeks *R* u oznaci za napon

$$U_{AR} = V_A = U_A \tag{25}$$

U praksi je nekada jednostavnije izračunati jačinu električnog polja na osnovu poznatog napona.

Na primer, ako posmatramo dve ravne paralelne ploče površine *S* razdvojene dielektrikom debljine *d*, koji se naziva pločasti kondenzator, u slučaju da su naelektrisanja na pločama ista a suprotnog znaka, *Q* i -*Q*, i poznat je napon između ploča *V*, tada je jačina električnog polja:

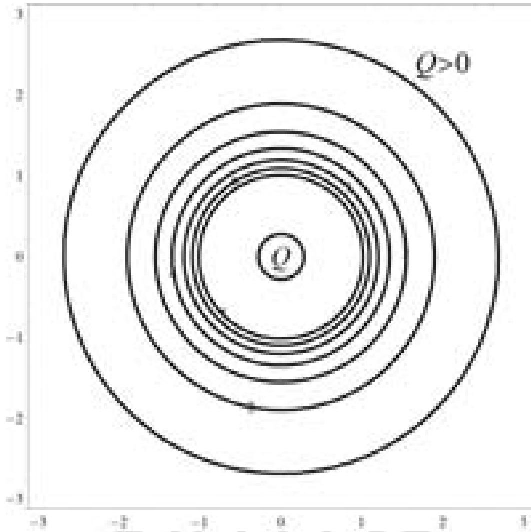
$$E = k\frac{Q}{\varepsilon S} = \frac{V}{d} \tag{26}$$

Električno polje u pločastom kondenzatoru je homogeno. Vektor električnog polja je upravan na ploče a smer je ka ploči koja je na nižem potencijalu. Zamišljene površi između ploča koje imaju isti potencijal nazivaju se ekvipotencijalne površi. U slučaju tačkastog pozitivnog naelektrisanja *Q*, ekvipotencijalne površi su sferne sa centrom u tačkastom naelektrisanju, a smer električnog polja je od tačkastog naelektrisanja.

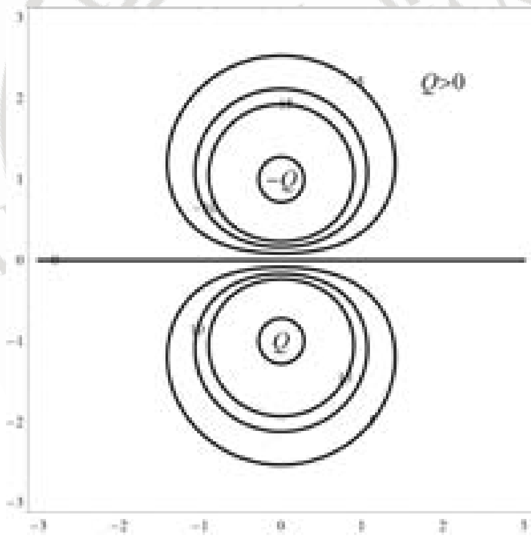
Na slici 2. 9. nacrtane su ekvipotencijalne linije polja usamljenog tačkastog opterećenja. U stvari, to su ekvipotencijalne površi u obliku sfere sa centrom u opterećenju. Za odabrani primer su prikazani brojevi potencijala koji se smanjuje kako se udaljavamo od centra opterećenja. Kako je ovde opterećenje pozitivno, to su i potencijali pozitivni.

Slična slika se dobija i za usamljeno negativno opterećenje, s tim da su potencijali ekvipotencijalnih površina negativni.

Na slici 2.10. nacrtane su ekvipotencijalne linije polja dva tačkasta opterećenja od kojih je jedno pozitivno a drugo negativno.

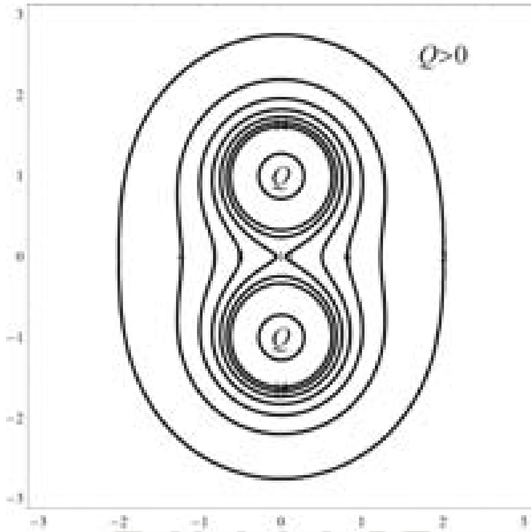


Slika 2.9. Ekvipotencijalne linije polja usamljenog tačkastog opterećenja.



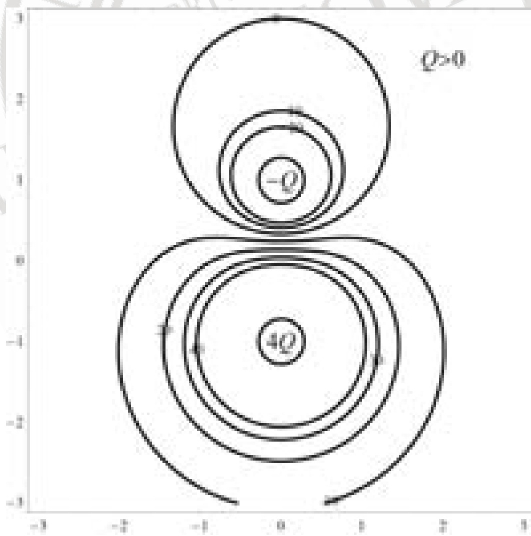
Slika 2.10. Ekvipotencijalne linije polja dva tačkasta opterećenja od kojih je jedno pozitivno a drugo negativno.

Prikazani brojevi potencijala pokazuju da se potencijal smanjuje kako se udaljavamo od centra pozitivnog opterećenja, postaje jednak nuli na sredini između dva opterećenja, a zatim postaje sve negativnije što se više približavamo negativnom opterećenju.



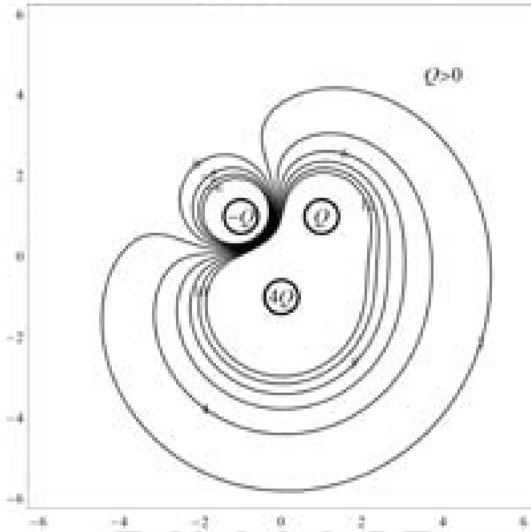
Slika 2.11. Ekvipotencijalne linije polja dva identična pozitivna tačkasta opterećenja.

Na slici 2.11. nacrtane su ekvipotencijalne linije polja dva pozitivna tačkasta opterećenja. Potencijal se smanjuje na većim udaljenostima od centara opterećenja, tako da ekvipotencijalne linije na većim udaljenostima obuhvataju oba opterećenja.



Slika 2.12. Ekvipotencijalne linije polja dva tačkasta opterećenja od kojih je jedno veće.

Na slici 2.12. ilustruje ekvipotencijalne linije polja dva tačkasta opterećenja različitog znaka i različitih vrednosti. Linija čiji je potencijal jednak nuli obuhvata manje opterećenje.



Slika 2.13. Ekvipotencijalne linije polja tri tačkasta opterećenja.

Slika 2.13. ilustruje ekvipotencijalne linije tri opterećenja, i očigledno je da nije lako nacrtati ekvipotencijalne linije bez upotrebe matematičkih programa.

U praksi su od većeg značaja ekvipotencijalne linije složenih površinskih i zapreminskih opterećenja, i za neke od njih se mogu odrediti izrazi u zatvorenoj formi.

2.5 Gausov zakon i fluks električnog polja

Gausov zakon ili Gausova teorema važi za električno polje u vakuumu i izvodi se iz integrala vektora polja po zatvorenoj površi. Fluks treba shvatiti kao matematički pojam koji se uvodi da bi se olakšalo izračunavanje elektrostatičkih pojava. Fluks Ψ_E je jednak integralu vektora $\vec{E}$ kroz površ S ,

$$\Psi_E = \int_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} \tag{27}$$

Jedinica za fluks je Vm (volt-metar).

Po dogovoru, jedinični vektor normale na zatvorenu površ se usmerava upolje. U slučaju homogenog električnog polja u kome se nalazi ravna površ *S*, takva da normala na površ zaklapa ugao α a sa vektorom jačine električnog polja, tada je fluks jednak proizvodu intenziteta polja, površine S i kosinusa ugla između vektora polja i normale na površ *S*

$$\Psi_E = E\,S\cos\alpha \tag{28}$$

Gausov zakon omogućava izračunavanje intenziteta električnog polja i potencijala u mnogim praktičnim slučajevima.

2.5.1 Električno polje i potencijal ravnomerno naelektrisane lopte

Posmatrajmo loptu poluprečnika *R*. Dobija se da je intenzitet radijalnog električnog polja ravnomerno naelektrisane lopte po površini

$$E = \begin{cases} 0, & r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r \geq R \end{cases} \tag{29}$$

U slučaju ravnomerno naelektrisane lopte po zapremini, dobija se da je intenzitet radijalnog električnog polja

$$E = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}, & r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r \geq R \end{cases} \tag{30}$$

Potencijal ravnomerno naelektrisane lopte po površi naelektrisanjem *Q* izračunava se po sledećoj formuli

$$V = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}, & r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r \geq R \end{cases} \tag{31}$$

U slučaju ravnomerno naelektrisane lopte po zapremini, dobija se da je potencijal

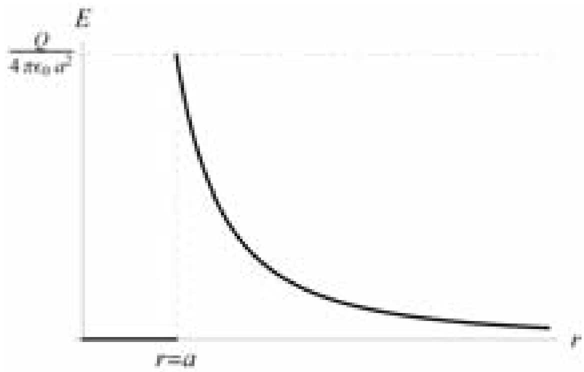
$$V = \begin{cases} \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \dfrac{r^2}{R^2}\right), & r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r \geq R \end{cases} \tag{32}$$

U slučaju tačkastog naelektrisanja dobijaju se izrazi kao da je poluprečnik sfere zanemarljivo mali, a rastojanje je znatno veće od poluprečnika sfere, $r >> R$.

Slike 2.14, 2.15, 2.16. i 2.17 ilustruju intenzitet vektora jačine i potencijal u funkciji rastojanja od centra lopte poluprečnika *a* koja je ravnomerno naelektrisana po površini ili zapremini naelektrisanjem *Q*.

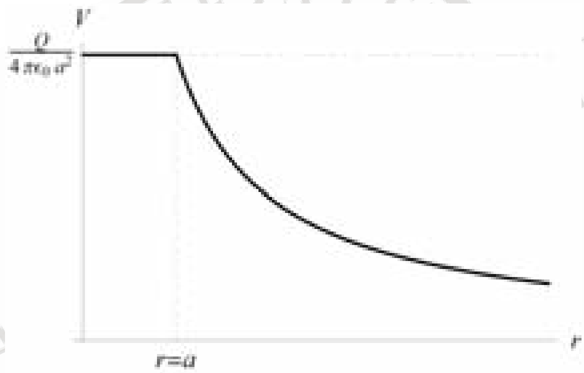
Važno je uočiti da je intenzitet polja jednak nuli unutar lopte kada je ona ravnomerno naelektrisana po površini, ali i da je potencijal isti u svim tačkama po površini lopte (i jednak je potencijalu unutar lopte).

U slučaju ravnomerno naelektrisane lopte po zapremini, potencijal je najveći u centru lopte, a jačina polja raste od centra lopte do površine lopte.



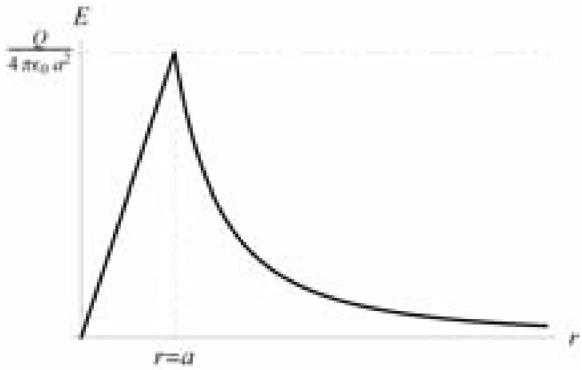
Slika 2.14. Intenzitet vektora jačine u funkciji rastojanja od centra lopte poluprečnika *a* koja je ravnomerno naelektrisana po površino naelektrisanjem *Q*.

Izvan lopte su intenzitet polja i potencijal isti bez obzira na to da li je lopta ravnomerno naelektrisana po zapremini ili po površini.

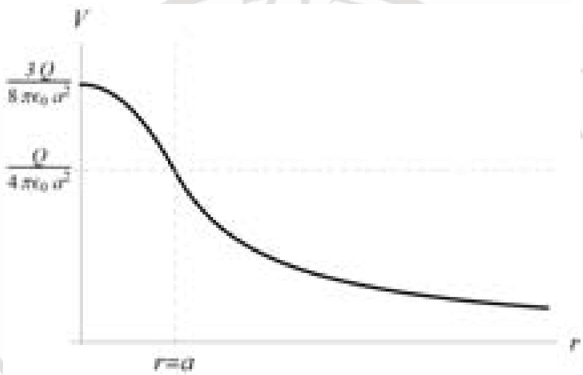


Slika 2.15. Potencijal u funkciji rastojanja od centra lopte poluprečnika *a* koja je ravnomerno naelektrisana po površini naelektrisanjem *Q*.

Izvan lopte i intenzitet polja i potencijal su isti kao da posmatramo tačkasto opterećenje. Kako se u praksi najčešće posmatraju pojave izvan lopte koja je naelektrisana, to se može smatrati kao da važe isti izrazi za tačkasto naelektrisanje.



Slika 2.16. Intenzitet vektora jačine u funkciji rastojanja od centra lopte poluprečnika *a* koja je ravnomerno naelektrisana po zapremini naelektrisanjem *Q*.



Slika 2.17. Potencijal u funkciji rastojanja od centra lopte poluprečnika *a* koja je ravnomerno naelektrisana po zapremini naelektrisanjem *Q*.

Gausov zakon omogućava izračunavanje intenziteta električnog polja i potencijala i u mnogim drugim praktičnim slučajevima, kao što je na primer kada se posmatraju dve naelektrisane paralelne ploče, takve da je naelektrisanje ravnomerno raspoređeno po površinama ploča. Posmatra se slučaj kada su naelektrisanja na pločama suprotnog znaka a polje između ploča je homogeno. Između ploča koje su ravnomerno naelektrisane jednakim površinskim naelektrisanjem σ, intenzitet polja je konstantan i ne zavisi od rastojanja od ploča

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{33}$$

Intenzitet polja je jednak nuli izvan ploča. Potencijal raste od negativne ploče (ako se usvoji da je ona na referentnom potencijalu 0 V) linearno sa rastojanjem do pozitivno naelektrisane ploče, a ekvipotencijalne površine su paralelne sa pločama.

2.6 Provodnici, izolatori i poluprovodnici

U zavisnosti od toga da li elektroni iz spoljašnjih orbita atoma mogu lako da napuste atome postoji nekoliko vrsta materijala koja imaju specifična svojstva u elektrotehnici.

2.6.1 Provodnici

Pod nazivom provodnici podrazumevaju se materijali koji u svojoj strukturi imaju veliki broj takozvanih slobodnih električnih opterećenja – elektrona. Slobodni elektroni su elektroni iz spoljašnjih orbita atoma koji mogu lako da napustite orbitu atoma i slobodno se kreću u prostoru između atoma.

Materijali koji imaju veliki broj slobodnih elektrona nazivaju se provodnici. Tipični provodnici su metali, kao što su srebro, zlato, bakar i aluminijum. Makroskopski posmatrano, ni u jednoj tački u unutrašnjosti provodnih tela ne mogu delovati električne sile na slobodne elektrone; zato nema ni usmerenog kretanja elementarnih opterećenja u provodnim telima. U elektrostatici, električna sila na svako elementarno opterećenje srazmerna je vektoru jačine polja, $\vec{F} = Q\vec{E}$. u provodnim telima elektrostatičko polje jednako je nuli, $E = 0$. U suštini, slobodni elektroni mogu da se haotično kreću u provodniku, ali će se dva elektrona uzajamno odbijati a sile pozitivno naelektrisanih atoma kojima nedostaju elektroni u spoljnoj orbiti će privlačiti elektron, tako da će rezultantna sila biti jednaka nuli, ako se sve posmatra sa veće daljine. Slično kao na slikama na kojima su prikazana polja više naelektrisanja, ukupno polje je jednako nuli ako je zbir pozitivnih i negativnih naelektrisanja jednak nuli.

Slobodni elektroni počinju da se kreću u smeru i najmanje električne sile na njih, što omogućavaju lako uspostavljanje električne struje koja se manifestuje usmerenim kretanjem većeg broja elektrona.

Ako se posmatra primer lopte koja je ravnomerno površinski naelektrisana, vidi se da je polje unutar lopte jednako nuli, dok polje postoji ako je lopta ravnomerno naelektrisana po zapremini. Ako pretpostavimo da imamo loptu koja je ravnomerno naelektrisana po zapremini, zbog postojanja polja unutar lopte, doći će do kretanja elektrona ka površini lopte sve dok polje unutar lopte ne postane jednako nuli. Na taj način se pokazuje da je provodna lopta ravnomerno naelektrisana po površini i da ne postoji polje unutar lopte. Bez obzira kakvog je oblika provodno telo koje ima slobodne elektrone, elektroni će se rasporediti po površini tako da je polje unutar provodnog tela jednako nuli. Istovremeno, da ne bi došlo do kretanja elektrona po površini provodnog tela, potencijal na površini tela ima istu vrednost, odnosno površina provodnog tela je ekvipotencijalna, kao što je to slučaj sa loptom koja je ravnomerno naelektrisana po površini. Intenzitet vektora jačine polja mora biti normalan na površinu tela. Kada polje ne bi bilo normalno na površinu, postojalo polje na samoj površini tela koje bi izazvalo kretanje elektrona po površini, a takvih usmerenih kretanja ne sme da bude u elektrostatici.

U slučaju ravnomerno naelektrisanih paralelnih ploča naelektrisanjima suprotnog znaka, sva naelektrisanja su na samoj površini prema drugoj ploči, tako da nema kretanja naelektrisanja kroz provodne ploče. Polje postoji između ploča, ali naelektrisanja ne mogu da se kreću kroz prostor između ploča. Materijal između naelektrisanih provodnih ploča naziva se dielektrik ili izolator, zato što kroz njega ne mogu da se kreću elementarne naelektrisane čestice. Dve naelektrisane provodne površine su na istom potencijalu bez obzira kakav imaju oblik, odnosno i one su ekvipotencijalne. Uzimajući u obzir zakone elektrostatike, postojanje potencijala na provodnim površinama bi dovela do postojanja polja, pod čijim dejstvom bi se slobodna naelektrisanja kretala sve dok se ne uspostavi isti potencijal u svim tačkama.

Da bi površina provodnih tela bila ekvipotencijalna, može se pokazati da je najveća gustina naelektrisanja u okolini šiljatih delova tela, Stoga je na tim mestima najveća jačina polja.

2.6.2 Elektrostatička indukcija

Pretpostavimo da smo u homogeno polje, koje postoji između dve ravne ploče naelektrisane naelektrisanjima suprotnog znaka, uneli provodno telo koje nije naelektrisano. Ekvipotencijalne površine između ploča su ravni paralelne sa pločama, s tim da je potencijal ekvipotencijalnih površina veći kako su ploče bliže pozitivno naelektrisanoj ravnoj ploči. Provodno telo koje je uneto u ovo homogeno polje mora da ima isti potencijal na celoj svojoj površini, jer bi u suprotnom došlo do kretanja slobodnih naelektrisanih elektrona ka delovima koji su na višem potencijalu. Odmah nakon unosa nenaelektrisanog provodnog tela u homogeno električno polje, slobodni elektroni počinju da se kreću ka pozitivno naelektrisanoj ploči istovremeno stvarajući manjak elektrona na strani negativno naelektrisane ploče. Ovaj proces se odvija sve dok se ne uspostavi da je površina nenaelektrisanog provodnog tela na istom potencijalu. Veći broj elektrona na strani koja je bliža pozitivno naelektrisanoj ploči i manjak elektrona (što je ekvivalentno povećanju pozitivnog naelektrisanja) na strani koja je bliža negativno naelektrisanoj lopti stvoriće promenu jačine električnog polja oko unetog provodnog tela. Pojava da se na površini nenaelektrisanog provodnog tela pojavljuju pozitivna ili negativna opterećenja kada se telo nalazi u električnom polju koje stvaraju druga tela, naziva se elektrostatička ili električna indukcija. Opterećenja koja su se na unetom provodnom telu pojavila nazivaju se indukovana opterećenja, zato što su nastala pod uticajem polja koja stvaraju druga okolna tela. Da je uneto telo bilo već naelektrisano, tada bi se odvijao sličan proces preraspodele naelektrisanja i ovaj proces se takođe naziva električna indukcija.

Pretpostavimo da se iznad površine zemlje nalazi naelektrisani oblak, i da zemlju možemo posmatrati kao provodno telo. Čovek koji stoji na zemlji može da se tretira kao da je provodno telo koje je na istom potencijalu kao zemlja. Zbog električne indukcije, na zemlji će se pojaviti indukovana naelektrisanja, a takođe će i čovek biti naelektrisan. Kako je intenzitet električnog polja najveći na šiljastim delovima, to će i intenzitet polja biti najveći na vrhu čoveka koji stoji. Na isturenim mestima dolazi do jonizacije vazduha pre nego na drugim mestima i time se stvara put za iznenadno pražnjenje opterećenja oblaka prema zemlji, odnosno udar groma će biti upravo na mestu gde stoji čovek. Slično se dešava ako se radi o usamljenom drvetu ili nekom drugom usamljenom provodnom šiljatom objektu. Ako se radi o automobilu, tada bi udar groma zatvorio pražnjenje naelektrisanja oblaka po metalnoj površini automobila, a polje ne bi postojalo u unutrašnjosti vozila. Da bi se zaštitili od udara groma, najviši delovi treba da budu spojeni debelim provodnicima u zemlju, čime podstičemo udar groma ali tako da udar bude tamo odakle možemo da odvedemo naelektrisanje do zemlje.

2.6.3 Izolatori

Materijal kod kojeg su elektroni iz spoljašnje elektronske ljuske čvrsto vezani za atome koji obrazuju molekule i praktično ne mogu slobodno da se kreću, naziva se izolator ili dielektrik. Tipični izolatori su nemetali kao što su staklo, plastične mase, keramika i guma. Naelektrisanja koja se dovedu na izolator ostaju nepokretna i nazivaju se statički elektricitet.

Ako se u blizini izolatora nađe naelektrisano telo, električne sile će delovati i na elektrone u ljuskama i na jezgra atoma. Međutim, neće doći do pomeranja elementarnih naelektrisanja. U nekim slučajevima, u izolatorima ima veoma malo naelektrisanih čestica koje mogu slobodno da se kreću. Pod dejstvom električnog polja može doći do njihovog usmerenog kretanja. Najčešće ova kretanja mogu da se zanemare.

Izolacioni materijali se našli veliku primenu u elektrotehnici gde se koriste za izolovanje provodnika kako bi se sprečio neželjeni dodir dva ili više provodnika. Izolatori sprečavaju uspostavljanje struje između razdvojena provodnika, kao što je to primer dve naelektrisane ploče kondenzatora.

2.6.4 Poluprovodnici

Poluprovodnici su po svojim osobinama negde između provodnika i izolatora. Osim elektrona, kao nosioci pozitivnog naelektrisanja pojavljuju se šupljine. Poluprovodnici imaju osobinu da se umereno suprotstavljaju slobodnom kretanju nosilaca elektriciteta. Neki od najčešće korišćenih poluprovodnika su silicijum, germanijum i galijum arsenid. Poluprovodnički materijali se koriste za izradu savremenih elektronskih komponenti. Više detalja o poluprovodnicima dato je u poglavlju koje opisuju poluprovodničke elemente.

Da bi jasnije razgraničili ove tri grupe materijala, definiše se otpornost kao mera suprotstavljanja kretanju nosilaca elektriciteta i ona će biti kasnije u ovom udžbeniku preciznije definisana. Provodnici imaju malu otpornost, dok izolatori imaju veliku otpornost. Tako na primer, otpornost bakra je približno 10^{25} puta manja od otpornosti kvarca istih dimenzija.

3 Električni elementi

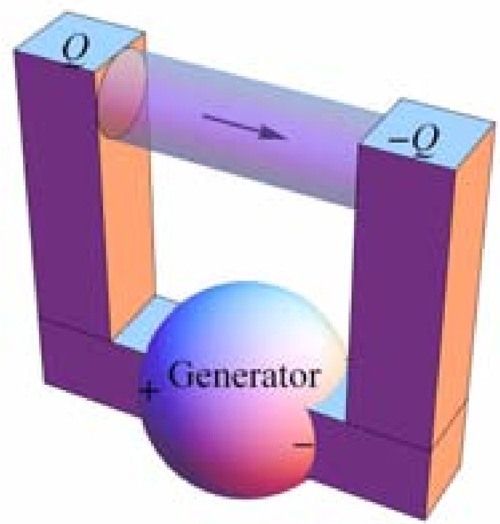
U ovom poglavlju su date osnovne definicije i pojmova koji se koriste u elektrotehnici, kao što su električna struja, napon, energija, snaga, električni sistemi, idealni i realni pasivni električni elementi (otpornik, kondenzator i kalem), idealni i realni nezavisni i zavisni električni izvori.

Električna struja je jedan od osnovnih pojmova u elektrotehnici kojim se opisuje usmereno kretanje velikog broja električnih opterećenja pod dejstvom električnog polja. Zbog sličnosti sa kretanjem tečnosti, koje se naziva strujanje, izabran je i naziv struja. U zavisnosti od toga da li se intenzitet struje menja posmatraju se vremenski konstantne električne struje (slično kao kada postoji ravnomerno kretanje vode u cevi) koja se često naziva i jednosmerna struja ili stalna struja (na engleskom Direct Current - DC). Kretanje struje može biti i vremenski promenljivo po intenzitetu ali i po smeru i ona se naziva vremenski promenljiva električna struja. Primer je strujanje vode u zalivima gde jedan deo dana strujanje uz obalu je u jednom smeru a zatim je strujanje vode u drugom smeru.

Iako se danas u celom svetu dominantno koristi vremenski promenljiva struja za prenos električne energije, sve više aparata koristi jednosmerni napon od 5 V koji se koristi za napajanje računara i mobilnih uređaja.

Da bi bolje razumeli pojave nastajanja električne struje, posmatrajmo jedno elementarno pozitivno opterećenje koje se nalazi u prostoru između molekula dielektrika, a na koje deluje vektor jačine električnog polja. Pretpostavimo da električno polje stvaraju dve suprotno naelektrisane provodne ploče između kojih se nalazi dielektrik. Pod dejstvom polja koje deluje na to slobodno naelektrisanje može se smatrati da na to naelektrisanje deluje sila u pravcu polja; kako je ovo opterećenje slobodno i nije čvrsto vezano u strukturu molekula, ono će se kretati u pravcu polja (opterećenja koja su čvrsto vezana molekularnom strukturom ne mogu da se kreću). Pod dejstvom sile, ovo slobodno opterećenje će se kretati sa sve većim ubrzanjem. Kako su molekuli vrlo blizu, posle određenog pređenog puta, opterećenje će udariti u neki od molekula koji se nađu na putu i stati. Zatim se opterećenje ponovo kreće ubrzavajući do sledećeg sudara kada ponovo stane. Kada opterećenje stigne do negativno naelektrisane provodne ploče na drugom kraju dielektrika ono se neutralizuje sa negativnim opterećenje. Za razliku od provodnika kod kojih postoje samo elektroni kao slobodni nosioci naelektrisanja koji mogu da se kreću, u slučaju tečnih rastvora, neutralni molekuli mogu da se raspadaju na dva suprotno naelektrisana dela koji se nazivaju pozitivni joni (katjoni) i negativni joni (anjoni). U rastvoru, i joni mogu da se kreću pod dejstvom električnog polja u smeru električnih sila koje deluju na jone.

U slučaju provodnika u obliku valjka koji na oba kraja se završava sa pločama koje su naelektrisane suprotnim opterećenjima, broj slobodnih elektrona je veliki; stoga se svi oni usmereno kreću u smeru polja koje stvaraju ove naelektrisane ploče (elektroni se kreću ka ploči koja je pozitivno naelektrisana). Kada se jedno opterećenje pomeri pod dejstvom polja, njegovo mesto zauzima sledeće opterećenje. Makroskopski gledano, dobija se utisak ravnomernog kretanja naelektrisanja, jer ne može doći do nagomilavanja opterećenja. Kada bi ploče bile naelektrisane konstantnim naelektrisanjem, došlo bi do smanjenja naelektrisanja usled dolaska opterećenja kroz provodni valjak; zato bi prestala da teče struja. Da bi se održala konstantna struja, neophodno je obezbediti konstantan dolazak novih opterećenja istog znaka kao što je naelektrisana ploča, tačno onoliko koliko stigne iz provodnog valjka. Naprave koje dodaju stalno nova opterećenja na oba kraja provodnog valjka preko provodnih ploča nazivaju se izvori električne energije ili električni generatori.



Slika 3.1. Proticanje struje kroz valjkasti materijal preko dve ploče naelektrisane suprotnim naelektrisanjima *Q* i -*Q*, koje obezbeđuje generator.

Na slici 3.1. prikazano je kako nastaje proticanje pozitivnog opterećenja sa pozitivno naelektrisane ploče *Q* ka negativno naelektrisanoj ploči -*Q*, a generator obezbeđuje konstantno naelektrisanje na obe ploče. Kao i u slučaju dielektrika, u provodnom valjku tokom kretanja elektrona od negativno naelektrisane ploča sa jednog kraja valjka ka pozitivnoj ploči na drugom kraju valjka, dolazi do sudara elektrona sa molekulima, a pri sudaru se oslobađa kinetička energija. Zbog oslobađanja termičke energije pri sudaru dolazi do pojave koja se naziva Džulova pojava, a to je da u svakom provodniku u kome teče električna struja dolazi do pretvaranja električne energije u toplotnu. U velikom broju primena ova pojava je korisna i koristi se za zagrevanje (na primer grejalice ili šporet). Međutim, neadekvatan proračun može da dovede do nepotrebnog zagrevanja koje može da zapali materijal oko provodnika i izazove požar.

3.1 Električna struja

Električna struja predstavlja meru količine elektriciteta koja se pomeri u jedinici vremena. Do pomeraja naelektrisanja može doći usled različitih uzroka, a u zavisnosti od vrste naelektrisanja. Kod metalnih provodnika, do kretanje slobodnih elektrona dolazi usled postojanja električnog polja. U rastvorima mehanizam pomeranja je kretanje pozitivno ili negativno naelektrisanih jona; to je na primer slučaj sa elektrohemijskim baterijama. U poluprovodnicima pomeraj naelektrisanja se sastoji od kretanja nosioca negativnih naelektrisanja (slobodni elektroni) i nosioca pozitivnog naelektrisanja (šupljina).

Uobičajena oznaka za struju je veliko slovo I ili malo slovo i. U ovom udžbeniku usvojićemo konvenciju da sa velikim slovom opisujemo veličine koje su konstantne i ne menjaju se vremenom, a malim slovom one veličine koje mogu da menjaju svoju vrednost tokom vremena. Jedinica za struju je amper (A) i predstavlja pomeraj od jednog kulona u sekundi. Usvojen je konvencija da smer struje odgovara smeru kretanja pozitivnog naelektrisanja, dok je na primer, smer struje koju prave elektroni suprotan od smera kretanja elektrona.

Prosečna (srednja) struja I se definiše kao količnik ukupnog pomerenog naelektrisanja ΔQ i vremenskog intervala u kome se vrši taj pomeraj Δt (veliko slovo se koristi zato što je srednja vrednost konstantna u intervalu vremena u kome izračunavamo struju):

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{34}$$

Kada struja može da se menja tokom vremena, trenutna struja i se definiše kao brzina promene naelektrisanja, odnosno prvi izvod količine elektriciteta po vremenu:

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{35}$$

U slučajevima kada se struja sastoji od kretanja dva tipa nosilaca (na primer pozitivnih na jedni stranu i negativnih na drugu stranu), trenutna struja se može izraziti kao razlika struja koje stvaraju pozitivna i negativna naelektrisanja:

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q^+}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}q^-}{\mathrm{d}t} \tag{36}$$

Ako se pozitivna naelektrisanja kreću u jednom smeru, a negativna u drugom smeru, ukupna struja je zbir ove dve struje (smer struje negativnog naelektrisanja je suprotan od smera kretanja naelektrisanja).

Uređaji u domaćinstvu obično rade sa efektivnim strujama u opsegu od 0,5 A do 16 A, što se može videti na tabli sa osiguračima. Struje kod električnih brojila mogu da budu i 24 A. U industriji struje mogu da budu i nekoliko stotinu ampera. Struja koju stvaraju munje i gromovi su reda desetina hiljada ampera. U elektronskim kolima potrebno je da je struja što je moguće manja; struje mogu da budu reda mA ili nA. Procenjuje se da su struje između nervnih ćelija kod živih bića reda pA. Struja punjača mobilnih telefona može da bude reda 0,5A.

3.2 Električni napon, energija i snaga

Razlika potencijala predstavlja sposobnost prenosa naelektrisanja. Napon predstavlja potencijalnu energiju. Struja kroz provodno telo može da teče ako postoji razlika potencijala na krajevima provodnog tela.

Jedinica za napon je volt (V) i predstavlja energiju od jednog džula (J), koja je potrebna za pomeraj pozitivnog naelektrisanja od jednog kulona (C), tako da je V=J/C, (jedinica za napon volt je jednaka džul/kulon). U elektrotehnici, uobičajena oznaka za napon je *V* ili *v*. Veliko slovo *V* se koristi za konstantan napon koji se ne menja tokom vremena, ili na primer za srednju vrednost napona u nekom intervalu vremena. Malo slovo *v* se koristi za napon koji se menja tokom vremena. Napon se koristi kao razlika potencijala dve tačke pri čemu se potencijal izražava u odnosu na referentnu tačku za koju smo usvojili da je potencijal jednak nuli.

Posmatrajući veoma male promene energije i naelektrisanja, trenutni napon se može definisati kao:

$$v = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}q} \tag{37}$$

Proizvod trenutnog napona i struje je inkrementalne promene energije po vremenu:

$$vi = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \tag{38}$$

Snaga se definiše kao brzina promene energije:

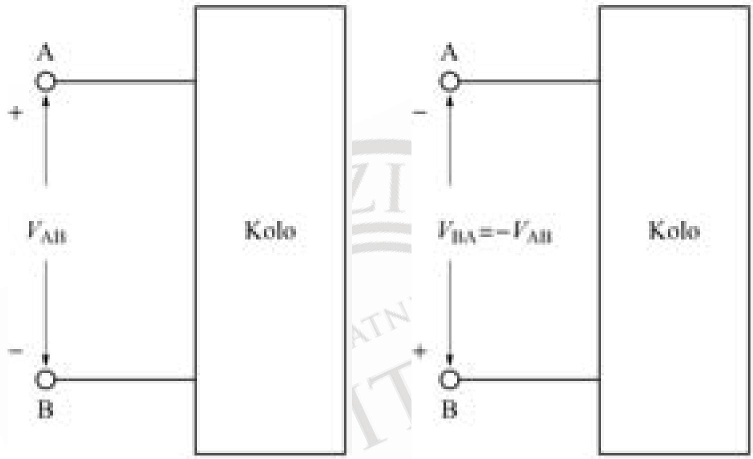
$$p = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = vi \tag{39}$$

Uobičajena oznaka za energiju je *W* ili *w*. Jedinica za energiju je džul, a skraćena oznaka od joule je J. Za rad se čest koristi slovo A, iako se ovo slovo u elektrotehnici često koristi i za druge veličine. Jedinica za rad u MKSA sistemu je N m, a u praksi se češće koristi jedinica džul. Oznaka za snagu je *P* ili *p*, a jedinica je vat, a skraćena oznaka od watt je W. Velika slova se koriste kada se vrednost ne menja sa vremenom, a mala slova za trenutne vrednosti koje mogu da se menjaju u funkciji vremena. Da ne bi došlo do zabune oko oznaka fizičkih veličina i jedinica, fizičke veličine se pišu ukošenim slovima, a jedinice normalnim slovima.

3.3 Referentni smerovi i polariteti

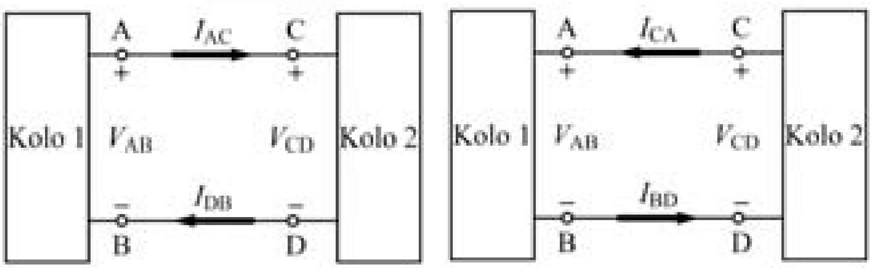
U elektrotehnici je neophodno uvesti konvencije kako ne bi došlo do pogrešnog tumačenja i grešaka u proračunima. U analizi električnih pojava, posebno je važno koji je smer neke struje i koja je od dve tačke na višem potencijalu. Zato je potrebno da se uvedu konvencije tako da naponi i struje u kolu mogu lako da se odrede. U slučaju da je stvarni smer struje suprotan od usvojenog, struja će imati negativnu vrednost. U slučaju da smo usvojili kao viši potencijal u nekoj tačku u odnosu na drugu, tada će vrednost potencijala biti negativna.

Na slici 3.2. sa V_{AB} je označen napon između tačaka A i B. Znaci + i – označavaju referentni smer napona V_{AB}. Ako je $V_{AB}>0$, onda je tačka A koja ima oznakom + na višem potencijalu od tačke B koja ima oznaku – za potencijal. Ako je $V_{AB}< 0$, tada je tačka A sa oznakom + na nižem potencijalu od tačke B sa oznakom –. Znak – ne mora da se piše jer se on uvek pridružuje drugom kraju za V_{AB}. Indeks uz oznaku za napon pokazuje koji je pozitivan polaritet, tako što se za V_{AB} podrazumeva da je A na + a B na –. Referentni smer napona se može proizvoljno usvojiti. Na primer za kolo sa slike 3.2, neka je vrednost napona V_{AB}=3 V; to znači da je potencijal tačke A veći za 3 V od potencijala tačke B. Kada se referentni smer usvoji da je + kod tačke B, tada je vrednost napona V_{BA} negativna, V_{BA}=–3 V; što znači da je $V_{AB}=-V_{BA}$=–3 V; ponovo se dobija da je tačka A na višem potencijalu.



Slika 3.2. Označavanje polariteta napona između tačaka A i B.

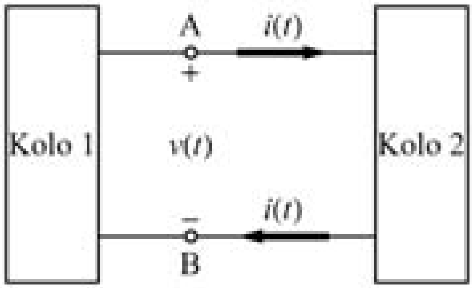
Na slici 3.3. strelicom je označen referentni smer za struju I_{AC}, tako da ona potiče od tačke A do tačke C. Ako je $I_{AC}>0$, onda je stvarni smer struje isti sa referentnim smerom, a ako je $I_{AC}<0$, onda je stvarni smer struje suprotan referentnom smeru, $I_{AC}= -I_{CA}$. Neka je I_{AC}=4 A; stvarni smer struje je identičan sa nacrtanim referentnim smerom, a amplituda struje je 4 A. Ako bi usvojeni smer bio suprotan, I_{CA}, tada bi vrednost struje bila $I_{CA}=-I_{AC}$=–4 A; stvarni smer struje bio bi isti kao u prvom slučaju.



Slika 3.3. Označavanje referentnog smera za struju između tačaka A i C.

U praksi se često ne piše indeks uz struju, ali se on podrazumeva na osnovu slike.

Na slici 3.3. nacrtani su naponi i struje za slučaj kada se analiziraju vremenski nepromenljive struje i naponi, ili se označavaju srednje vrednosti (kasnije će u slučaju sinusoidalnih vrednosti označavati amplitude ili efektivne vrednosti).



Slika 3.4. Označavanje polariteta vremenski promenljivog napona i referentnog smera za vremenski promenljivu struju.

Na slici 3.4. nacrtani su vremenski promenljivi naponi i struje sa usvojenim referentnim smerovima.

Neophodno je specificirati vrednost i polaritet svih napona i usvojenih smerova svih struja u kolu. Označavanje sa + kod napona ili strelicom za struje dobija se kompletna predstava. Alternativno, prvo slovo u indeksu uz napon pokazuju koja tačka je usvojena da je na višem potencijalu, a kada je struja u pitanju, smer struje je od prvog slova ka drugom slovu u indeksu. Ako se kod napona izostavi drugi indeks, tada se podrazumeva da je + uz čvor koji je napisan u indeksu napona. U slučaju struje, ako ona u indeksu ima samo redni broj struje, tada se usvojeni smer prikazuje na slici kola.

U elektrotehnici neki element može da prima energiju od nekog kola za koje je priključen preko čvorova kao na slici 3.4. U zavisnosti od elementa, element može da predaje energiju ostatku kola. Smer prenosa energije zavisi od znakova napona i struje, i njihovih vrednosti.

Na primer, za kolo sa slike 3.3., pretpostavimo da je u jednom trenutku napon između tačaka A i B jednak V_{AB}=3 V, a da je struja u gornjoj grani pozitivna: I_{AC}=1 A. Za kolo 2 se kaže da prima energiju i on se naziva pasivni element, zato što pasivni element troši energiju i pretvara je u neku drugu vrste energije, na primer u toplotnu energiju. Ovo važi i kada su struje promenljive. Dobija se pozitivna snaga $p= i\, v_{AB}$= 4 W.

Kolo 1 predaje energiju kolu 2 i kolo 1 održava napon koji podržava tok struje u kolo 2. U ovom slučaju, kolo 1 se naziva aktivni element, izvor ili generator.

Ako pretpostavimo da smo drugačije označili polaritete napona i referentni smer struje, tako da su napon i struja negativni, v_{AB}= –3 V i struja i = –1 A, tada će kolo 2 i dalje imati pozitivnu snagu 3 W (pasivni element), a kolo 1 negativnu –3 W (generator).

Napon i struja mogu biti konstantni ali i vremenski promenljivi; zato se i snaga može menjati sa vremenom i tada se označava sa $p(t)$.

Preneta energije od trenutka t_1 do trenutka t_2 može se odrediti integraljenjem jednačine za snagu:

$$w = \int_{t_1}^{t_2} p\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} vi\,\mathrm{d}t \tag{40}$$

Kao zaključak može da se konstatuje da je za tačno izračunavanje snage potrebno striktno koristiti usvojene oznake za polaritet napona na elementu i smer struje kroz element. Referentni polaritet napona na priključnim čvorovima između kojih je povezan neki element i referentni smer struje kroz element, moraju biti tako usvojeni da pozitivni priključak napona bude kod one tačke elementa u koju ulazi referentni smer struje.

3.4 Modelovanje električnih elemenata i sistema

Za analiziranje osobina elementa ili sistema, često se koriste matematički modeli. Modelovanje je proces predstavljanja fizičkog elementa ili sistema na način koji omogućava primenu matematičkih izraza. Uprošćavanje modela se izvodi usvajanjem izvesnih pretpostavki kojima se ne utiče na bitna svojstva elementa, a sama analiza daje dovoljno dobre rezultate koji prikazuju suštinu i najvažnije osobine. U prirodi ni jedan element nije idealan i takav da se može sa sigurnošću tvrditi da je model tačan. Kada bi se u praksi uvek radilo sa tačnim modelima, analize bi mogle da budu veoma komplikovane; tada bi bilo teško odrediti suštinska svojstva elementa ili sistema. U praksi se najpre ovladava najjednostavnijim modelima i što je moguće jednostavnijim matematičkim aparatom; tek kada se razumeju sva bitna svojstva, postepeno se mogu koristiti složeniji modeli onda kada je potrebno uočiti neke druge manje važne osobine elemenata.

U analizi električnih kola jedna od najvažnijih pretpostavki jeste da se osnovne karakteristike električnih elemenata mogu predstaviti jednostavnim matematičkim aparatom, a da su elementi povezani idealnim provodnicima. U situaciji kada ovakav uprošćeni pristup ne daje dovoljno tačan rezultat, svaki element se može predstaviti kombinacijom većeg broja osnovnih elemenata, a i same veze elemenata mogu da se aproksimiraju kombinacijom osnovnih elemenata. U nekim slučajevima ova uprošćenja ne važe; tada moraju da se primenjuju drugačiji matematički modeli u cilju boljeg razumevanja analiziranih pojava.

3.5 Idealni električni elementi

Idealni električni elementi su kompletno opisani matematičkom relacijom koja daje vezu između napona na elementu i struje kroz element. Koriste se osnovne aritmetičke operacije, diferenciranje i integrali. Posebno će biti analizirani pasivni električni elementi a posebno aktivni. U suštini svake analize jeste da se prenosi neka informacija koju treba odvojiti radi identifikacije i korišćenja. U jednom slučaju aktivni element se koristi kao izvor informacije ili smetnje koja onemogućava identifikaciju informacije. U drugom slučaju, aktivni elementi se koriste da bi se pojačala informacija tako da je možemo jasnije i tačnije identifikovati. Generatori se koriste kao aktivni elementi koji obezbeđuju energiju za neke druge potrebe, na primer za grejanje ili pokretanje motora. Pasivni elementi mogu da se koriste kao selektivna kola u cilju odvajanja željene informacije, ali i kao element koji ima svoju korisnu svrhu, kao što je grejanje grejača u bojleru, pretvaranje električne energije u svetlosnu, pretvaranje električne energije u mehaničku energiju. U današnje vreme od posebnog je značaja da se racionalno koristi energija; u skoro svim primenama poželjno je da se korisni efekti dobiju sa minimalnim nepotrebnim troškovima. Zbog toga je modelovanje električnih elemenata i poznavanje osobina osnovnih elemenata ključno za efikasno korišćenje energije.

3.6 Idealni pasivni električni elementi

Pasivni elementi su oni koji ne mogu da stvore energiju. Neki elementi mogu da prihvate i čuvaju energiju a zatim da tu energiju vrate u kolo sa kojim su povezani. Idealni pasivni električni elementi su otpornik, kalem i kondenzator. Kondenzator može da prihvati naelektrisanje od baterije koja se koristi kao generator, ali zatim može i da to naelektrisanje vrati u kolo u kome se nalazi, i tada se praktično ponaša kao generator. Međutim, kondenzator može da vrati samo onu energiju koju je primilo, a kada svo naelektrisanje prenese na druge elemente, ono ne može da generiše novo naelektrisanje. Kondenzator može da se ponaša kao element koji čuva energiju, ali ne može i da je stvori. Zato se kondenzator često koristi kao memorijski element. Kondenzator koji je prazan i bez naelektrisanja, ne može da stvori energiju i da se ponaša kao generator ili aktivni element.

Idealni pasivni elementi se mogu opisati matematičkim relacijama gde se napon na elementu izražava preko struje kroz element:

$$v = Ri\,, \qquad v = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\,, \qquad v = \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t \tag{41}$$

U nekim situacijama je poželjno da se struja iskaže preko napona

$$i = \frac{1}{R}v\,, \qquad i = \frac{1}{L}\int v\,\mathrm{d}t\,, \qquad i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{42}$$

Otpornik se koristi za predstavljanje linearne zavisnosti napona i struje, simbol za otpornost je R. Kalem i kondenzator se koriste kada treba modelovati elemente koji se predstavljaju korišćenjem diferencijalnog računa i integrala za vezu između napona i struje pasivnih elemenata. U matematičkom modelu se induktivnost kalema označava sa L a kapacitivnost kondenzatora sa C.

Otpornik predstavlja komponentu koja primljenu električnu energiju pretvara u toplotnu energiju. Konstanta R u prethodnim relacijama predstavlja otpornost otpornika i izražava se jedinicom om, umesto koje se često koristi grčko slovo Ω.

Kalem predstavlja komponentu koja primljenu električnu energija pretvara u magnetsko polje, a zatim tu energiju može da vrati električnom kolu sa kojim je povezan preko priključnih krajeva. Kalem ne može da vrati više energije nego što je primio, zato što je to pasivni element. Konstanta L predstavlja induktivnost kalema i izražava se jedinicom henri – H.

Kondenzator predstavlja komponentu koja primljenu električnu energiju pretvara u električno polje. Konstanta C predstavlja kapacitivnost kondenzatora. Kapacitivnost se izražava jedinicom farad – F. Ekvivalentna jedinica za farad je kulon/volt (F=C/V).

Veliki broj električnih i elektronskih kola može da se opiše sa ova tri pasivna elementa, uključujući i izvore (generatore) koji će biti definisani u narednom delu.

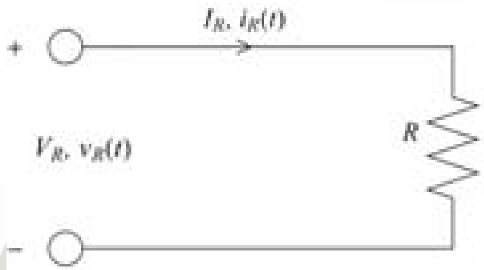
3.6.1 Otpornik

Otpornik se koristi za predstavljanje linearne zavisnosti napona i struje. Na slici 3.5. nacrtan je simbol koji se najčešće koristi u praksi za crtanje otpornika u električnim šemama.

$$v(t) = R\,i(t)\,, \qquad i(t) = \frac{1}{R}v(t) \tag{43}$$

Kada se analiziraju naponi i struje koji imaju konstantnu vrednost i ne menjaju se tokom vremena, napon i struja se mogu predstaviti na isti način

$$V = RI \qquad I = \frac{1}{R}V \tag{44}$$



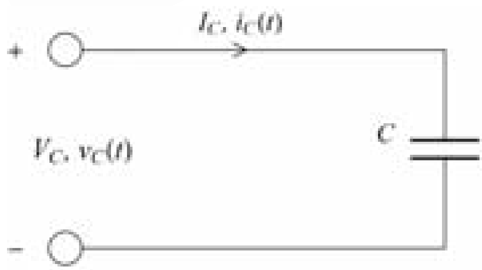
Slika 3.5. Idealni otpornik.

Otpornici se nazivaju još i rezistivni elementi. Otpornost zavisi od vrste materijala od koga je napravljen otporni.

3.6.2 Kondenzator

Kondenzator se koristi za predstavljanje struje koja je srazmerna prvom izvodu napona. Na slici 3.6. nacrtan je simbol koji se najčešće koristi u praksi za crtanje kondenzatora u električnim šemama.

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t\,, \qquad i(t) = C\,\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \tag{45}$$



Slika 3.6. Idealni kondenzator.

Kada se analiziraju naponi i struje koji imaju konstantnu vrednost i ne menjaju se tokom vremena, struja kroz kondenzator je uvek jednaka nuli

$$V = V_0 , \quad I = 0 \tag{46}$$

Ako se posmatra usamljeno naelektrisano telo čije je naelektrisanje Q, a potencijal u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti za koju smo usvojili da je potencijal jednak nuli, tada je potencijal linearno srazmeran sa naelektrisanjem Q. Ako bi se udvostručilo naelektrisanje, tada bi i potencijal tog usamljenog tela bio dvostruko veći.

Ako postoje dva tela koja su naelektrisana istom količinom naelektrisanja ali suprotnog znaka, tada se može napisati da je naelektrisanje Q srazmerno razlici potencijala ta dva tela, a konstanta srazmernosti se naziva kapacitivnost C. Ako se potencijali, razlika potencijala i opterećenje menjaju u funkciji vremena, tada se opterećenje, potencijali i napon pišu malim slovom

$$Q = C(V_+ - V_-) = CU \ , \qquad q(t) = C(v_+(t) - v_-(t)) = Cu(t) \tag{47}$$

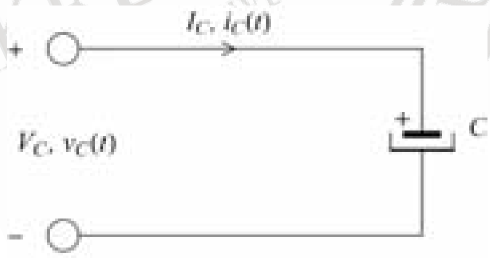
Iz ovih izraza sledi da je napon na terminalima kondenzatora srazmeran naelektrisanju u slučaju da se opterećenje ne menja u funkciji vremena, a da kroz kondenzator ne protiče struja:

$$Q = CV_0 , \quad I = 0 \tag{48}$$

U slučaju kada se kondenzator realizuje sa dve ravne provodne ploče površine S koje su na rastojanju d jedna od druge, a između ploča je dielektrik, tada se kapacitivnost može izračunati na sledeći način

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon \frac{S}{d} \tag{49}$$

U vakuumu je vrednost za $\varepsilon = \varepsilon_0$.



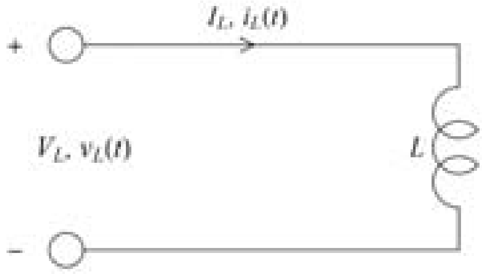
Slika 3.7. Idealni polarisani kondenzator.

U nekim slučajevima, a posebno kada je potrebno da kapacitivnost kondenzatora bude veoma veliki, jedna od elektroda kondenzatora mora uvek da bude na višem potencijalu od druge, što se šematski prikazuje kao na slici 3.7. U praksi se koriste i drugačiji simboli za polarisane kondenzatore, ali se uvek elektroda koja treba da bude na višem potencijalu označava znakom +.

3.6.3 Kalem

Kalem se koristi za predstavljanje napona koji je srazmeran prvom izvodu struje. Na slici 3.8. nacrtan je simbol koji se najčešće koristi u praksi za crtanje kalema u električnim šemama.

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}, \qquad i(t) = \frac{1}{L}\int v(t)\,\mathrm{d}t \tag{50}$$



Slika 3.8. Idealni kalem.

Kada se analiziraju naponi i struje koji imaju konstantnu vrednost i ne menjaju se tokom vremena, napon na kalemu je uvek jednak nuli

$$V = 0, \qquad I = I_0 \tag{51}$$

Kolo na krajevima kalema mora da bude povezana sa drugim elementima da bi mogla da teče struja I_0, a ako kalem nije povezan sa drugim elementima tada je i struja kroz kalem jednaka nuli.

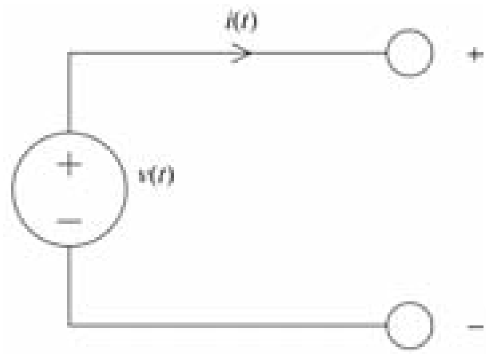
3.7 Idealni nezavisni električni izvori

Često se u praksi najpre analiziraju idealni elementi, a zatim se analizira šta se dešava ako elementi nisu idealni. Ovakav pristup omogućava da se na brz i efikasan način uradi analiza kola, kao približno tačno rešenje, a kasnije se posmatra šta se dešava usled odstupanja od idealnog modela.

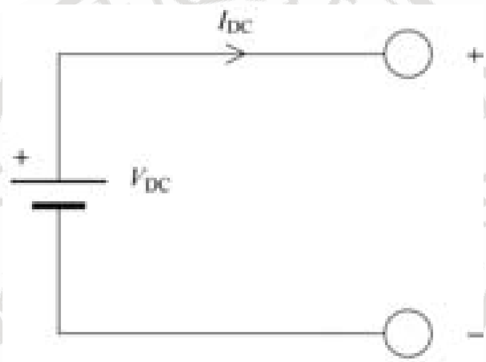
Idealni naponski izvor održava napon $v(t)$ na svojim priključnim krajevima nezavisno od struje koja prolazi kroz njega. Teorijski, struja bi mogla da bude i beskonačno velika kada bi priključci naponskog generatora bili kratko spojeni, što bi značilo da takav izvor može da generiše beskonačnu snagu. Fizički nije moguće da se proizvede beskonačna snaga, a u slučajevima kada se kratko spoje priključci naponskog generatora, generator može da se ošteti. Akumulator u automobilu, kao primer naponskog izvora, brzo će se isprazniti, a provodni kablovi kojima su kratko spojeni priključci će se toliko ugrejali da će se istopiti izolacija ili čak prouzrokovao požar. Zato treba imati na umu da idealni modeli komponenata predstavljaju aproksimaciju realnih komponenata samo pod uslovima ispravnog korišćenja (na primer da se ne spajaju priključni kontakti naponskog izvora).

3.7.1 Idealni nezavisni naponski izvori

Idealni nezavisni naponski izvor je aktivni element koji održava napon između njegovih pristupnih krajeva nezavisno od struje kroz njega, odnosno, nezavisno od toga koji su drugi elementi priključeni na njega (podrazumeva se da dva različita idealna nezavisna naponska izvor nisu spojena na iste priključke, kao i da priključni krajevi nisu kratko spojeni). Vrednost napona nezavisnog naponskog izvora može biti konstantna koja se označava velikim slovom, *V*, (kao kod elektrohemijskih baterija), ili neka funkcija vremena *v*(*t*). Simbol koji se najčešće koristi za predstavljanje idealnih naponskih izvora prikazan je na slici 3.9. Znak + u krugu označava priključak koji odgovara referentnom polaritetu napona izvora.



Slika 3.9. Idealni nezavisni naponski izvor.

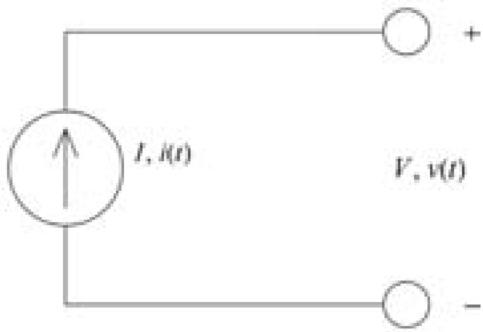


Slika 3.10. Idealni nezavisni naponski izvor jednosmernog napona.

Na slici 3.10. je nacrtan idealni naponski izvor koji daje konstantan napon kao što je slučaj sa baterijama ili akumulatorom u automobilu. Duža crta označava terminal generatora koji je na pozitivnom potencijalu, a često se ova elektroda označava i dodatnim simbolom +.

3.7.2 Idealni nezavisni strujni izvor

Idealni nezavisni strujni izvor održava struju između dva pristupna kraja nezavisno od priključenih drugih elemenata između pristupnih krajeva. Vrednost struje nezavisnog strujnog izvora može biti konstantna *I* ili funkcija vremena *i*(*t*). Za predstavljanje simbola idealnog strujnog izvora u ovoj knjizi se koristi krug sa strelicom koja pokazuje referentni smer struje kroz izvor, kao što je prikazano na slici 3.11.



Slika 3.11. Idealni nezavisni strujni izvor.

Ukoliko priključci idealnog strujnog generatora nisu povezani sa ostatkom kola, teorijski bi napon na krajevima strujnog generatora bio beskonačno veliki, što nije moguće da se realizuje u praksi. S druge strane, ako bi kratko spojili priključke strujnog generatora, tada bi napon na strujnom generatoru bio jednak nuli. Nije dozvoljeno vezati na red dva idealna strujna generatora koji daju različite struje, zato što ne može da se odredi struja u grani u kojoj se nalaze oba strujna generatora.

3.8 Idealni zavisni (kontrolisani) električni izvori

Idealni izvori značajno pojednostavljuju rešavanje kola, ali postoje situacije kada idealni modeli ne mogu da se primene u svim situacijama (kao što su paralelno vezani idealni naponski izvori ili dva idealna strujna generatora u istoj grani).

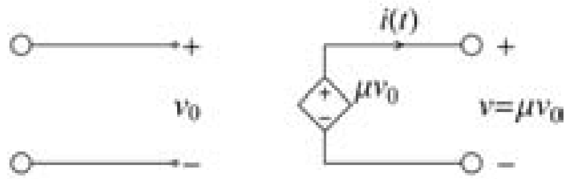
Osnovna karakteristika idealnih nezavisnih naponskih izvora jeste da održavaju napon na pristupnim krajevima nezavisno od toga šta se dešava u ostatku kola. Takođe, idealni nezavisni strujni izvor održavaju struju u grani u kojoj se nalazi izvor, nezavisno od toga šta je još priključeno ovoj grani kola.

Zavisni idealni naponski i struji izvor ponašaju se kao nezavisni izvori, s im da je vrednost napona ili struje određena nekim drugim naponom ili strujom u kolu. U ovoj knjizi, koristiće se zavisni izvori za modelovanje aktivnih elektronskih elemenata, kao što su, na primer, tranzistori i pojačavači.

Postoje četiri tipa idealnih zavisnih izvora, zavisno od toga da li su naponski ili strujni i da li su naponski ili strujno kontrolisani. Zavisni izvori imaju dva para priključka. Sa ulaznog para priključaka uzima se veličina koja kontroliše izvor, a izlazni par priključka daje struju ili napon kontrolisanog izvora. Konstanta proporcionalnosti mogu da bude bezdimenzione konstante, jer je generisani napon funkcija drugog napona, ili generisana struja funkcija druge struje. Konstante se često nazivaju naponsko ili strujno pojačanje, iako u nekim slučajevima pojačanje može biti manje od 1. Ukoliko od upravljačke struje zavisi koliki će biti napon, ili od kontrolnog napona zavisi kolika će biti struja, tada konstante proporcionalnosti imaju dimenziju otpornosti (i nazivaju se transimpedansa) ili imaju dimenziju recipročne otpornosti (naziva se transkonduktansa).

3.8.1 Naponski kontrolisani naponski izvor

Naponski kontrolisani naponski izvor generiše napon $v(t) = \mu v_0(t)$ koji je srazmeran drugom naponu $v_0(t)$, a konstanta proporcionalnosti μ je bezdimenziona. Vrednost struje zavisi od toga šta je vezano na generatoru napona sa desne stran na slici 3.12.

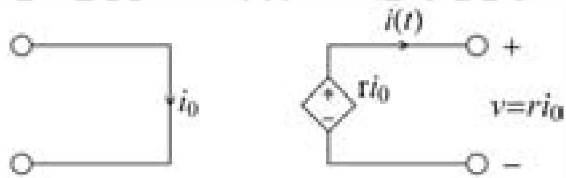


Slika 3.12. Naponski kontrolisani naponski izvor.

Često se u praksi koristi kružni simbol za kontrolisani generator, a u ovom udžbeniku se namerno usvaja simbol koji nedvosmisleno ukazuje da je u pitanju kontrolisani izvor.

3.8.2 Strujno kontrolisani naponski izvor

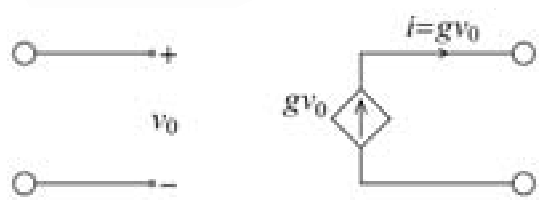
Strujno kontrolisani naponski izvor, koji je nacrtan na slici 3.13. generiše napon $v(t) = ri_0(t)$ koji je srazmeran struji $i_0(t)$. Konstanta proporcionalnosti r ima dimenziju otpornosti.



Slika 3.13. Strujno kontrolisani naponski izvor.

3.8.3 Naponski kontrolisani strujni izvor

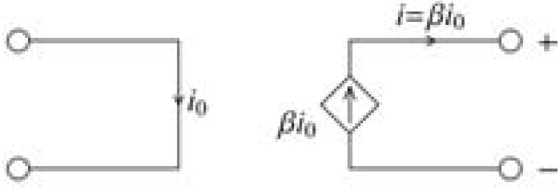
Naponski kontrolisani strujni izvor, prikazan na slici 3.14. generiše struju koja je srazmerna naponu $v_0(t)$. Konstanta proporcionalnosti g je recipročna vrednost otpornosti.



Slika 3.14. Naponski kontrolisani strujni izvor.

3.8.4 Strujno kontrolisani strujni izvor

Strujno kontrolisani strujni izvor generiše struju koja je srazmerna drugoj struji $i_0(t)$, a konstanta proporcionalnosti β je bezdimenziona. Podrazumeva se da je kolo sa desne strane na slici 3.15. zatvoreno drugim elementima.



Slika 3.15. Strujno kontrolisani strujni izvor.

Kao i u slučaju nezavisnih naponskih i strujnih izvora, naponski izvor ne sme da bude kratko spojen jer bi tada tekla beskonačna struja. Izlazni pristupi strujnih izvora ne bi smeli da budu otvoreni, zato što je tada napon beskonačno veliki, što nije moguće praktično realizovati. Sva ograničenja koja važe za nezavisne izvore, važe i za kontrolisane izvore.

4 Kola sa stalnim jednosmernim strujama

Kola sa stalnim jednosmernim strujama sastoje se samo od otpornika i izvora konstantnog napona ili struje. Kalemovi se mogu zameniti kratkim spojem, a kondenzatori raskinutom vezom. Jednačine koje opisuju takva kola su linearne, tako da se linearni sistem jednačina može lako rešiti. Kod kola sa stalnim jednosmernim strujama lako se objašnjavaju osnovni zakoni, kao što su Omov zakon, prvi i drugi Kirhofov zakon, a kasnije se mogu ovi zakoni generalizovati na slučaj sa promenljivim strujama i naizmeničnim strujama.

4.1 Omov zakon

Omov zakon u analizi kola sa stalnim jednosmernim strujama definiše zavisnost napona od struje samo kod otpornika. Napon na otporniku izračunava se kao proizvod konstante *R* i struje kroz otpornik

$$V = RI \tag{52}$$

Konstanta proporcionalnosti predstavlja osnovnu karakteristiku otpornika i naziva se otpornost otpornika, a označava se simbolom *R*. Jedinica za otpornost je om (Ω). Otpornici se prave različitim tehnološkim postupcima; namotavanjem žice određene specifične otpornosti na keramički valjak, nanošenjem metalnog ili ugljenog filma na keramičku podlogu. U integrisanim kolima, otpornici se prave korišćenjem tranzistora, ali oni se u kolu i dalje ponašaju kao pasivni elementi. Vrednosti otpornosti koje se sreću u elektrotehnici i elektronici se kreću od nekoliko desetina mΩ do nekoliko stotina MΩ.

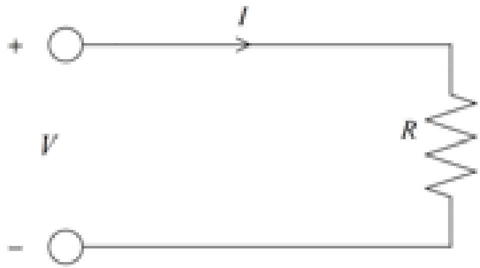
Provodnost otpornika G se izračunava kao recipročna vrednost otpornosti:

$$G = \frac{1}{R} \tag{53}$$

Jedinica za provodnost je simens (S). Omov zakon može da se izrazi i preko provodnosti:

$$I = GV \tag{54}$$

Otpornik je pasivni element koji električnu energiju pretvara u toplotu. Snaga otpornika se računa kao proizvod struje i napona:



Slika 4.1. Omov zakon.

$$P = VI \tag{55}$$

Snaga na otporniku se može izraziti preko otpornosti i napona, ili preko otpornosti i struje. Umesto otpornosti može se koristiti provodnost:

$$P = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R} = GV^2 = \frac{I^2}{G} \tag{56}$$

Specijalni slučajevi otpornosti su kada postoji kratak spoj priključaka otpornosti, i tada je otpornost jednaka nuli, što je ekvivalentno kao da provodnost ima beskonačno veliku vrednost:

$$R = 0 \quad \text{ili} \quad G \to \infty \tag{57}$$

Kada su priključni krajevi otpornika kratko spojeni, to se skraćeno naziva kratak spoj. Napon između čvorova kola koji su kratko spojeni jednak je nuli, dok struja kroz kratak spoj može imati bilo koju vrednost. Ako se pretpostavi da struja nema beskonačnu vrednost i da je ograničena ostalim elementima u kolu, tada je proizvod konačne vrednosti struje i nulte vrednosti otpornosti razlog da je napon između dve kratko spojene tačke u kolu jednak nuli. U kolu stalnih jednosmernih struja, kalem se zamenjuje kratkim spojem.

Drugi karakteristični specijalni slučaj je kada provodnost ima nultu vrednost, što je ekvivalentno kao da otpornost ima beskonačnu vrednost

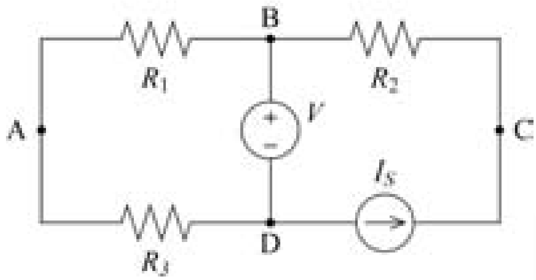
$$G = 0 \quad \text{ili} \quad R \to \infty \tag{58}$$

Beskonačna otpornost između dva priključna kraja naziva se otvorena veza. Napon otvorene veze može da ima bilo koju vrednost i ta vrednost je određena drugim elementima vezanim u kolo. Podrazumeva se da napon nema beskonačnu vrednost. Struja je jednaka nuli zato što je proizvod konačne vrednosti napona i nulte provodnosti. U kolu stalnih jednosmernih struja, kondenzator se zamenjuje otvorenom vezom.

4.2 Električno kolo

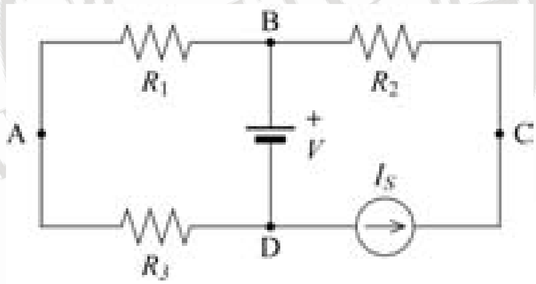
Iako smo već i ranije navodili pojam električnog kola, sada će biti data i definicija. Električno kolo predstavlja vezu dva ili više elemenata (u slučaju stalnih jednosmernih struja to su otpornici i naponski i strujni izvori, a kalem i kondenzator se zamenjuju kratkim spojem ili otvorenom vezom). Povezivanje elemenata se vrši provodnicima. Otpornost provodnika koji se koristi za kratak spoj, može se zanemariti. Smatra se da je otpornost provodnika koji povezuje elemente jednaka nuli.

U teoriji električnih kola se često koriste pojmovi iz matematičkih oblasti kao što je teorija grafova. Posmatrajmo primer električnog kola nacrtanog na slici 4.2. koje se sastoji od tri otpornika, jednog nezavisnog strujnog generatora i jednog nezavisnog naponskog generatora (na slici 4.3. upotrebljen je drugačiji simbol za naponski generator koji se koristi u analizama jednosmerne struje).



Slika 4.2. Primer električnog kola.

Čvor kola pokazuje da su dve veze kratko spojene. Čvor kola je tačka spajanja dve grane i dva ili više elemenata kola. Na slici 4.2. čvorovi su označeni tačkama i slovima A, B, C i D.



Slika 4.3. Primer električnog kola u analizi sa jednosmernim strujama.

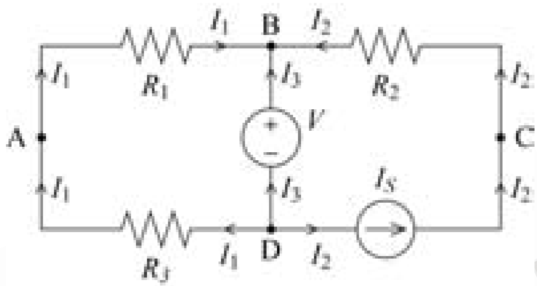
Striktno posmatrano, grana je deo kola koji sadrži samo jedan element, a čvorovi su na krajevima elemenata (AB grana sadrži otpornik R_1, BC grana sadrži otpornik R_2, AD grana sadrži otpornik R_3, BD grana sadrži naponski generator V, a CD grana sadrži strujni generator I_S). U širem smislu, u praksi se često koristi termin za granu koja sadrži rednu vezu elemenata, pri čemu se grana završava parom čvorova (grana BD sadrži rednu vezu otpornika R_1 i R_3).

Petlja predstavlja bilo koji zatvoreni put kroz kolo tako da se kroz jedan čvor može proći samo jednom (u petlji ACDA nalaze se čvorovi A, C i D i zatvara se u čvor A, u petlji BCDB nalaze se čvorovi B, C i D i zatvara se u čvor B, a u petlji ABCDA nalaze se čvorovi A, B, C i D i zatvara se u čvor A). Za kolo sa slike 4.2. ne postoji više ni jedna petlja koja samo jednom prolazi kroz neki čvor.

Termin kontura se koristi za petlju koja ne sadrži u sebi ni jednu drugu petlju (ABDA, BCDB). Za primer sa prethodne slike, sa dve petlje, ABDA i BCDB, obuhvaćene su sve grane električnog kola najmanje jednom, s tim da je grana BD dva puta sadržana u ove dve petlje.

4.3 Prvi (strujni) Kirhofov zakon

Kirhofovi zakoni dobili su naziv po nemačkom fizičaru Gustavu Kirhofu. On je formulisao dva osnovna zakona koji opisuju ponašanje električnih kola.



Slika 4.4. Primer električnog kola u analizi sa jednosmernim strujama.

Prvi Kirhofov zakon, koji se još naziva i strujni Kirhofov zakon, odnosi se na struje u čvoru: Algebarska suma struja koje utiču u ma koji čvor kola jednaka je nuli.

$$\sum_{j=1}^{N} I_j = 0 \tag{59}$$

Za kolo sa slike 4.4. su nacrtane sve struje u blizini svih čvorova. Mora se voditi računa da jednom označena struja uvek ima isti smer kretanja kroz kolo, kao što je to urađeno za sve tri struje I_1, I_2 i I_3. Ukupan broj struja jednak je ukupnom broju grana, a to je N=3. Ako se posmatra čvor A, tada struja I_1, ulazi u čvor i izlazi iz čvora A; po strujnom Kirhofovom zakonu važi $-I_1 + I_1 = 0$. Ako se posmatra čvor C, tada struja I_2, ulazi u čvor i izlazi iz čvora C; po strujnom Kirhofovom zakonu se dobija $-I_2 + I_2 = 0$. Ove dve jednačine ne doprinose izračunavanju jer iz njih proizilazi identitet, $I_1 = I_1$ i $I_2 = I_2$. Kada se napišu jednačine za čvorove B i D, dobija se $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ i $-I_1 - I_2 - I_3 = 0$. Za kolo sa slike 4.4. dovoljno je napisati jednačine za samo jedan čvor, na primer za čvor B, zato što jednačina za čvor D daje iste vrednosti, a jednačine za čvorove A i C se svode na identitet.

Usvojićemo pravilo da se struje koje ulaze u čvor uzimaju sa znakom +, a struje koje izlaze iz čvora sa znakom -. To znači da se struje čija je referentna orijentacija ka čvoru uzimaju se sa pozitivnim predznakom, dok se struje čija je referentna orijentacija od čvora uzimaju sa negativnim predznakom (pošto je zbir struja jednak nuli, može da se usvoji i suprotna konvencija).

U praksi se često koristi još jedna formulacija prvog Kirhofovog zakona: suma struja koje utiču u bilo koji čvor kola jednaka je sumi struja koje ističu iz istog čvora. U opštem slučaju zbir struja je jednak nuli i ako obuhvatimo deo kola zatvorenom linijom.

Za kolo sa slike 4.4. jednu od struja možemo odmah da odredimo zato što je identična sa strujom nezavisnog strujnog izvora $I_2 = I_S$. Da bi izračunali sve struje u kolu sa slike 4.4. imamo samo jednu jednačinu po prvom Kirhofovom zakonu za čvor B a dve nepoznate struje I_1 i I_3. S druge strane, kako ne znamo kolika je struja kroz naponski generator (a to je I_3), neophodno je da napišemo bar još jednu jednačinu iz koje će moći da se odredi nepoznata struja I_1.

4.4 Drugi (naponski) Kirhofov zakon

Drugi Kirhofov zakon, koji se još naziva i naponski Kirhofov zakon, odnosi se na napone u kolu: Algebarska suma napona u bilo kojoj petlji kola jednaka je nuli.

$$\sum_{j=1}^{N} V_j = 0 \tag{60}$$

U prethodno jednačini sa V_j je označen napon na j-toj grani petlje. U petlji ima ukupno N grana. Usvaja se da se naponi na granama čija je referentna orijentacija suprotna orijentaciji petlje uzimaju sa pozitivnim predznakom, a da se naponi na granama čija je referentna orijentacija ista sa orijentacijom petlje uzimaju sa negativnim predznakom. (Isti rezultat se dobija i kada se usvoji suprotna konvencija)

Za granu ABDA može da se napiše jedna jednačina koja obuhvata sve napone u petlji:

$+V_{AB}+V_{BD}+V_{DA}=0.$

Ako sada napone izrazimo korišćenjem Omovog zakona, tada ova jednačina postaje:

$+R_1 I_1+V+R_3 I_1=0.$

Iz ove jednačine se određuje struja I_1, $I_1= -V/(R_1+R_3)$. Nema svrhe pisati jednačine za petlje BCDB ili ABCDA zato što se ne zna koliki je napon na krajevima strujnog generatora. Struju I_3 može da se izračuna koristeći jednačinu po prvom Kirhofovom zakonu

$I_3 = -I_1 - I_S = V/(R_1+R_3) - I_S$

Rešavanje električnog kola podrazumeva da izračunamo sve struje i napone u kolu.

4.5 Paralelna i redna veza otpornika, razdelnici napona i struje

Prvi i drugi Kirhofov zakon su dovoljni da se opiše svako električno kolo. Međutim, ako deo kola ima jedan par čvorova i kolo može da se zameni ekvivalentnim elementom kao da je jedna grana, tada se značajno može uprostiti. Na primer, veći broj otpornika koji su redno vezani može se zameniti jednom granom sa jednim otpornikom. Slično, ako je veći broj otpornika paralelno povezan između dva čvora, petlje između otpornika se mogu eliminisati tako da ostane samo jedna grana. U nekim slučajevima je jednostavnije da se prvo modifikuje kolo, zatim reši kolo i na kraju odrede naponi i struje originalnog kola. Najčešće korišćene transformacije su redna i paralelna veza većeg broja otpornika.

4.5.1 Serijska (redna) veza otpornika

Serijska ili redna veza otpornika prikazana je na slici 4.5. Redna veza otpornika dobija se kada se *n* otpornika nadovezuje jedan na drugi tako da ista struja teče kroz sve otpornike. Za jedinu petlju u kolu se može napisati jednačina po drugom Kirhofovom zakonu:

$$V = R_1 I_s + R_2 I_s + \cdots + R_n I_s = (R_1 + R_2 + \cdots + R_n) I_s \tag{61}$$

$$V = R_s I_s \tag{62}$$

Jedan od čvorova je određen kao referentni i označen kao nulti, a simbol uzemljenja (mase) se koristi da bi se lakše uočilo koji su to čvorovi električnog kola za koje treba izračunati potencijal. Počev od čvora 1 do 0 protiče ista struja kroz sve elemente, a napon čvora 1 ne sme da se promeni nakon određivanja ekvivalentnog otpornika. Svi otpornici koji su vezani na red mogu da se zamene samo jednim otpornikom kroz koji teče ista struja, kao i kroz svaki pojedinačni otpornik, a napon u čvoru 1 je isti u originalnom električnom kolu i u kolu sa ekvivalentnim otpornikom R_S.

Slika 4.5. Serijska (redna) veza otpornika.

Ako naponski izvor daje napon *V*, a struja kroz izvor je I_S, tada se redna veza otpornika može predstaviti jednim otpornikom čija je ekvivalentnu otpornost R_S:

$$R_s = R_1 + R_2 + \cdots + R_n \tag{63}$$

Ekvivalentna otpornost redno vezanih otpornika jednaka je zbiru pojedinačnih otpornosti.

4.5.2 Delitelj (razdelnik) napona

Posmatrajmo dva redno vezana otpornika, kao na slici 4.6. Na osnovu prethodne relacije za rednu vezu otpornika, ekvivalentna otpornost je jednaka zbiru otpornosti redno vezanih otpornika. Zato je i struje *I* ista kroz oba otpornika:

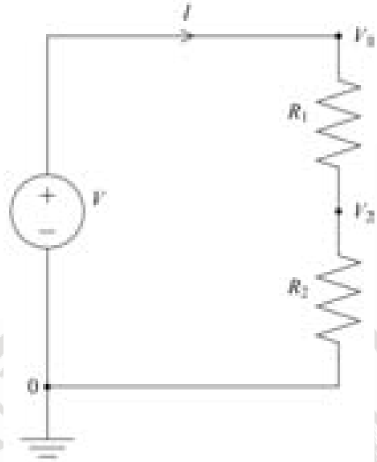
$$I = \frac{V}{R_1 + R_2} \tag{64}$$

Naponi na serijski vezanim otpornicima su po Omovom zakonu proizvod otpornosti i struje koja teče kroz otpornike:

$$V_{R_1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V \tag{65}$$

$$V_{R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V \tag{66}$$

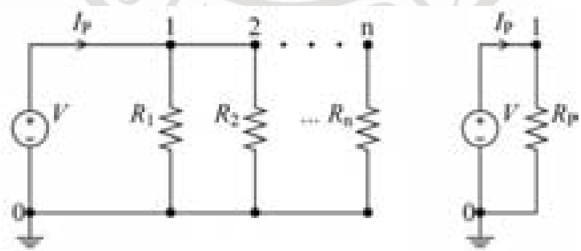
Ovo znači da se u kolu sa slike 4.6. napon izvora V deli između otpornika R_1 i R_2 u direktnoj srazmeri sa njihovim otpornostima. Zato se ovo kolo naziva delitelj (razdelnik) napona.



Slika 4.6. Delitelj (razdelnik) napona.

4.5.3 Paralelna veza otpornika

Pretpostavimo da postoji kolo kod koga je veći broj otpornika (na primer n otpornika) povezani između dva čvora, tada se takva veza se naziva paralelna veza a prikazana je na slici 4.7.



Slika 4.7. Paralelna veza otpornika.

Za čvor 1 na slici 4.7. levo u kome su povezani naponski izvor i svih n otpornika može se napisati jednačina po prvom Kirhofovom zakonu:

$$I_p = G_1 V + G_2 V + \cdots + G_n V = (G_1 + G_2 + \cdots + G_n) V \tag{67}$$

Za ekvivalentni čvor 1 na slici 4.7. desno može se napisati:

$$I_p = G_p V_s \tag{68}$$

Izrazi su identični kao za rednu vezu otpornika, s tim da su umesto otpornosti napisane provodnost, a i napon i struja su promenili mesta.

Ako su napon izvora V i struja kroz izvor I_P u oba kola na slici 4.7. isti, onda se za ekvivalentnu provodnost G_p dobija:

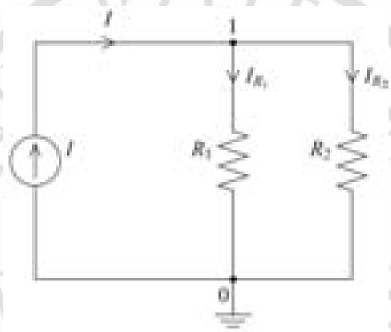
$$G_P = G_1 + G_2 + \cdots + G_n \tag{69}$$

Ekvivalentna provodnost paralelne veze većeg broja otpornika jednaka je zbiru pojedinačnih provodnosti. Izraz preko ekvivalentne otpornosti za paralelnu vezu većeg broja otpornika može da se napiše u sledećoj formi:

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \tag{70}$$

4.5.4 Delitelj (razdelnik) struja

Na slici 4.8. prikazana je paralelna vezana dva otpornika.



Slika 4.8. Delitelj (razdelnik) struje.

Oba otpornika su priključena između istih čvorova, zbog čega je i napon na njima isti. Kako je ekvivalentna otpornost dva paralelno vezana otpornika

$$R_P = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{71}$$

Napon u čvoru 1 može da se izrazi preko struje strujnog izvora i ekvivalentne otpornosti:

$$V_1 = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{72}$$

Struje kroz svaki od otpornika se dobija po Omovom zakonu kao količnik napona u čvoru 1 i same otpornosti:

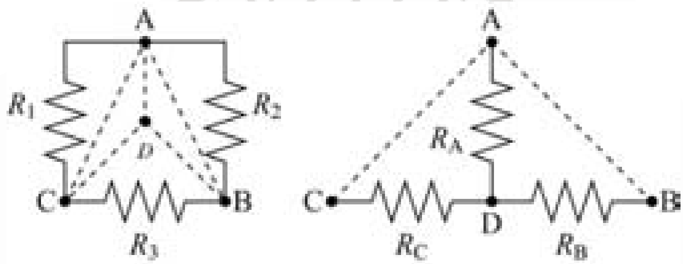
$$I_{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \tag{73}$$

$$I_{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I \tag{74}$$

Struja izvora I deli se između otpornika R_1 i R_2 s tim da je struja manja kada teče kroz otpornik koji ima veću otpornost. Ovakvo kolo, koje je našlo veliku primenu u elektrotehnici, naziva se delitelj (razdelnik) struje.

4.6 Transformacije trougao-zvezda i zvezda-trougao

Transformacije veza otpornika iz trougla u zvezdu i iz zvezde u trougao su dve često korišćene transformacije u rešavanju električnih kola. Na slici 4.9. je prikazano povezivanje tri otpornika u trougao i u zvezdu. U stručnoj literaturi na engleskom jeziku često se koristi simboličko označavanje za ove dve transformacije: Δ→Y i Y→Δ.



Slika 4.9. Transformacije trougao-zvezda i zvezda-trougao.

Da su ova dva kola ekvivalentna, potvrđuje se time što su naponi u čvorovima A, B i C isti, a iste su i struje koje bi bile u granama koje su preko čvorova A, B i C povezivane sa ovim kolom. Podrazumeva se da četvrti čvor nije povezan sa drugim elementima osim sa A, B i C.

Kada je treći čvor nepovezan, otpornost između ma koja dva čvora u oba kola mora biti ista. Korišćenjem pravila za paralelno i redno vezivanje otpornika, dobija se:

$$R_{AB} = R_A + R_B = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{75}$$

$$R_{BC} = R_B + R_C = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{76}$$

$$R_{AC} = R_A + R_C = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{77}$$

Rešavanjem sistema jednačina po R_A, R_B i R_C, dobija se:

$$R_A = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{78}$$

$$R_B = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{79}$$

$$R_C = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{80}$$

Rešavanjem sistema jednačina po R_1, R_2 i R_3,, dobija se:

$$R_1 = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_B} \tag{81}$$

$$R_2 = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_C} \tag{82}$$

$$R_3 = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_A} \tag{83}$$

Ove transformacije se obično koriste kada nije direktno moguća primena transformacija iz paralelnih u redna kola i obrnuto.

4.7 Sistem jednačina napona čvorova

Pod pojmom rešavanja električnog kola podrazumeva se određivanje svih struja kroz sve grane kola i određivanje svih napon u svim čvorovima kola. Da bi se rešilo neko kolo, potrebno je napisati sistem linearnih jednačina (kojih ima onoliko koliko ima nepoznatih), a koji se sastoji od jednačina po strujnom i naponskom Kirhofovom zakonu, kao i jednačina elemenata po Omovom zakonu. Broj jednačina treba da bude jednak broju nepoznatih veličina. Jedan čvor u kolu može da se izabere kao referentni čvor tako da se svi ostali naponi računaju u odnosu na njega. Iako može kao referentni čvor da se izabere bilo koji, najbolje je da se izabere onaj u koji se stiče najviše grana kola. U slučaju kada se za referentni čvor izabere onaj koji je zajednički za strujne izvore, taj čvor se najčešće naziva masa i označava posebnim simbolom.

Sistem jednačina koji opisuje sve nepoznate promenljive u kolu može biti veoma veliki, što zahteva rutinu u rešavanju, ako se ručno radi. Ako se koristi računarski alat za simboličko rešavanje sistema linearnih jednačina, tada rešavanje nije ozbiljan problem. Postoje brojne metode koje se koriste za smanjenje broja jednačina. Kada je broj čvorova značajno manji od broja grana, koristi se metoda u kojoj se najpre odrede svi naponi u kolu; kada su poznati naponi čvorova, korišćenjem Omovog zakona određuju se struje kroz elemente kola. Drugi metod počinje najpre određivanje svih struja u kolu, a kada su poznate struje lako mogu da se izračunaju i naponi na elementima. Treći metod za uprošćavanje kola koristi razne transformacije (na primer, ekvivalentne otpornosti za paralelne ili redne veze otpornika); time se smanjuje broj čvorova ili grana, zbog čega je lakše rešiti kolo koje ima manju složenost; u poslednjoj fazi se odrede svi naponi i struje originalnog kola. Postoje i druge kombinovane metode od kojih se često koristi modifikovana analiza čvorova. U svim slučajevima se smanjuje broj promenljivih koje treba odrediti, a time se smanjuje i broj jednačina u sistemu.

Najčešće je broj grana znatno veći od broj čvorova u elektronskim kolima, zbog čega su korisnije one metode za brzo rešavanje kola koje se svode na izračunavanje napona čvorova.

Da bi se formirao sistem jednačina, redosled postavljanja jednačina je sledeći: (a) najpre se za svaki čvor (osim za referentni) napiše odgovarajuća jednačina po prvom Kirhofovom zakonu; (b) struje koje ulaze u čvor ili izlaze iz čvora izraze se preko napona čvorova i Omovog zakona. Broj jednačina u sistemu je *n*-1, u slučaju da kolo ima *n* čvorova. Ovakav sistem jednačina ima poseban naziv: sistem jednačina napona čvorova.

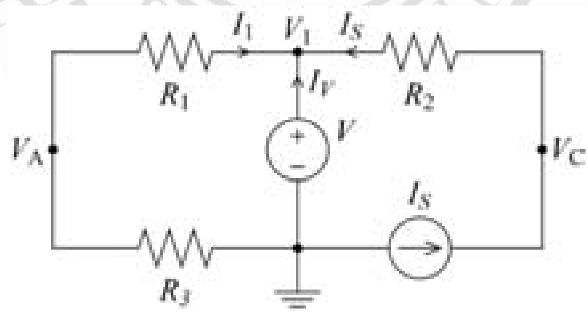
Struja I_{mn} kroz granu koja se nalazi između čvorova *m* i *n*, a u kojoj je otpornik otpornosti *R*, može da se izračuna po Omovom zakonu:

$$I_{mn} = \frac{V_m - V_n}{R} \tag{84}$$

Broj nepoznatih napona u sistemu je uvek za jedan manji od broja čvorova, zato što se svi naponi računaju u odnosu na referentni čvor. Da bi sistem imao rešenje, broj linearnih jednačina koje treba postaviti je za jedan manji od broja čvorova. Dva čvora koji su kratko spojena treba analizirati kao jedan čvor. Formirani sistem jednačina za kolo sa *n* čvorova izgleda ovako:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{R_{11}}V_1 + \frac{1}{R_{12}}V_2 + \ldots + \frac{1}{R_{1(n-1)}}V_{n-1} \\
I_2 &= \frac{1}{R_{21}}V_1 + \frac{1}{R_{22}}V_2 + \ldots + \frac{1}{R_{2(n-1)}}V_{n-1} \\
&\ldots \\
I_{n-1} &= \frac{1}{R_{(n-1)1}}V_1 + \frac{1}{R_{(n-1)2}}V_2 + \ldots + \frac{1}{R_{(n-1)(n-1)}}V_{n-1}
\end{aligned} \tag{85}$$

Posmatrajmo primer kola sa slike 4.4. koja je nacrtana uz manje modifikacije oznaka na slici 4.10.



Slika 4.10. Primer električnog kola u analizi sa jednom jednačinom.

Napon čvora koji je označen sa V_1 jednak je naponu naponskog generatora *V*.

Za čvorove koji povezuju samo dve grane nije potrebno da se piše posebna jednačina, zato što struja koja ulazi u čvor ima istu vrednost kao i struja koja izlazi iz čvora. Za redno vezane otpornike R_{13} možemo da koristimo izraz za jednu granu koja ima redno vezana dva otpornika

$$R_{13} = R_1 + R_3 \tag{86}$$

Struju kroz redno vezane otpornike R_{13} možemo da odredimo primenom Omovog zakona. Znak minus je zato što je usvojeni pozitivni polaritet napona V_1 u čvoru u koji ulazi struja I_1

$$I_1 = -\frac{V}{R_1 + R_3} \tag{87}$$

Struja kroz otpornik R_2 koja ulazi u čvor u kome je označen napon V_1, ista je kao ona koju stvara strujni izvor I_S.

Struje koje ulaze u čvor u kome je označen napon V_1, izračunavamo po prvom Kirhofovom zakonu

$$I_1 + I_V + I_S = 0 \tag{88}$$

Struja kroz naponski generator se dobija iz prethodne jednačine, obzirom da su poznate dve preostale struje

$$I_V = -I_1 - I_S = \frac{V}{R_1 + R_3} - I_S \tag{89}$$

Napon u čvoru koji se nalazi između otpornika R_1 i R_3, V_A, izračunava se korišćenjem izraza za razdelnik napona. Napon u čvoru koji se nalazi između otpornika R_2 i strujnog generatora I_S, V_C, izračunava se po drugom Kirhofovom zakonu

$$V_C = V + R_2 I_S \tag{90}$$

Iz ove analize se vidi kako se primenjuju pravila za transformacije otpornosti otpornika, ali i kako se izbegava da se postavljaju jednačine koje sadrže struju naponskog generatora ili napon strujnog generatora. Time se smanjuje broj nepotrebnih jednačina i ovo električno kolo se direktno rešava bez upotrebe sistema linearnih jednačina.

4.8 Linearna vremenski nepromenljiva kola: principi superpozicije i homogenosti

Rešavanje nekih klasa linearnih vremenski nepromenljivih kola može biti značajno pojednostavljeno kada se u analizi primene neka pravila. Pod pojmom vremenski nepromenljiv se podrazumeva da vrednosti elemenata neće menjati svoja osnovna svojstva tokom vremena. Na primer, otpornost otpornika, kapacitivnost kondenzatora, induktivnost kalema, vrednost napona koji daje naponski izvor, ili konstanta zavisnosti izvora od kontrolne veličine se ne menjaju sa vremenom. Iako se ove vrednosti mogu menjati pod uticajem različitih faktora, kao što je promena temperature okruženja u kome se nalazi neki elemenat, te promene su spore u odnosu na period analize i praktično nemaju uticaj. U situacijama kada su promene vrednosti elemenata brze u vremenu, primenjuju se drugačije metode analize.

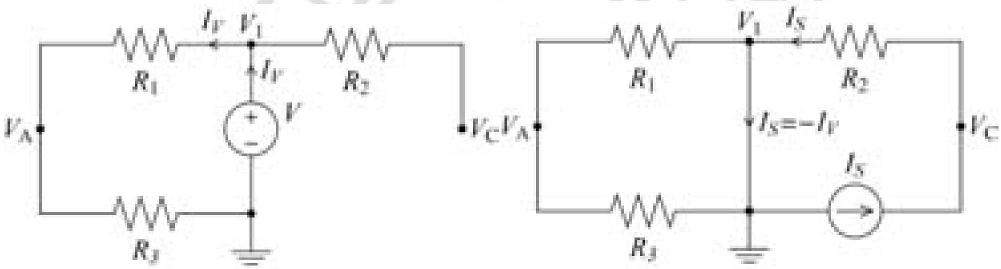
Jedna grupa pravila za linearna kola bazirana je na principima superpozicije i homogenosti.

Princip superpozicije omogućava da se u linearnom kolu sa više nezavisnih izvora struje kroz sve elemente i naponi svih čvorova kola mogu predstaviti kao algebarski zbir doprinosa svakog pojedinačnog nezavisnog izvora. Kada se određuje struja koja nastaje pod uticajem jednog izvora, preostali nezavisni naponski izvori se zamenjuju kratkim spojevima, a preostali nezavisni strujni izvori se raskidaju iz kola, odnosno predstavljaju se otvorenim vezama. Zavisni izvori se ne smeju eliminisati iz kola.

Primena principa superpozicije zahteva rešavanje sistema jednačina za svaki nezavisni izvor posebno, ali su kola značajno jednostavnija zbog kratkog spoja za ostale naponske izvore i otvorene veze za ostale strujne izvore.

Još jedna pogodnost kod rešavanja kola korišćenjem principa homogenosti jeste u tome da se jednom izračunata vrednost za napon između čvorova ili struju kroz element kola, za poznatu jednu nezavisnu pobudu, množi (skalira) istom konstantom kojom se skalira vrednost izvora. Dokaz principa homogenosti dobija se iz linearnosti sistema jednačina koje opisuju kolo.

Posmatrajmo primer kola sa slike 4.4. koja je nacrtana kada je izostavljen uticaj strujnog i naponskog generatora. Modifikacije originalnog kola su date na slici 4.11. Na slici levo je eliminisan uticaj strujnog izvora tako što je strujni element predstavljen otvorenim kolom. Na slici desno je izostavljen naponski element tako što su kratko spojeni čvorovi između kojih je bio naponski izvor. Pretpostavimo da je potrebno da se izračunaju naponi V_A i V_B, kao i struja I_V.



Slika 4.11. Primer električnog kola u analizi sa jednom jednačinom.

Pošto je struja jednaka nuli kroz otpornik R_2, struja kroz naponski generator se izračunava kao struja kroz rednu vezu dva otpornika R_1 i R_3, a napon V_A kao napon razdelnika napona. Napon V_C je jednak naponu V zato što je struja kroz R_2 jednaka nuli, zbog čega je i napon na ovom otporniku takođe jednak nuli.

$$V_{\mathrm{A,\,bez}\,I_S} = \frac{R_3}{R_1+R_3}V \tag{91}$$

$$V_{\mathrm{C,\,bez}\,I_S} = V \tag{92}$$

$$I_{V,\,\mathrm{bez}\,I_S} = \frac{V}{R_1+R_3} \tag{93}$$

Prema slici 4.11. desno, napon u čvoru V_1 je jednak nuli jer je čvor kratko spojen na masu. Primenom pravila za razdelnik napona sa otpornicima otpornika R_1 i R_3 napon je jednak nuli u V_A. Napon u čvoru V_C je jednak naponu na otporniku R_2 jer je V_1 jednak nuli. Struja u grani u kojoj je bio naponski izvor jednaka je negativnoj struju strujnog izvora, zato što je usvojeni smer za struju kroz naponski izvor bio u suprotnom smeru od stvarnog toka struje.

$$V_{\mathrm{A,\,bez}\,V} = 0 \tag{94}$$

$$V_{\mathrm{C,\,bez}\,V} = R_2 I_S \tag{95}$$

$$I_{V,\,\mathrm{bez}\,V} = -I_S \tag{96}$$

Naponi i struje se izračunavaju kao zbir napona i struja koje stvaraju svaki izvor posebno:

$$V_{\mathrm{A}} = V_{\mathrm{A,\,bez}\,I_S} + V_{\mathrm{A,\,bez}\,V} = \frac{R_3}{R_1 + R_3} V \tag{97}$$

$$V_{\mathrm{C}} = V_{\mathrm{C,\,bez}\,I_S} + V_{\mathrm{C,\,bez}\,V} = V + R_2 I_S \tag{98}$$

$$I_V = I_{V,\,\mathrm{bez}\,I_S} + I_{V,\,\mathrm{bez}\,V} = \frac{V}{R_1 + R_3} - I_S \tag{99}$$

Iz ovog primera se vidi da je rešavanje električnog kola jednostavnije kada se koriste pravila i transformacije. Treba napomenuti da kroz paralelnu vezu otpornika sa kratkim spojem treba primeniti pravila za strujni razdelnik, gde je u jednoj grani redna veza dva otpornika R_1 i R_3, a u drugoj kratak spoj, zbog čega je i struja kroz otpornike jednaka nuli. Kada je otvorena veza, tada ne postoji zatvoreni graf kola i formalno ne bi mogli da primenimo drugi Kirhofov zakon; u ovim slučajevima treba primeniti pravilo da je struja jednaka nuli u elementima koji su povezani sa ostatkom kola, i tada se može izračunati i napon na onom pristupu elementa gde je otvorena veza.

4.9 Transformacija izvora

Idealni naponski i strujni izvori se često koriste u izračunavanjima zato što značajno smanjuju složenost problema u analizama, a i stvarne karakteristike kola nisu značajnije različite od idealnih modela. Realni izvori se moraju primeniti kada nije moguće modelovati kolo idealnim elementima (paralelno vezana dva različita idealna naponska izvora, redno vezana dva različita strujna izvora). Naravno, kada je i tačnost rezultata važna, realni modeli su nezaobilazni.

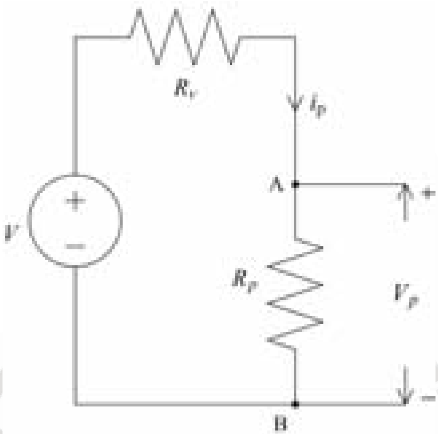
Realni naponski izvor prikazan je na slici 4.12. Realni naponski izvor ima konačnu unutrašnju otpornost R_V na red sa idealnim naponskim izvorom V. Realni strujni izvor prikazan je na slici 4.13., i on ima konačnu unutrašnju otpornost R_I paralelno sa idealnim strujnim izvorom, I. Potrošač koji je prikazan na slikama 4.12. i 4.13., R_P, treba da ilustruje ostatak električnog kola koje je priključeno na naponski ili strujni izvor.

U nekim slučajevima je lakše rešiti električno kolo (smanjiti broj grana ili broj čvorova kola) ako se pretvori strujni izvor u ekvivalentni naponski izvor, i obrnuto. Da bi oba ova električna izvora obezbedila isti napon na potrošaču, i istu struju kroz potrošač R_P, napon i struja nezavisnih izvora treba da zadovolje neke uslove. Primenom Omovog zakona, isti napon na potrošaču i ista struja kroz potrošač se dobijaju kada su ispunjeni sledeći uslovi:

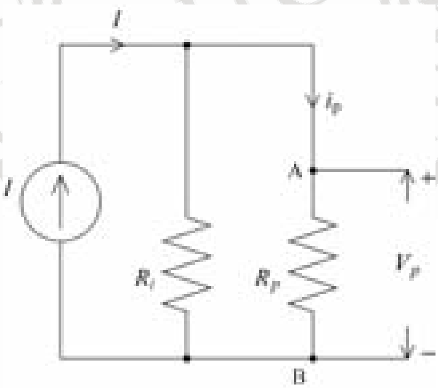
$$R_V = R_I \tag{100}$$

$$I = \frac{V}{R_V} \tag{101}$$

$$V = R_I I \tag{102}$$



Slika 4.12. Realni naponski izvor.



Slika 4.13. Realni strujni izvor.

Ako su otpornosti naponskog i strujnog izvora iste, a napon naponskog izvora i struja strujnog izvora određene sa prethodne dve jednačine, tada su napon i struja na potrošaču:

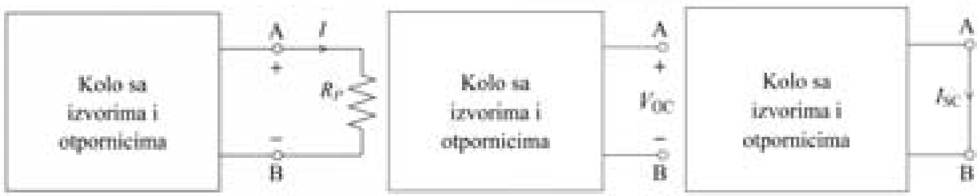
$$I_P = \frac{V}{R_V + R_P} = \frac{R_I}{R_I + R_P} I \tag{103}$$

$$V_P = \frac{R_P}{R_V + R_P} V = \frac{R_I R_P}{R_I + R_P} I \tag{104}$$

4.10 Tevenenova i Nortonova teorema

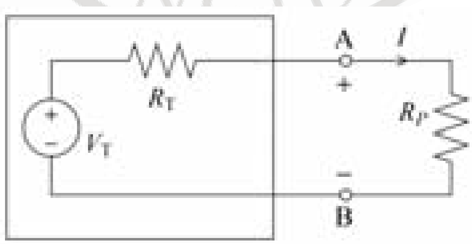
Osim izvora koji daju energiju kolu, i elemenata kola kojima se ostvaruje neka funkcija kola, postoji potreba da se identifikuje element na kome se prihvata energija i koristi na određeni način. Element koji prima energiju od kola naziva se potrošač i najčešće se obeležava sa R_P. Cilj je da se izvori i električno kolo prikažu posebno (kao jedan blok koji sadrži različite elemente, izvore i otpornike) a posebno potrošač.

Šema kola sa izvorima i otpornicima, gde je posebno izdvojen potrošač, nacrtana je na slici 4.14. levo. Ukoliko se raskine veza koja povezuje potrošač, između priključaka kola može da se izmeri ili izračuna napon V_{OC}, koji se naziva napon otvorenog kola. Ako kratko spojimo izlazne krajeve kola, možemo da izmerimo ili izračunamo struju I_{SC}, koju nazivamo struja kratkog spoja.



Slika 4.14. Određivanje napona otvorenih krajeva i struje kratkog spoja.

Na osnovu napona otvorenog kola V_{OC} i struje kratkog spoja I_{SC}, električno kolo se može predstaviti ekvivalentnim nezavisnim idealnim naponskim izvorom V_T i rednim otpornikom R_T, ili ekvivalentnim nezavisnim idealnim strujnim izvorom I_N kome je paralelno vezan otpornik R_N, kao što je to pokazano za realni naponski izvor i realni strujni izvor. Ove ekvivalencije se nazivaju Tevenenova i Nortonova teorema. Ekvivalentna kola pokazuju kako se celo kolo, osim potrošača, može zameniti ekvivalentnim realnim naponskim izvorom (Tevenenova teorema) ili strujnim izvorom (Nortonova teorema). Napon na potrošaču i struja kroz potrošač R_P imaju iste vrednosti u originalnom kolu i u ekvivalentnim kolima.



Slika 4.15. Tevenenovo ekvivalentno kolo.

Na osnovu nacrtanih šema na slikama 4.14. i 4.15., kada se u Tevenenovom ekvivalentnom kolu raskine veza sa potrošačem, dobija se vrednost za nezavisni izvor.

$$V_T = V_{OC} \tag{105}$$

Kada je potrošač kratko spojen, može da se izračuna Tevenenova otpornost

$$R_T = \frac{V_{OC}}{I_{SC}} \tag{106}$$

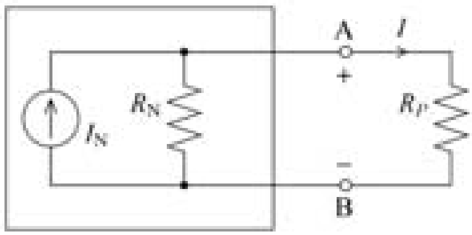
Kada se uporede šema Nortonovog ekvivalentnog kola i slika 4.14. dobija se

$$I_N = I_{SC} \tag{107}$$

Kada je potrošač kratko spojen, može da se izračuna Nortonova otpornost

$$R_N = \frac{V_{OC}}{I_{SC}} \tag{108}$$

Tevenenovo i Nortonovo ekvivalentno kolo se dobijaju i primenom transformacija izvora.



Slika 4.16. Nortonovo ekvivalentno kolo.

Tevenenova teorema može da se iskaže na sledeći način: Svako električno kolo koje sadrži otpornike, kao i zavisne i nezavisne izvore, može se zameniti ekvivalentnim kolom koje se sastoji od idealnog naponskog izvora V_T i redno vezanog otpornika R_T. Napon izvora je jednak naponu kola sa isključenim potrošačem V_{OC}. Otpornost je jednaka količniku napona kola sa isključenim potrošačem V_{OC} i struje kroz kratko spojeni potrošač I_{SC}.

Nortonova teorema se odnosi na ekvivalentni strujni izvor: Svako električno kolo sa otpornicima i zavisnim i nezavisnim izvorima, može se predstaviti ekvivalentnim kolom koje se sastoji od idealnog strujnog izvora I_N i paralelno povezanog otpornika R_N. Struja izvora je jednaka struji kroz kratkospojeni potrošač I_{SC}. Otpornost je jednaka količniku napona kola sa isključenim potrošačem V_{OC} i struje kroz kratkospojeni potrošač I_{SC}).

Treba obratiti pažnju da u slučaju kratkog spoja na potrošaču, kada je na krajevima nepoznatog električnog kola idealni naponski generator, struja teorijski može biti beskonačno velika, ili veoma velika kroz merni instrument kojim se meri ova struja, i tada može doći do oštećenja instrumenta. Slično se dešava ako se raskida veza koja je redno vezana sa idealnim strujnim generatorom, jer tada teorijski napon može biti izuzetno veliki.

Ako se ova metoda koristi za izračunavanje kada električno kolo sadrži samo nezavisne izvore, i ne sadrži zavisne izvore, tada se izračunavanje ekvivalentne otpornosti R_T ili R_N može dodatno uprostiti. Na krajeve kola A i B priključi se idealni naponski generator V_T (potrošač može da se izostavi zato što je napon na njegovim pristupnim krajevima određen naponom izvora), svi ostali nezavisni naponski izvori u kolu se zamenjuju kratkim spojem, a nezavisni strujni izvori se raskidaju. Nakon što se odredi struja kroz test generator I_T, ekvivalentna otpornost postaje R_T=V_T/ I_T.

Ako je pogodnije, umesto potrošača može da se poveže test strujni izvor, I_T, a sličnim postupkom se odredi napon V_T. Izbor postupka zavisi od toga kolika uprošćenja donosi jedan ili drugi metod.

Ukoliko se može pristupiti samo krajevima električnog kola čije ekvivalentno Tevenenovo ili Nortonovo kolo treba da se odredi, tada nije moguće kratko spajati naponske i raskidati strujne izvore u električnom kolu u kome ne postoji pristup elementima. Ova metoda sa eliminacijom nezavisnih izvora ima smisla samo za poznata kola. U praksi su izvori realni, zbog čega ne može doći do pojave prevelike struje ili prevelikog napona, ali ipak treba biti oprezan pri primeni ove metode.

5 Kola sa promenljivim strujama

U električnim kolima često dolazi do potrebe da se promene veze između elemenata, što se može modelovati otvaranjem ili zatvaranjem prekidača u kolu. Teorijski, analiza kola podrazumeva da je pojava poznata od beskonačnosti do danas, na primer ako se element modeluje integralom. Da bi izbegli previše komplikovan matematički aparat, pojave u kolima se modeluju od određenog trenutka, i to se predstavlja uključivanjem prekidača kojim se neki element povezuje u kolo i od tog trenutka se posmatra šta se dešava sa naponima i strujama u kolu. Praktičan značaj imaju pojave koje se dešavaju od trenutka promene, a sve dok svi naponi i struje prestanu da se menjaju – odnosno dostignu vrednost koja je praktično nepromenljiva. Važno je znati kako se menjaju vrednosti od trenutka uključenja ili isključenja nekog prekidača, i koje vreme protekne do trenutka kada su te promene toliko male da nije potrebno da i dalje računamo njihove vrednosti. U ovom poglavlju biće korišćeni matematički modeli koji se zasnivaju na trenutnim promenama, iako se u praksi ove promene postepeno menjaju iz jedne vrednosti u drugu. Ovakva analiza značajno olakšava izračunavanja, a suština promene koje se dešavaju još uvek su dovoljno tačne.

Posle naglih promena kratkim spajanjem nekih čvorova u kolu ili raskidanjem veza u kolu, nastaje promena napona i struja u kolu koja se odvija po određenim zakonitostima. Analiza kola kod kojih je došlo do promena elemenata, ili veza između elemenata, naziva se analiza prelaznog režima, ili analiza kola sa promenljivim strujama. Kako se ovakve analize po pravilu koriste da se utvrdi šta se dešava između trenutka uključenja ili isključenja prekidača u kolu, ova analiza u stvari je analiza prelaznih pojava.

U analizi prelaznih pojava, dva pasivna elementa, kondenzator i kalem, imaju zavisnost napona i struje koje su srazmerne izvodu i integralu, dok treći element – otpornik – ima konstantnu vezu između napona i struje. Sva tri elementa su linearna jer kod njih relacija između struje i napona predstavljena linearnim diferencijalnim jednačinama. Kalem i kondenzator imaju sposobnost akumulacije energije. Kondenzator ima sposobnost akumuliranja energije u električno polje, a kalema u magnetsko polje. U zavisnosti od položaja prekidača, u jednom periodu se energija može predati ovim elementima, a u nekom drugom periodu ne mogu tu energiju da vrate ostatku kola kada se na adekvatan način povežu preko novog položaja prekidača. Zbog osobine akumulacije energije, kalem i kondenzator se nazivaju i reaktivni elementi, za razliku od otpornika koji energiju koju dobije od kola pretvara u toplotnu i ne može da je vrati u kolo.

5.1 Kondenzator

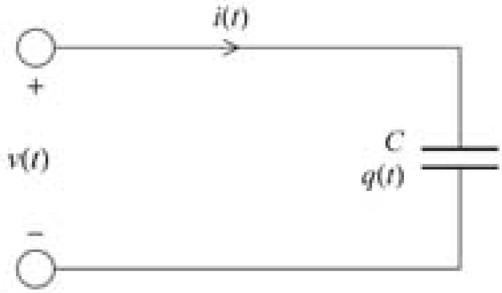
Kondenzator se sastoji od dve provodne površine između kojih se nalazi dielektrik. Opterećenje kondenzatora srazmerno je naponu na kondenzatoru, a za konstantu srazmernosti koristi se simbol C:

$$Q = CV \tag{109}$$

U prethodnom izrazu C se naziva kapacitivnost ili kapacitet kondenzatora.

Simbol kondenzatora i referentni smerovi za napon i struju prikazani su na slici 5.1.

Kada se napon na kondenzatoru ne menja, nema stalne struje kroz kondenzator, pošto su elektrode kondenzatora izolovane dielektrikom kroz koji ne može da teče struja. Stoga se pri konstantnoj pobudi kondenzator ponaša kao otvorena veza.



Slika 5.1. Simbol kondenzatora i referentni smerovi za struju i napon.

Kako se napon na kondenzatoru menja sa vremenom, tako se menja i njegovo električno opterećenje. Sve vremenski promenljive veličine biće označene malim slovima:

$$q(t) = Cv(t) \tag{110}$$

Po definiciji, struja je jednaka prvom izvodu električnog opterećenja po vremenu:

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \tag{111}$$

Ako se napon na kondenzatoru menja to znači da se i opterećenje na kondenzatoru menja, zbog čega postoji i struja kroz kondenzator.

Iz poslednje jednačine proizilazi da nije moguće naglo promeniti napon na kondenzatoru zato što bi takva promena zahtevala beskonačno veliku struju kroz kondenzator.

Integracijom prethodnog izraza dobija se:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{C} i(x)\,\mathrm{d}x \tag{112}$$

U integralu je uvedena pomoćna promenljiva x koja se koristi za integraciju vremena od $-\infty$ do trenutka t da bi dobili napon $v(t)$. Uobičajeno je da znamo vremenski oblik struje od nekog početnog trenutka t_0, a da je poznata samo vrednost napona u tom trenutku. Stoga se prethodni izraz može napisati u drugačijem obliku

$$v(t)=\int_{-\infty}^{t_0}\frac{1}{C}i(x)\,\mathrm{d}x+\int_{t_0}^{t}\frac{1}{C}i(x)\,\mathrm{d}x=v(t_0)+\int_{t_0}^{t}\frac{1}{C}i(x)\,\mathrm{d}x \tag{113}$$

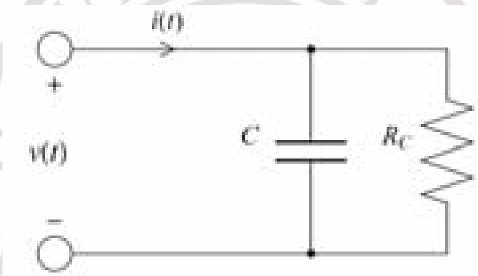
Vrednost napona $v_0=v(t_0)$ u početnom trenutku t_0 naziva se početni napon na kondenzatoru. Početni trenutak t_0 možemo proizvoljno da izaberemo.

Energija akumulirana u električnom polju kondenzatora se može odrediti iz snage koja se predaje kondenzatoru:

$$w_c(t)=\int_{-\infty}^{t}p_c(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{t}v(x)C\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}Cv^2(t) \tag{114}$$

U praktičnim primenama, kapacitet kondenzatora može da bude od pikofarada (1 pF=10^{-12} F) do farada. Realni kondenzatori nemaju idealni dielektrik, zbog čega kroz kondenzator teče mala struja ako na kondenzatoru postoji napon V. To znači da postoji slaba provodnost između dve provodne ploče kondenzatora.

Proticanje veoma male struje kroz dielektrik može da se modeluje vezivanjem otpornika velike otpornosti paralelno idealnom kondenzatoru, kao što je prikazano na slici 5.2.



Slika 5.2. Realni kondenzator.

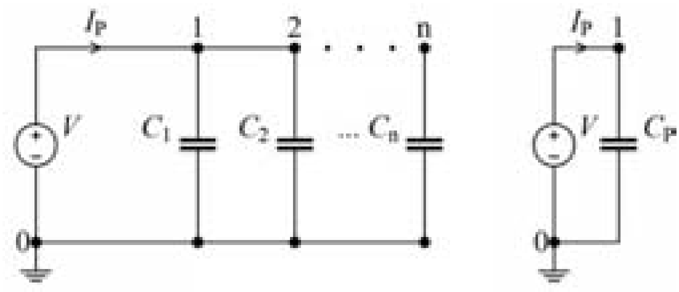
Kondenzatori se mogu vezivati paralelno ili redno, kao i svi ostali elementi u kolu. Koristeći prvi Kirhofov zakon, pokazuje se da je ekvivalentna kapacitivnost paralelne veze kondenzatora jednaka zbiru kapacitivnosti paralelno vezanih kondenzatora (videti sliku 5.3.). Pošto je isti napon na priključcima svih kondenzatora, tada je ukupno naelektrisanje svih kondenzatora jednako zbiru pojedinačnih naelektrisanja:

$$C_{\mathrm{P}}=C_1+C_2+\cdots+C_{\mathrm{n}} \tag{115}$$

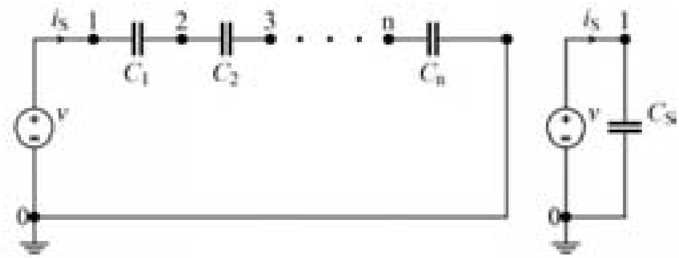
Korišćenjem drugog Kirhofovog zakona, pokazuje se da je recipročna vrednost ekvivalentne kapacitivnosti serijske veze kondenzatora jednaka zbiru recipročnih vrednosti kapacitivnosti redno vezanih kondenzatora (videti sliku 5.4.):

$$\frac{1}{C_{\mathrm{S}}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_{\mathrm{n}}} \tag{116}$$

Složena kola sa kondenzatorima mogu se predstaviti ekvivalentnim kolima koristeći pravila za rednu i paralelnu vezu kondenzatora. U suštini, pravila za ekvivalentna kola kondenzatora su slična kao za provodnosti.



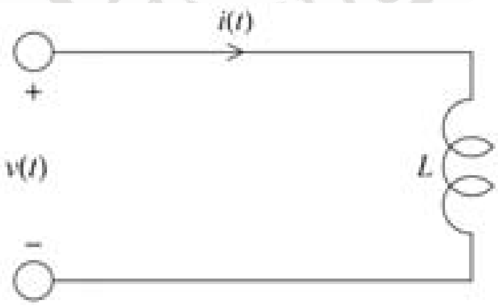
Slika 5.3. Paralelna veza kondenzatora.



Slika 5.4. Redna veza kondenzatora.

5.2 Kalem

Kalem se sastoji od provodne žice koja je namotana oko nekog jezgra. Jezgro najčešće ima oblik valjka i može da bude od nemagnetnog ili magnetnog materijala. Simbol kalema je prikazan na slici 5.5.



Slika 5.5. Simbol kalema i referentni smerovi za struju i napon.

Na istoj slici su prikazani referentni smerovi za napon na kalemu i struju kroz kalem. Relacija između napona i struje kalema može se opisati diferencijalnom jednačinom u kojoj je L konstanta srazmernosti:

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \qquad (117)$$

U prethodnom izrazu L se naziva induktivnost kalema.

Prvi izvod konstante je nula, zbog čega je napon na kalemu nula u situaciji kada je struja kroz kalem konstantna. To znači da se kalem ponaša kao kratak spoj u stalnom jednosmernom režimu kada su naponi i struje nepromenljivi sa vremenom.

Ako je potrebno da se odredi struja u funkciji napona, tada treba integraliti obe strane prethodne jednačine, i tada se dobija

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(x)\,\mathrm{d}x \tag{118}$$

Kako nije moguće znati kako izgleda funkcija napona kada vreme teži –∞, a to u praktičnim primenama i nije od značaja, to se proizvoljno može odrediti vreme od kada posmatramo pojavu, na primer od trenutka uključenja nekog prekidača, tako da se integral može podeliti u dva dela:

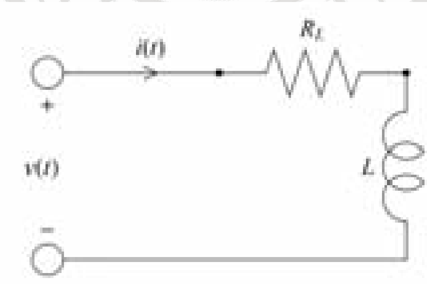
$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0} v(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(x)\,\mathrm{d}x = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(x)\,\mathrm{d}x \tag{119}$$

Vreme t_0 treba izabrati tako da može da se odredi ili izmeri struja u trenutku t_0. Struja $i(t_0)$ naziva se početna struja kroz kalem.

Energija akumulirana u magnetskom polju kalema može da se odrediti ako je poznata snaga koja se predaje kalemu, ili ako je poznata struja kroz kalem:

$$w_L(t) = \int_{-\infty}^{t} p_L(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{t} L\frac{\mathrm{d}i(x)}{\mathrm{d}x} i(x)\,\mathrm{d}x = L\int_{-\infty}^{t} i(x)\,\mathrm{d}i(x) = \frac{1}{2}Li^2(t) \tag{120}$$

Induktivnosti kalemova, koje se pojavljuju u praktičnim primenama, obično su u granicama od μH do nekoliko H.



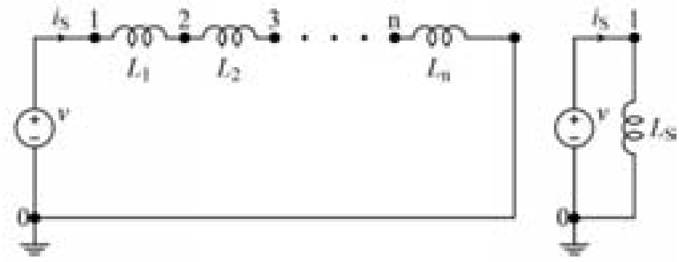
Slika 5.6. Realni kalem.

Realni kalemovi imaju malu, ali konačnu otpornost žice. Zato se realni kalem modeluje vezivanjem otpornika male otpornosti na red sa kalemom, kao što je ilustrovano na slici 5.6.

Kalemovi se mogu povezivati paralelno ili redno.

Korišćenjem drugog Kirhofovog zakona, pokazuje se da je ekvivalentna induktivnost redne veze kalemova jednaka zbiru vrednosti induktivnosti kalemova koji su redno vezani, kao što je pokazano ma slici 5.7.:

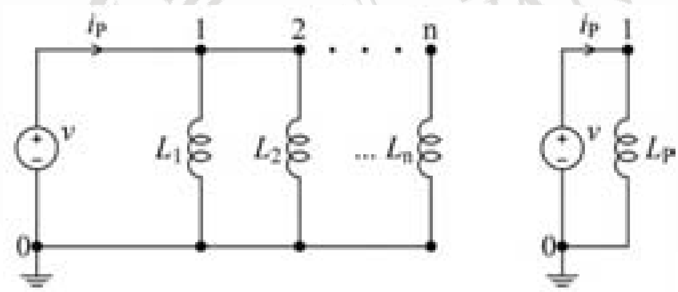
$$L_S = L_1 + L_2 + \cdots + L_n \tag{121}$$



Slika 5.7. Redna veza kalemova.

U slučaju paralelne veza kalemova, kao što je prikazano na slici 5.8., korišćenjem prvog Kirhofovog zakona dobija se da je recipročna vrednost ekvivalentne induktivnosti paralelne veze kalemova jednaka zbiru recipročnih vrednosti induktivnosti koje su paralelno vezane:

$$\frac{1}{L_P} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n} \tag{122}$$



Slika 5.8. Paralelna veza kalema.

5.3 Diferencijalna jednačina prvog reda

Da bi uspešno rešili određivanje napona i struja električnih kola sa jednim otpornikom i jednim kondenzatorom ili kalemom u situacijama kada dolazi do promene napona ili struje nezavisnih izvora, potrebno je poznavanje matematičkog rešavanja diferencijalne jednačine prvog reda. Opšti oblik jednačine prvog reda je sledeći

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = f(t) \tag{123}$$

Veličina koju treba odrediti iz prethodne jednačine je označena sa x i ona je funkcija vremena t. Malo slovo a je konstanta a funkcija $f(t)$ može biti bilo koja funkcija vremena. Za struje i napone u prelaznom režimu, funkcija $f(t)$ je konstanta a može biti i jednaka nuli.

U opštem slučaju treba pronaći sva rešenja prethodne jednačine $x(t)$. Promenljiva veličina se može predstaviti zbirom dva rešenja, od kojih se jedno naziva prinudno rešenje $x_p(t)$, a drugo prirodno rešenje $x_c(t)$:

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t) \tag{124}$$

Kada se prinudno rešenje $x_p(t)$ zameni u jednačinu dobija se da ono treba da bude rešenje kada postoji funkcija $f(t)$, odnosno funkcija $f(t)$ određuje oblik rešenja $x_p(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}x_p(t)}{\mathrm{d}t} + a x_p(t) = f(t) \tag{125}$$

Prirodno rešenje $x_c(t)$ treba da odgovara jednačini koja zavisi samo od elemenata kola a da ne zavisi od funkcije $f(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}x_c(t)}{\mathrm{d}t} + a x_c(t) = 0 \tag{126}$$

Da bi prethodna jednačina bila jednaka nuli oba sabirka treba da imaju istu zavisnost od vremena t. Funkcija koja ima isti oblik nakon diferenciranja ima opšti oblik:

$$x_c(t) = K_2 e^{-at} \tag{127}$$

Prinudno rešenje treba da ima isti oblik kao funkcija $f(t)$ a to je u ovom slučaju konstanta zato što u ovom delu analize posmatramo samo rešenja kada je $f(t)$ konstanta:

$$x_p(t) = K_1 \tag{128}$$

$$f(t) = A = \mathrm{const} \tag{129}$$

Uobičajeno je da se konstanta označava sa A ili const. Sada možemo da posmatramo kompletno rešenje diferencijalne jednačine u kome su još uvek nepoznate konstante K_1, K_2 i a, gde je a=1/τ:

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau} \tag{130}$$

Na osnovu poznavanja osobina kola, mogu se odrediti vrednosti promenljive x posle dovoljno dugo vremena kada eksponencijalni član postaje jednak nuli. Ta vrednost jednaka je konstanti K_1:

$$K_1 = \lim_{t\to\infty} x(t) = x(\infty) \tag{131}$$

Trenutak t_0 možemo proizvoljno da izaberemo, na primer, pretpostavimo da je to t_0=0. Ovu vrednost možemo da iskoristimo za određivanje konstante K_2:

$$\lim_{t\to 0} x(t) = x(0) = K_1 + K_2 = x(\infty) + K_2 \tag{132}$$

Eliminacijom K_1 dobija se:

$$K_2 = x(0) - x(\infty) \tag{133}$$

Konačno se dobija da je kompletno rešenje:

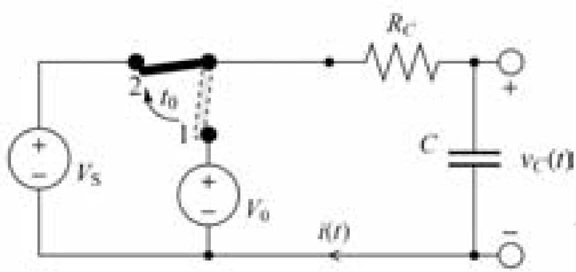
$$x(t) = x(\infty) + (x(0) - x(\infty)) e^{-t/\tau} \tag{134}$$

Konstanta *a* zavisi od vrednosti elemenata kola što se dobija iz diferencijalne jednačine.

5.4 Kola prvog reda sa kondenzatorima i kalemovima

5.4.1 Kola prvog reda sa kondenzatorima i otpornicima

Električna kola prvog reda mogu da sadrže izvore, otpornike i jedan kondenzator (RC kola) ili otpornike i jedan kalem (RL kola). Primer RC kola ilustrovan je na slici 5.9.



Slika 5.9. Primer RC kola prvog reda.

Kolo na slici se sastoji od redne veze otpornika i kondenzatora koji su vezani na nezavisni naponski izvor konstantnog napona V_0 do trenutka t_0=0. Prekidač je u položaju 1 do trenutka 0. Ako je prekidač bio dovoljno dugo u položaju 1, kondenzator ne dozvoljava protok struje i, zbog čega je potencijal na kondenzatoru jednak V_0. U trenutku 0 prekidač se prebaci u položaj 2, i sada je redno kolo otpornika i kondenzatora priključeno na drugi napon V_S. Od trenutka t_0=0 postoji potencijalna razlika na krajevima otpornika R_C, zbog čega kroz otpornik teče struja. Posle dovoljno dugo vremena, na primer ako pretpostavimo da $t\to\infty$, kondenzator C će na svojim krajevima imati napon V_S, tako da ne postoji razlog da teče struja kroz otpornik R_C. Ono što znamo za ovo kolo jeste napon u trenutku 0 i napon posle dovoljno dugo vremena, kao i da napon na kondenzatoru ne može naglo da promeni vrednost. Struja koja teče u trenutku prebacivanja prekidača iz položaja 1 u položaj 2 zavisi od naponskih izvora i otpornosti R_C, a to je $i(0)=(V_S-V_0)/R_C$.

Da bi posmatrali prelazni režim kod RC kola prvog reda, polazna pretpostavka je da je prekidač bio otvoren, a da se zatvara u trenutku t=0. Promena položaja prekidača menja element u kolu, tako što se umesto naponskog izvora V_0, u kolo vezuje novi naponski izvor V_S (koji se naziva i pobudni izvor). Ponašanje RC kola za t>0 može da se odredi korišćenjem naponskog Kirhofovog zakona:

$$\frac{1}{C}\left(\int_{-\infty}^{t} i(x)\,\mathrm{d}x\right) + R_C i(t) = V_S \tag{135}$$

Diferenciranjem prethodnog izraza po vremenu dobija se:

$$\frac{1}{C} i(t) + R_C \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{136}$$

Obe strane se podele sa R_C da bi se dobio oblik diferencijalne jednačine za koju smo odredili opšti oblik rešenja:

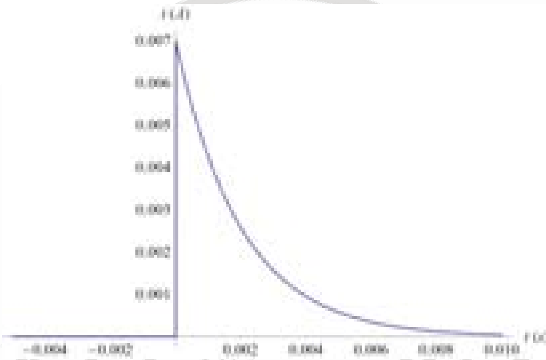
$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{R_C C}i(t)=0 \tag{137}$$

Kompletno rešenje za kolo sa slike 5.9 je dato sledećim izrazom:

$$i(t)=i(\infty)+(i(0)-i(\infty))e^{-t/R_C C}=\frac{V_S-V_0}{R_C}e^{-t/R_C C} \tag{138}$$

Sada može da se odredi i izraz za struju u bilo kom trenutku (slika 5.10):

$$i(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{V_S-V_0}{R_C}e^{-t/R_C C}, & t\geq 0\end{cases} \tag{139}$$

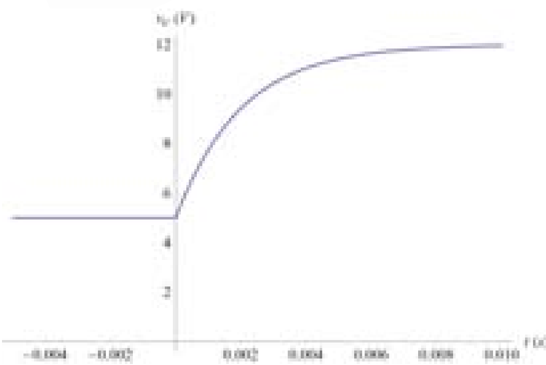


Slika 5.10. Struja kroz kondenzator za R_C=1kΩ, C=2μF, V_S=12V, V_0=5V.

Napon na krajevima kondenzatora se dobija izračunavanjem integrala od trenutka t=0:

$$v(t)=v(t_0)+\int_0^t \frac{1}{C}i(x)\,\mathrm{d}x=V_0+(V_S-V)e^{-t/R_C C} \tag{140}$$

Slika 5.11. ilustruje napon na kondenzatoru.



Slika 5.11. Napon na kondenzatoru za R_C=1kΩ, C=2μF, V_S=12V, V_0=5V.

Prethodne dve slike potvrđuju da u trenutku promene može nastati nagla promena struje, a da napon može imati samo kontinualnu promenu. Na primer kada se uključi kabl za napajanje prenosnih računara, koji u sebi imaju kondenzatore velike kapacitivnosti, može doći do varničenja zbog trenutne velike struje kada se kabl uključi u napojnu mrežu.

Iako ova analiza može izgledati komplikovano, do istih rezultata se može doći korišćenjem matematičkih softverskih alata. Prikazan je deo koda u programu Mathematica, odakle se vidi da je dovoljno prepisati diferencijalnu jednačinu, uz uslov kolika treba da bude struja u početnom trenutku 0, i sve to u prvoj liniji koda.

```
In[1]:=
solution = DSolve[{r x'[t] + 1/c x[t] == 0, x[0] == (Vs - V0)/r}, x[t], t];
i1 = x[t] /. solution[[1]][[1]];
% /. {c → C, Vs → V_S, V0 → V_0, r → R_c} // TraditionalForm
Out[3]//TraditionalForm=
```

$$-\frac{(V_0 - V_S)\, e^{-\frac{t}{C R_c}}}{R_c}$$

Ostale dve linije koda se koriste za izdvajanje rešenja i dodele nekoj varijabli, a zatim i zamena vrednosti radi lepšeg tradicionalnog prikaza rezultata. Izračunavanje integrala i crtanje slika za ovaj primer su takođe urađeni u ovom programu.

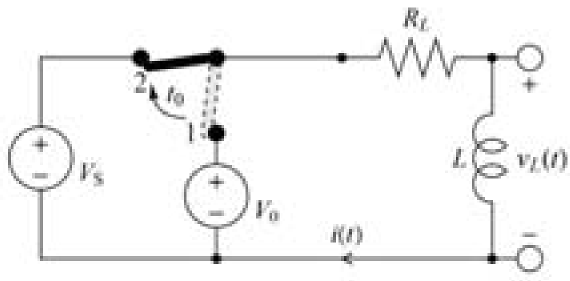
5.4.2 Kola prvog reda sa kalemovima i otpornicima

Primer jednog RL kola ilustrovan je na slici 5.12. Ponašanje RL kola za $t>0$ možemo odrediti korišćenjem drugog Kirhofovog zakona. Najpre možemo da izračunamo struju kalema za $t<0$ podrazumevajući da je prekidač bio dovoljno dugo u položaju 1. Kako je napon na kalemu v_L jednak nuli za nezavisni naponski izvor konstantnog napona V_0, tada je struja kroz kolo konstantna i iznosi

$$i(t) = \frac{V_0}{R_L},\ t < 0 \tag{141}$$

Nakon što se prekidač prebaci u položaj 2, i ostane dovoljno dugo u tom položaju, struja kroz kalem je ponovo konstantna zato što je napon na kalemu v_L jednak nuli:

$$\lim_{t\to\infty} i(t) = \frac{V_S}{R_L} \tag{142}$$



Slika 5.12. Primer RL kola prvog reda.

Na osnovu drugog Kirhofovog zakona može da se napiše

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+R_L i(t)=V_\mathrm{S} \tag{143}$$

Kada se obe strane prethodne jednačine podele sa L, dobija se

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{R_L}{L}i(t)=\frac{V_\mathrm{S}}{L} \tag{144}$$

Identifikacijom sa prirodnim rešenjem dobija se da je

$$a=\frac{R_L}{L} \tag{145}$$

Kada se prethodni izraz napiše kao vremenska konstanta, dobija se

$$\tau=\frac{L}{R_L} \tag{146}$$

Kompletno rešenje ima sledeći oblik za vreme veće od nule

$$i(t)=i(\infty)+(i(0)-i(\infty))e^{-tR_L/L}=\frac{V_S}{R_L}+\left(\frac{V_0}{R_L}-\frac{V_S}{R_L}\right)e^{-tR_L/L} \tag{147}$$

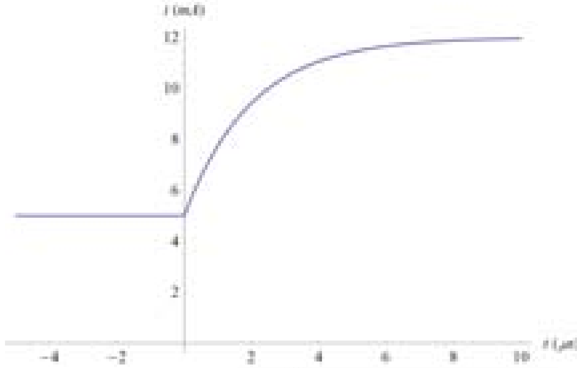
Kompletno rešenje za bilo koje vreme ima sledeće vrednosti

$$i(t)=\begin{cases}\dfrac{V_0}{R_L}, & t<0\\ \dfrac{V_S}{R_L}+\left(\dfrac{V_0}{R_L}-\dfrac{V_S}{R_L}\right)e^{-tR_L/L}, & t\geq 0\end{cases} \tag{148}$$

Napon na kalemu se nalazi određivanjem prvog izvoda struje po vremenu, $L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$,

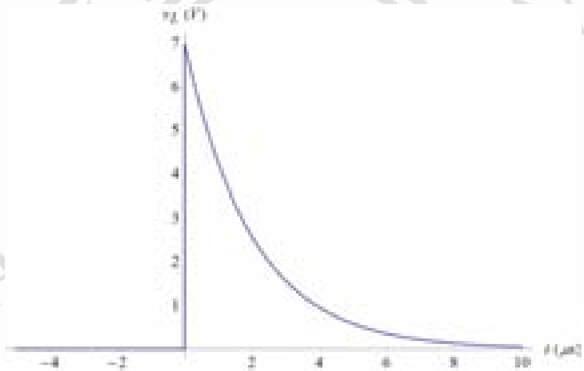
$$u_L(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ (V_S-V_0)e^{-tR_L/L}, & t\geq 0\end{cases} \tag{149}$$

Na slici 5.13. prikazana je struja kroz kalem, i ona ima kontinualnu promenu. Posle 10 μs struja je približno ponovo konstantna i nju određuje otpornost redno vezanog otpornika sa kalemom.



Slika 5.13. Struja kroz kalem za R_L=1kΩ, L=2mH, V_S=12V, V_0=5V.

Na slici 5.14. prikazan je napon na kalemu, i vidi se da postoji nagli skok napona u trenutku promene položaja prekidača.



Slika 5.14. Napon na kalemu za R_L=1kΩ, L=2mH, V_S=12V, V_0=5V.

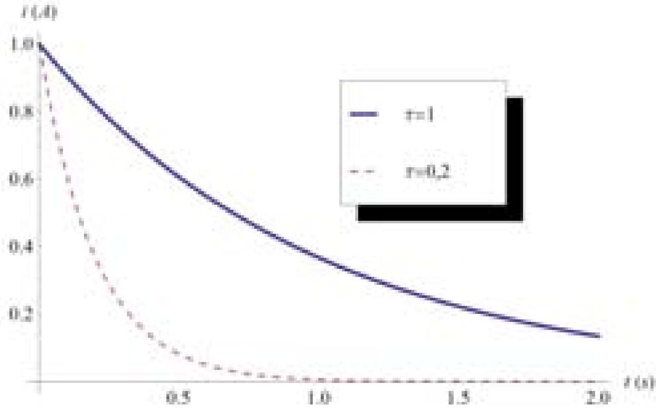
Posle 10 μs napon je približno ponovo jednak nuli zato što su promene struje veoma male.

Ovaj primer pokazuje da u kolima sa kalemom i prekidačima može doći do pojave velikog napona u slučaju da je otpornost koja je na red sa kalemom veoma velika, što može da dovede do oštećenja drugih elektronskih komponenti u kolu.

5.4.3 Opšte karakteristike kola prvog reda i postupak analize

Interesantno je razmotriti uticaj vremenske konstante na rad kola. Konstanta τ naziva se vremenska konstanta kola i ona je za RC kolo $\tau = RC$, dok je za RL kolo $\tau = L/R$. Vremenska konstanta kola određuje brzinu kojom se odvijaju promene napona ili struja u kolu. Za vreme jednako jednoj vremenskoj konstanti, $t=\tau$, napon ili struja se promene za približno 63% od ukupne moguće promene, dok se za vreme jednako pet vremenskih konstanti, $t=5\tau$, napon ili struja promene za približno 99%. Prelazni proces je praktično završen posle pet vremenskih konstanti.

Velika vremenska konstanta znači da se sporo odvijaju promene napona i struja u kolu. Mala vremenska konstanta znači da se brzo odvijaju promena u kolu. Za ilustraciju, na slici 5.15 su prikazani oblici rešenja diferencijalne jednačine prvog reda za struju, gde je struja izračunata za dve vrednosti vremenskih konstanti: τ=1 i τ=0,2. Ostali parametri isti: ravnotežno rešenje je K_1=0. a početna vrednost je K_2=1.



Slika 5.15. Brzine promene za vremenske konstante τ_1=1 i τ_2=0,2.

Rezime analize kola prvog reda:

1. Da bi se odredio početni napon na kondenzatoru ili početna struja kroz kalem, analizira se kolo pre promene stanja prekidača kao da kolo radi u režimu stalnih struja. Početni napon na kondenzatoru i početna struja kalema ostaju nepromenjeni nakon prebacivanja položaja prekidača u novi položaj. Struja kroz kondenzator i napon kalema mogu imati naglu promenu vrednosti nakon postavljanja prekidača u novi položaj.
2. Posle promene stanja prekidača, određuju se napon na kondenzatoru ili struja kalema posle dužeg vremenskog perioda kada su vremenski promenljivi članovi jednaki nuli.
3. Postavlja se jednačina po struji ili naponu, zavisno od načina kako su elementi povezani. Ukoliko se u jednačini pojavljuje integral, diferencirati jednačinu, tako da se dobije diferencijalna jednačina.
4. Diferencijalna jednačina se preuređuje tako da je uz diferencirani član konstanta množenja jednaka jedinici. Konstanta uz član koji sadrži samu funkciju koja treba da se odredi, određuje vremensku konstantu eksponencijalnog člana.
5. Konstante K_1 i K_2 se određuju iz početnih uslova i na osnovu limesa kada nezavisno promenljiva teži beskonačnosti.
6. Ostale nepoznate veličine se određuju integracijom ili diferenciranjem.

Postupak koji je prikazan u ovom poglavlju može se koristiti i za analizu složenijih kola. Može da se koristi Tevenenova i Nortonova teorema tako da se deo kola sa otpornicima i izvorima može predstaviti ekvivalentnim izvorom i otpornikom, a primenom pravila za paralelno ili serijski povezane elemente može se više kondenzatora ili kalemova predstaviti jednim ekvivalentnim kondenzatorom ili jednim ekvivalentnim kalemom.

5.5 Diferencijalna jednačina drugog reda

Da bi uspešno rešili određivanje napona i struja električnih kola sa jednim otpornikom, jednim kondenzatorom i jednim kalemom u situacijama kada dolazi do promene napona ili struje nezavisnih izvora, potrebno je poznavanje matematičkog rešavanja diferencijalne jednačine drugog reda. Podrazumeva se da diferencijalna jednačina drugog reda ima konstantne koeficijente:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + a_2 x(t) = f(t) \tag{150}$$

Veličina koju treba odrediti iz prethodne jednačine je označena sa x i ona je funkcija vremena t. Mala slova a_1 i a_2 su konstante a funkcija $f(t)$ može biti bilo koja funkcija vremena. Za struje i napone u prelaznom režimu, funkcija $f(t)$ je konstanta a može biti i jednaka nuli.

U opštem slučaju treba pronaći sva rešenja prethodne jednačine $x(t)$. Promenljiva veličina se može predstaviti zbirom dva rešenja, od kojih se jedno naziva prinudno rešenje $x_p(t)$, a drugo prirodno rešenje $x_c(t)$:

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t) \tag{151}$$

Kada se prinudno rešenje $x_p(t)$ zameni u jednačinu dobija se da ono treba da bude rešenje kada postoji funkcija $f(t)$, odnosno funkcija $f(t)$ određuje oblik rešenja $x_p(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_p(t)}{\mathrm{d}t^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}x_p(t)}{\mathrm{d}t} + a_2 x_p(t) = f(t) \tag{152}$$

U ovom poglavlju, funkcija $f(t)$ je konstanta, zbog čega i prinudno rešenje mora da bude konstanta. Prvi i drugi izvod konstante su jednaki nuli, tako da se dobija:

$$f(t) = A = \text{const} \tag{153}$$

$$a_2 x_p(t) = A \tag{154}$$

$$x_p(t) = \frac{A}{a_2} \tag{155}$$

Prirodno rešenje $x_c(t)$ treba da odgovara jednačini koja zavisi samo od elemenata kola a da ne zavisi od funkcije $f(t)$. Homogena jednačina iz koje se dobija prirodno rešenje se može napisati i u obliku:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_c(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha \frac{\mathrm{d}x_c(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x_c(t) = 0 \tag{156}$$

Jedno moguće rešenje jeste da je ono jednako nuli, zbog čega su i prvi i drugi izvod jednaki nuli. Naravno, nas ne interesuje ovakvo rešenje. Smenom $x_c(t) = Ke^{st}$ ova jednačina postaje algebarska jednačina, zato što se i leva i desna strana mogu podeliti sa Ke^{st}:

$$Ks^2 e^{st} + 2\alpha K s e^{st} + \omega_0^2 K e^{st} = 0 \tag{157}$$

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0 \tag{158}$$

Prethodna jednačina se naziva karakteristična jednačina. Koeficijent α se naziva koeficijent prigušenja, dok se konstanta ω_0 naziva rezonantna učestanost. Ovo je kvadratna jednačina koja može da ima tri vrste rešenja, a opšti oblik je sledeći:

$$\begin{aligned} s_1 &= -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ s_2 &= -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \tag{159}$$

Rešenja kvadratne jednačine nazivaju se prirodne (sopstvene) učestanosti. Unošenjem ovih rešenja u očekivan oblik prirodnog rešenja diferencijalne jednačine, dobija se

$$\begin{aligned} x_{c1} &= K_1 e^{s_1 t} \\ x_{c2} &= K_2 e^{s_2 t} \end{aligned} \tag{160}$$

Zbir prethodnih rešenja takođe predstavlja prirodno rešenje:

$$x_c(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \tag{161}$$

Konstante K_1 i K_2 se određuju iz početnih uslova $x(0)$ i d$x(0)$/dt.

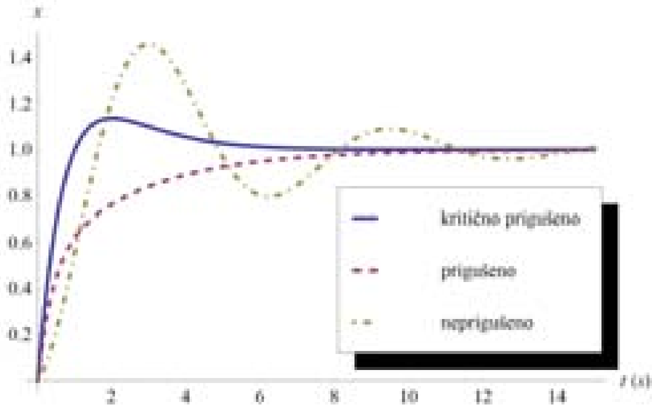
Postoje tri karakteristična slučaja u zavisnosti od vrednosti konstanti α i ω_0:

1. Prigušeno rešenje nastaje kada je vrednost ispod korena veća od nule, odnosno $\alpha^2 > \omega_0^2$, zbog čega su rešenja s_1 i s_2 realna i različita, $s_1 \neq s_2$. Prirodno rešenje je tada $x_c(t) = K_1 e^{\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\right)t} + K_2 e^{\left(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\right)t}$.
Rešenje je zbir dve eksponencijalno opadajuće funkcije. Konstante K_1 i K_2 se određuju iz početnih uslova.

2. Kritično prigušeno rešenje nastaje kada je vrednost ispod korena jednaka nuli, odnosno $\alpha^2 = \omega_0^2$, i tada su rešenja s_1 i s_2 realna i ista, $s_1 = s_2$. Prirodno rešenje je tada $x_c(t) = B_1 e^{\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\right)t} + B_2 t e^{\left(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\right)t}$.
Rešenje je zbir dve eksponencijalno opadajuće funkcije, pri čemu je jedna srazmerna i sa vremenom. Iako je t rastuća funkcija, eksponencijalna opadajuća funkcija brže opada od porasta linearnog člana t. Konstante B_1 i B_2 se određuju iz početnih uslova.

3. Neprigušeno rešenje nastaje kada je vrednost ispod korena veća od nule, odnosno $\alpha^2 < \omega_0^2$; zato su rešenja s_1 i s_2 konjugovano kompleksna. Prirodno rešenje je tada $x_c(t) = K_1 e^{(-\alpha + j\omega_n)t} + K_2 e^{(-\alpha - j\omega_n)t} = e^{-\alpha t}\left(A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t)\right),\ \omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$.
Rešenje je proizvod eksponencijalno opadajuće funkcije sa funkcijom koja ima oscilatorni karakter . Konstante A_1 i S_2 se određuju iz početnih uslova:

Za ilustraciju rešenja, na slici 5.16 su prikazani oblici rešenja diferencijalne jednačine drugog reda za tri karakteristična slučaja: konstante su određene tako da rešenje ima vrednost nula za t=0, a da za velike vrednosti vremena ono teži ka 1. Ovo je slučaj kada se analizira odziv na naglu promenu jednosmerne vrednosti izvora.



Slika 5.16. Rešenja diferencijalne jednačine drugog reda za tri karakteristična slučaja.

Prigušeno rešenje ima postepen asimptotski prilaz jediničnoj vrednosti sa donje strane. Neprigušeno rešenje ima oscilatorni karakter koji ima značajna premašenja i podmašaje pre nego što se asimptotski približi jedinici. Kritično prigušeno rešenje prikazano na slici 5.16. ima najbrže dostizanje vrednosti 1, a zatim se asimptotski približava jedinici sa gornje strane. U sva tri slučaja, ova analiza pokazuje koliko brzo se dostiže željena vrednost, na primer vrednost 0,5 ili 0,9, i posle koliko vremena možemo da smatramo da je dobijena vrednost dovoljno tačna za dalju analizu.

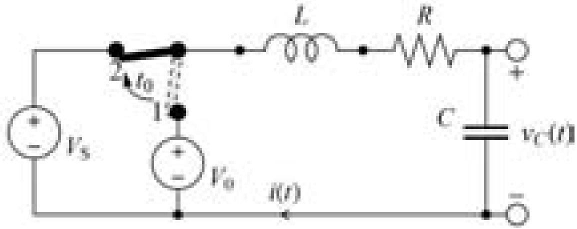
5.6 Kola drugog reda sa kondenzatorima i kalemovima

5.6.1 Redna veza kalema, otpornika i kondenzatora

Kada su kondenzator i kalem istovremeno prisutni u kolu, dobija se složenije kolo. To su električna kola sačinjena od izvora, otpornika, kondenzatora i kalemova (takozvana RLC kola). Primer takvog kola ilustrovan je na slici 5.17. Ovo kolo predstavlja rednu vezu naponskog izvora, kalema, otpornika i kondenzatora. U trenutku t_0 dolazi do promene položaja prekidača, tako da se promeni vrednost jednosmernog naponskog izvora.

Do trenutka t_0 proteklo je dovoljno vremena da je ostvareno stabilno stanje i da više nema promena napona ili struja u kolu. Pošto je kondenzator redno vezan sa ostalim elementima, struja kroz sve elemente je jednaka nuli. Kako je tada napon na otporniku i kalemu jednak nuli, napon na kondenzatoru biće jednak naponu koji daje nezavisni izvor. Prema tome, početna vrednost struje kalema je jednaka nuli, a početna vrednost napona na kondenzatoru je V_0.

U trenutku t_0 prekidač se prebacuje iz položaja 1 u položaj 2, i tada se otpornik i kalem nalaze između dva čvora na različitom potencijalu, sa jedne strane to je napon novog naponskog izvora, a sa druge strane to je napon na kondenzatoru koji ne može trenutno da promeni vrednost. Takođe, struja kroz kalem, a to je struja kroz sve elemente, ne može trenutno da se promeni.



Slika 5.17. Kolo drugog reda sa rednom vezom kalema, otpornika i kondenzatora.

Za rešavanje kola najbolje je da se za promenljivu koja treba da se reši diferencijalnom jednačinom drugog reda izabere ona koja je zajednička svim elementima. Za kolo sa slike 5.17. to je struja kroz sve elemente. Korišćenjem drugog Kirhofovog zakona, i relacije koje postoje između napona i struje za kondenzator i kalem, i naravno Omov zakon za otpornost otpornika, može se napisati sledeća jednačina

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(x)\,\mathrm{d}x=V_{\mathrm{S}} \tag{162}$$

Rešavanje jednačine radimo počev od trenutka kada je nastala promena, t_0:

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)+v_C(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}i(x)\,\mathrm{d}x=V_{\mathrm{S}} \tag{163}$$

Uočimo da je u ovom primeru napon izvora konstantan.

Za uspešno rešavanje diferencijalne jednačine drugog reda potrebno je da eliminišemo sve integrale. Zato se diferenciraju obe strane prethodne jednačine, i istovremeno podeli sa L, kako bi dobili opšti oblik diferencijalne jednačine drugog reda:

$$\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}i(t)=0 \tag{164}$$

Kada se prethodna jednačina uporedi sa diferencijalnom jednačinom drugog reda, mogu se odrediti konstante:

$$a_1=\frac{R}{L}\,,\; a_2=\frac{1}{LC}\,,\; f(t)=0 \tag{165}$$

Nakon zamene konstanti u diferencijalnu jednačinu drugog reda, uz korišćenje vrednosti za početni trenutak i posle dovoljno dugo vremena, dobijaju se izrazi za napone i struje kola drugog reda. Ako pretpostavimo da su poznate induktivnost i kapacitivnost, tada se može odrediti vrednost za otpornost kada se dobija kritično prigušeno rešenje:

$$R=2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{166}$$

Za L=5 mH i C=2 μF dobija se da je R=100 Ω za kritično prigušeno rešenje. Za R=200 Ω dobija se prigušeno rešenje, a za R=50 Ω dobija se neprigušeno rešenje. Za grafički prikaz rezultata određeno je da su naponi izvora V_S=12 V i V_0=5 V.

Iako su date formule za izračunavanje rešenja diferencijalne jednačine drugog reda, u narednom delu biće pokazano kako se to radi korišćenjem matematičkih softvera (Mathematica).

Najpre se napiše opšti oblik diferencijalne jednačine, u ovom slučaju simbol **`x`** predstavlja struju kroz sve elemente kola . Uglaste zagrade, **`[]`**, se koriste da se istakne nezavisno promenljiva, u ovom slučaju to je vreme **`t`**; **`f`** je bilo koja funkcija, a u ovoj analizi ona je konstanta ili još češće jednaka je nuli; prvi i drugi izvod (**`''`** i **`'`**) se označavaju apostrofima odmah posle simbola za funkciju vremena **`x`**; blanko znak između izraza se koristi umesto znaka za množenje, dvostruka jednakost (**`==`**) se koristi da se istakne da je leva strana jednaka desnoj, a samo jedan znak jednakosti (**`=`**) se koristi za dodeljivanje nekog izraza nekom simbolu – u ovom slučaju to je **`eq1`**, kome se dodeljuje ceo izraz koji opisuje diferencijalnu jednačinu:

```
eq1 = x''[t] + a1  x'[t] + a2 x[t] == f
```

Konstante (**`a1`** i **`a2`**) u jednačini se dodeljuju u skladu sa postavljenim jednačinama:

```
a1 = r/L;
a2 = 1/(L c);
```

Otpornost, induktivnost i kapacitivnost su opisani simbolima **`r`**, **`L`** i **`c`**. Početni uslov **`x [0]`** je dodeljen simbolu **`cond1`**.

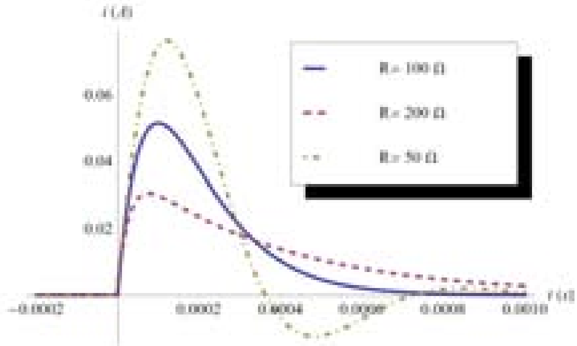
```
cond1= x[0]==0;
```

Komanda koja pronalazi rešenje diferencijalne jednačine je **`DSolve`**. Argumenti ove komande su simboli koji sadrže opis diferencijalne funkcije **`eq1`**, početne uslove ako su poznati **`cond1`**, simbolička oznaka za funkciju koja se dobija rešavanjem diferencijalne jednačine **`x[t]`**, i simbol za nezavisno promenljivu **`t`**:

```
DSolve[{eq1,cond1},x[t],t]
```

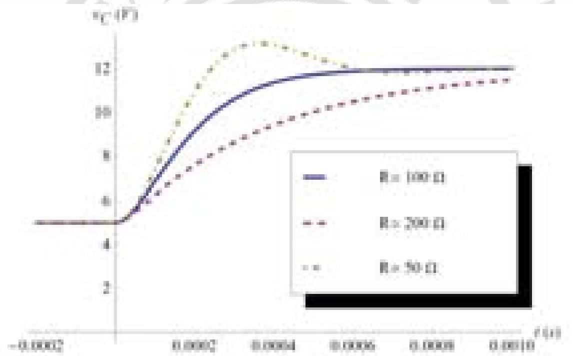
U ovom primeru rešenje će sadržati još jednu neodređenu konstantu definisanu kao simbol **`C[1]`**. Da bi i nju odredili, najpre izvršimo integraciju struje po formuli za napon kondenzatora, odredimo limes kada nezavisno promenljiva teži beskonačnosti, izjednačavanjem limesa sa vrednošću napona kondenzatora kada prestanu promene u kolu, a to znači da je napon kondenzatora jednak naponu naponskog izvora, lako se određuje nepoznata konstanta **`C[1]`**. Za sva tri slučaja softver određuje simboličko rešenje, gde su u ovom primeru L=5 mH, C=2 μF, R=100 Ω za kritično prigušeno rešenje (R=200 Ω za prigušeno rešenje, R=50 Ω za neprigušeno rešenje), V_S=12 V, V_0=5 V.

Na slici 5.18. prikazana je struja koja teče kroz sve elemente kola pošto su vezani na red. Struja do trenutka promene položaja prekidača je bila jednaka nuli, a takođe se struja asimptotski približava nuli. Struja je približno jednaka nuli već posle 1 ms. Vidi se da neprigušeno rešenje ima oscilatorni karakter, a da se najbrže približava nuli kada je vrednost otpornosti jednaka kritično prigušenom uslovu.



Slika 5.18. Struja kroz elemente kola za C=2 μF, *L*=2mH, V_S=12V, V_0=5V.

Na slici 5.19. prikazan je napon na kondenzatoru, i vidi se da ne postoji nagli skok napona u trenutku promene položaja prekidača, već se promena napona postepeno odvija. Ove dve slike, 5.18. i 5.19., potvrđuju osobinu da nakon promene položaja prekidača ne može doći do nagle promene struje kalema (a to je istovremeno i struja svih elemenata) i napona kondenzatora.



Slika 5.19. Napon na kondenzatoru za C=2 μF, *L*=2mH, V_S=12V, V_0=5V.

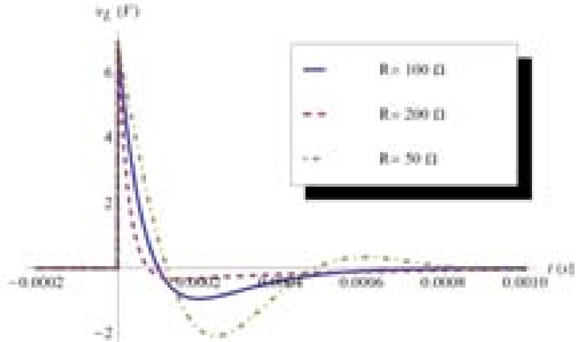
Napon na otporniku se dobija kada se struja redne veze elemenata pomnoži sa konstantom koja je jednaka otpornosti otpornika.

Napon na kalemu može da se odredi kada se od napona naponskog izvora oduzmu naponi na otporniku i kondenzatoru.

$$v_L(t) = V_S - Ri(t) - v_C(t) \tag{167}$$

Na slici 5.20. prikazan je napon na kalemu. Vidi se da ovaj napon ima skok sa vrednosti nula na razliku napona dva naponska izvora u trenutku kada je prekidač prebačen iz položaja 1 u položaj 2. I kod ovog napona se mogu uočiti osobine prigušene, kritično prigušene i neprigušene vrste rada, a koja je određena vrednošću otpornosti otpornika *R*.

Zbog nagle promene napona izvora sa jedne na drugu vrednost nije mogla nagla promena da se dogodi kod napona kondenzatora, kao ni kod napona na otporniku jer struja kalema nije mogla da se promeni; zbog toga nagla promena napona mogla je da se dogodi samo kod kalema.



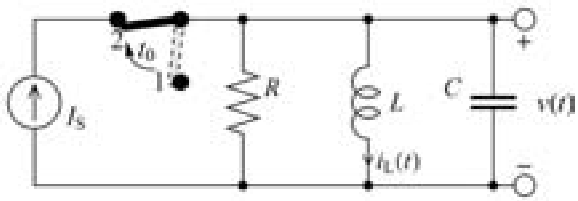
Slika 5.20. Napon na kalemu za C=2 μF, L=2mH, V_S=12V, V_0=5V.

Ovaj primer demonstrira da je dovoljno znati osnovne zakone elektrotehnike (Omov zakon, prvi Kirhofov zakon, drugi Kirhofov zakon, izraze koji određuju vezu između napona i struje svih pasivnih elemenata), granične vrednosti kada nema promena napona i struja u kolima (kalem se zamenjuje kratkom vezom, kondenzator se zamenjuje otvorenom vezom). Diferencijalnu jednačinu treba uneti na način kako je to urađeno u ovom primeru, a softver će naći rešenje u zatvorenom obliku kao da je izvođenje sprovedeno ručno (softver će odrediti koji od tri slučaja se stvarno dešava). Sve slike u ovom delu knjige su upravo i nacrtane na osnovu izvedenih izraza softvera.

5.6.2 Paralelna veza kalema, otpornika i kondenzatora

Paralelna veza kalema, otpornika i kondenzatora prikazana je na slici 5.21. Kako se idealni strujni izvor ponaša kao otvoreno kolo u situaciji kada se eliminiše njegov uticaj, za prvi položaj prekidača je odabrano da bude otvoreno kolo.

Do trenutka t_0 proteklo je dovoljno vremena da je ostvareno stabilno stanje i da više nema promena napona ili struja u kolu. Pošto su svi elementi vezani paralelno, struja kalema je mogla da se zatvori preko otpornika i postane jednaka nuli, a kondenzator je takođe mogao da se isprazni preko otpornika. To znači da je početna struja kalema jednaka nuli. Napon na kondenzatoru takođe je jednak nuli. Prema tome, sve početne vrednosti (struja kalema, napon na kondenzatoru) jednake su nuli.



Slika 5.21. Kolo drugog reda sa paralelnom vezom kalema, otpornika i kondenzatora.

Nakon prebacivanja prekidača u položaj 2, struja kroz kalem ne može naglo da promeni vrednost, kao ni napon na kondenzatoru. To znači da je napon na kondenzatoru mali nakon prebacivanja prekidača u položaj 2, a to takođe znači i da je struja kroz otpornik mala jer je mali napon na njegovim krajevima. Kako se kalem protivi nagloj promeni struje, to će i struja kroz kalem biti mala. Da bi bio zadovoljen prvi Kirhofov zakon, skora sva strujaće u početnom trenutku proći kroz kondenzator.

Nakon dovoljno dugo vremena, napon na kondenzatore se više neće menjati zbog čega će i struja kroz njega biti jednaka nuli. Napon na kalemu će biti jednak nuli zato što se neće menjati struja kroz kalem. Kako se u slučaju napajanja kola stalnim strujama kalem zamenjuje kratkim spojem, to će sva struja strujnog generatora proticati kroz kalem; proizvod nule i struje kroz kalem određuje nulti napon na krajevima kola koji su priključeni na strujni generator. Kako je napon na otporniku jednak nuli, to je i struja kroz njega jednaka nuli. Ova analiza je neophodna da bi odredili konstante tokom rešavanja diferencijalne jednačine drugog reda.

Za rešavanje kola najbolje je da se za promenljivu koja treba da se reši diferencijalnom jednačinom drugog reda izabere ona koja je zajednička svim elementima. Za kolo sa slike 5.21. to je napon na elementima. Korišćenjem prvog Kirhofovog zakona, i relacije koje postoje između napona i struje za kondenzator i kalem, i naravno Omov zakon za otpornost otpornika, može se napisati sledeća jednačina

$$\frac{v(t)}{R}+\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}v(x)\,\mathrm{d}x+C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=I_{\mathrm{S}} \tag{168}$$

Rešavanje jednačine radimo počev od trenutka kada je nastala promena, t_0:

$$\frac{v(t)}{R}+i_L(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}v(x)\,\mathrm{d}x+C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=I_{\mathrm{S}} \tag{169}$$

Uočimo da je u ovom primeru struja izvora konstantna.

Za uspešno rešavanje diferencijalne jednačine drugog reda potrebno je da eliminišemo sve integrale. Zato se diferenciraju obe strane prethodne jednačine, i istovremeno podele sa C, kako bi dobili opšti oblik diferencijalne jednačine drugog reda:

$$\frac{\mathrm{d}^2v(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}v(t)=0 \tag{170}$$

Kada se prethodna jednačina uporedi sa diferencijalnom jednačinom drugog reda, mogu se odrediti konstante:

$$a_1=\frac{1}{RC}\,,\;\; a_2=\frac{1}{LC}\,,\;\; f(t)=0 \tag{171}$$

Nakon zamene konstanti u diferencijalnu jednačinu drugog reda, uz korišćenje vrednosti za početni trenutak i posle dovoljno dugo vremena, dobijaju se izrazi za napone i struje kola drugog reda. Ako pretpostavimo da su poznate induktivnost i kapacitivnost, tada se može odrediti vrednost za otpornost kada se dobija kritično prigušeno rešenje:

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{172}$$

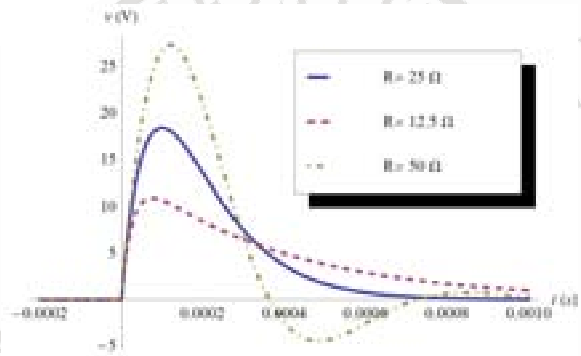
Za L=5 mH i C=2 μF dobija se da je R=25 Ω za kritično prigušeno rešenje. Za R=12,5 Ω dobija se prigušeno rešenje, a za R=50 Ω dobija se neprigušeno rešenje. Za grafički prikaz rezultata određeno je da je struja izvora I_{S}=1 A.

Iako su date formule za izračunavanje rešenja diferencijalne jednačine drugog reda, i u ovom primeru je ceo postupak ponovljen kao za rednu vezu elemenata.

U ovom primeru rešenje će sadržati još jednu neodređenu konstantu definisanu kao simbol **`C[1]`**. Da bi i nju odredili, najpre izvršimo integraciju napona po formuli za struju kalema, odredimo limes kada nezavisno promenljiva teži beskonačnosti, izjednačavanjem limesa sa vrednošću struje kalema kada prestanu promene u kolu, a to znači da je struja kalema jednaka struji strujnog izvora, lako se određuje nepoznata konstanta **`C[1]`**. Za sva tri slučaja softver određuje simboličko rešenje, gde su u ovom primeru L=5 mH, C=2 μF, R=25 Ω za kritično prigušeno rešenje (R=12.5 Ω za prigušeno rešenje, R=50 Ω za neprigušeno rešenje), I_S=1 A.

Na slici 5.22. prikazan je napon na svim elementima kola pošto su vezani paralelno. Napon je do trenutka promene položaja prekidača bio jednak nuli, a takođe se napon asimptotski približava nuli. Napon je približno jednak nuli već posle 1 ms. Vidi se da neprigušeno rešenje ima oscilatorni karakter, a da se najbrže približava nuli kada je vrednost otpornosti jednaka kritično prigušenom uslovu.

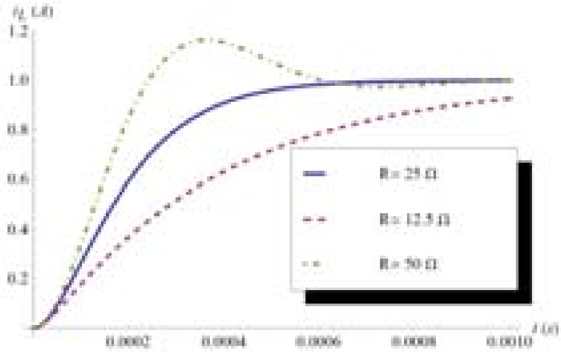
Na slici 5.13. prikazana je struja kroz kalem, i ona ima kontinualnu promenu. Posle 10 μs struja je približno ponovo konstantna i nju određuje otpornost redno vezanog otpornika sa kalemom.



Slika 5.22. Napon paralelne veze za C=2 μF, *L*=2mH, I_S=1A.

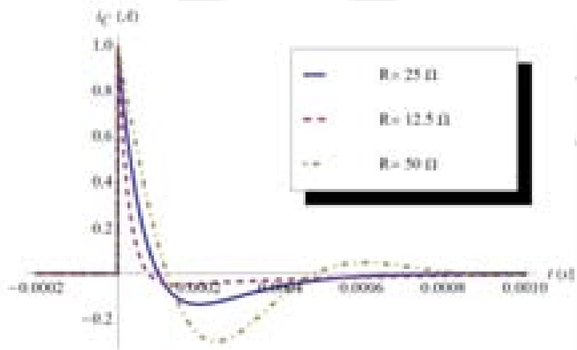
Na slici 5.23. prikazana je struja kroz kalem, i vidi se da postoji postepena promena od nulte vrednosti do vrednosti koja je jednaka struji strujnog generatora. Treba uočiti da je struja kod neprigušenog rešenja u jednom trenutku veća od struje strujnog generatora. To se događa kada kondenzator vraća energiju koju je primio od strujnog generatora.

Na slici 5.24. prikazana je struja kroz kondenzator. Struja kroz kondenzator je jednaka nuli pre prebacivanja prekidača u položaj 1, ali je jednaka nuli i posle dovoljno dugo vremena od kada je prebačen prekidač u položaj 2.



Slika 5.23. Struja kroz kalemu C=2 μF, *L*=2mH, I_S=1A.

Kondenzator se veoma brzo puni nakon priključenja na strujni izvor, ali se nakon toga prazni i struja je većim delom negativna.



Slika 5.24. Struja kroz kondenzator za C=2 μF, *L*=2mH, I_S=1A.

Analiza paralelne veze pokazuje da struja kroz elemente može biti veća od struje priključenih strujnih izvora. Slično se može dogoditi i da su naponi na elementima veći od napona priključenih naponskih izvora. Ovu činjenicu treba uvek imati na umu pri implementaciji, kako bi probojni napon elementa, maksimalna struja ili snaga elementa bili takvi da mogu da izdrže premašenja koja su moguća kod RLC kola.

6 Kola sa naizmeničnim strujama

Posebna klasa električnih kola su kola kod kojih su naponi i struje nezavisnih izvora sinusoidalne funkcije vremena. Kada ne postoji uticaj prelaznih pojava, naponi u čvorovima i struje u granama kola imaće takođe sinusoidalni vremenski oblik. Jedna velika oblast primene ove teorije jeste u snabdevanju električnom energijom u domaćinstvima i industriji, na primer naponski izvor ima napajanje 220V i učestanost 50Hz. Ista analiza može da se koristi primenom Furijeove transformacije za analizu signala i pojava koje se obrađuju, čuvaju i prenose u komunikacijama, gde se signali sa dobrom tačnošću predstavljaju kao zbir sinusoidalnih signala različite učestanosti. U slučaju složeno periodičnih sistema koristi se princip superpozicije.

6.1 Sinusoida, učestanost, perioda, faza i fazor

Posmatrajmo kolo kod koga nezavisni izvori stvara napon koji je sinusoidalna funkcija vremena. Najpre treba odrediti ustaljeno, stacionarno ili ravnotežno stanje, koje nastaje posle dovoljno dugo vremena od kada je izvor uključen u kolo. Kao što je određeno ustaljeno stanje kod izvora sa stalnim vremenski nepromenljivim naponima i strujama, a nakon toga su analizirane i prelazne pojave, tako i u ovom delu udžbenika treba da odredimo napone i struje koji su rezultat delovanja nezavisnih izvora. Tek nakon toga se mogu analizirati prelazne pojave koje nastaju prebacivanjem prekidača iz jednog položaja u drugi, i time analizirati uticaj promene povezanosti elemenata u nekom kolu. U praksi, ova ustaljena stanja u kolu su češće interesantnija. Uloga poznavanja prelaznih pojava ima najveći značaj kada treba da se odredi koji je to vremenski interval potreban da prođe pre nego što stvarno imamo ustaljenu vrstu rada u kolu.

Posmatrajmo funkciju sinusa u kojoj je sa X_M označena amplituda (maksimalna vrednost) sinusoide, sa ω je označena kružna ili ugaona učestanost, a ωt je argument funkcije sinusa:

$$x(t) = X_M \sin(\omega t) = X_M \sin \omega t \tag{173}$$

Primer funkcije sinusa prikazan je na slici 6.1. Veličina $x(t)$ može predstavljati napon $v(t)$ ili struju $i(t)$, a nezavisno promenljiva je vreme t.

Amplituda ima jedinicu signala, na primer, jedinica za napon je u voltima, a za struju je u amperima.

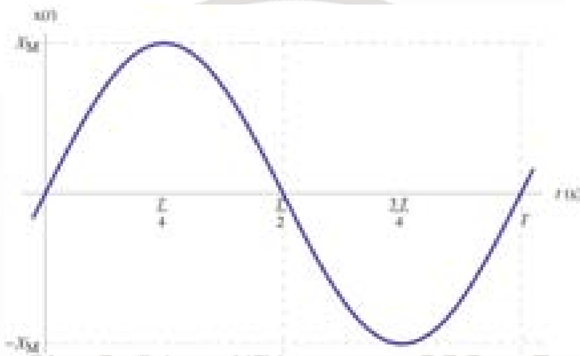
Kružna učestanost može da se izrazi preko učestanosti *f*, koja se množi sa 2π radijana. Jedinica za kružnu učestanost je radijana u sekundi (zato što je jedinica za učestanost u hercima – što je ekvivalentno 1/sekunda):

$$\omega = 2\pi f \tag{174}$$

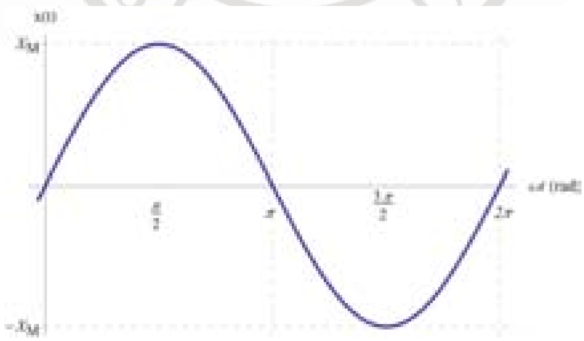
Argument sinusne funkcije ωt ima jedinicu u radijanima (vreme se iskazuje u sekundama a *f* je u 1/sekunda).

Sinusna funkcija je periodična funkcija sa periodom ponavljanja od 2π radijana. Za poznatu periodu funkcije *T*, učestanost sinusoide *f* se dobija iz sledeće relacije:

$$f = \frac{1}{T} \tag{175}$$



Slika 6.1. Sinusna funkcija u funkciji vremena *t*.

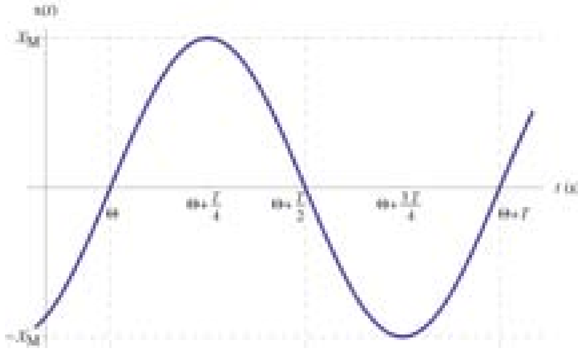


Slika 6.2. Sinusna funkcija u funkciji argumenta ω*t*.

Sinusna funkcija ne mora da ima vrednost 0 za *t*=0; to je razlog da se koristi još jedna konstanta, tako da je opšti oblik funkcije:

$$x(t) = X_{\mathrm{M}} \sin(\omega t + \theta) \tag{176}$$

Nova konstanta θ naziva se fazni ugao ili početna faza.



Slika 6.3. Sinusna funkcija sa početnom fazom različitom od 0.

Sinusna funkcija se periodično ponavlja sa periodom T, zbog čega u vremenskom domenu postoji beskonačno trenutaka kada funkcija ima istu vrednost.

Za kola kod kojih se koriste naponski i strujni izvori koji imaju sinusoidalne pobude tako da svi imaju istu učestanost, kaže se da su prostoperiodična. Signali koji su periodični sa istom periodom kao i sinusni ali su drugačijeg oblika (na primer trougaoni, pravougaoni) nazivaju se složenoperiodični.

Umesto da se u analizi kola koriste sinusne funkcije sa vremenom u argumentu, jednostavnije su analize ako se koristi predstavljanje periodičnih funkcije preko amplitude i faze, a trenutna vrednost funkcije se uvek može dobiti ako su poznati početni trenutak i početna faza. Podrazumeva se da je učestanost poznata.

Pretpostavimo da je struja kroz kalem sinusoidalnog oblika:

$$i(t) = I_{\mathrm{M}} \sin(\omega t + \theta) \tag{177}$$

Napon na kalemu se dobija kao prvi izvod struje kroz njega:

$$\begin{aligned} v_L(t) &= L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{M}}\sin(\omega t + \theta)}{\mathrm{d}t} = \\ &= \omega L I_{\mathrm{M}} \cos(\omega t + \theta) = \omega L I_{\mathrm{M}} \sin(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \tag{178}$$

Ako je poznata početna faza struje kroz kalem, tada je početna faza napona na kalemu veći za $\pi/2$, a amplituda napona se dobija kada se amplituda struje pomnoži sa ωL

$$\begin{aligned} \theta_i &= \theta \\ \theta_v &= \theta + \frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{179}$$

U prostoperiodičnom kolu svi naponi i struje imaju istu učestanost, f, odnosno isto ω. Kako su naponi ili struje linearno srazmerni sa naponom i strujom, ili se dobijaju diferenciranjem, to će u svim linearnim kolima struje kroz sve elemente i naponi na svim elementima imati istu učestanost, f, odnosno isto ω. Zato nije potrebno da se koristi sinusoidalni oblik, već je dovoljno da se veličine opisuju amplitudom sinusoide i početnim faznim uglom, na primer

$$\mathbf{I} = I_{\mathrm{M}}\angle\theta_i = I_{\mathrm{M}}\angle\theta$$
$$\mathbf{V} = V_{\mathrm{M}}\angle\theta_v = \omega L I_{\mathrm{M}}\angle\theta + \frac{\pi}{2} \tag{180}$$

Ovakav način predstavljanja veličina samo preko amplitude sinusoidalnog signala i faze naziva se fazorsko predstavljanje. U svakom trenutku se može napisati signal preko sinusa kao funkcija vremena, a od fazorskog predstavljanja se uzimaju amplituda i faza.

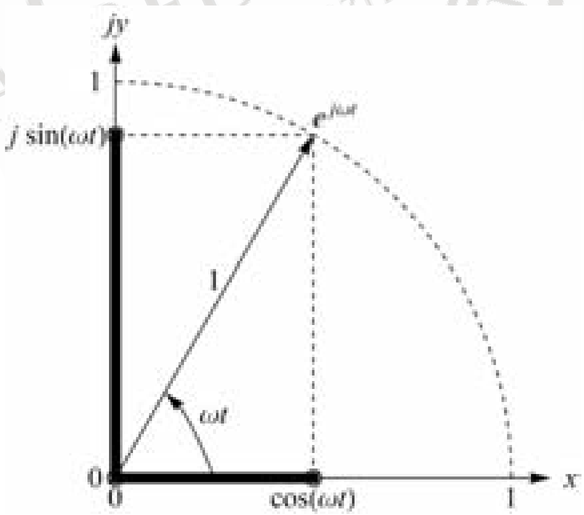
U nekim knjigama se koriste i drugačije oznake za fazor: umesto amplitude koristi se efektivna vrednost, a umesto oznake fazora uspravnim podebljanim slovima, koristi se ukošeni simboli koji su podvučeni. Drugačije označavanje nema uticaja na tačnost i suštinu primene fazora koji treba da olakšaju rešavanje kola sa prostoperiodičnim izvorima.

6.2 Ojlerov identitet i rad sa kompleksnim brojevima

Umesto da se u analizi kola koriste sinusne funkcije, jednostavnije su analize ako se koristi eksponencijalni oblik funkcije.

Ojlerov identitet daje vezu između eksponencijalne i trigonometrijske predstave funkcija (oznaka j se koristi za predstavljanje kompleksnog broja, $j = \sqrt{-1}$), slika 6.4.

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) \tag{181}$$



Slika 6.4. Ilustracija Ojlerovog identiteta.

Sinusna i kosinusna funkcija se mogu izvesti iz eksponencijalne predstave

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \tag{182}$$

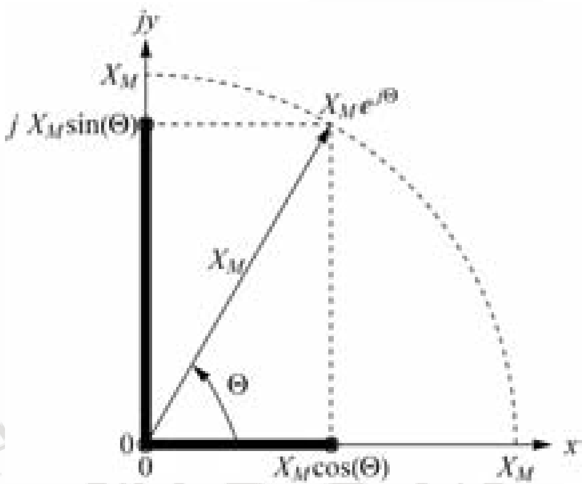
$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \tag{183}$$

Sa slike 6.4. se vidi da se za sve veće vrednosti vremena vektor kreće po krugu u smeru suprotnom od kazaljki na satu, da posle izvesnog vremena vektor ponovo dolazi u početni položaj, i zatim nastavlja da se kreće po krugu.

Neki od karakterističnih identiteta su da je modul vektora uvek jednak jedinici zato što je

$$\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1 \tag{184}$$

Kada se posmatra neka od veličina u trenutku t=0, na primer $x(t) = X_{\mathrm{M}} \sin(\omega t + \theta)$, tada se može primeniti Ojlerov identitet koji je ilustrovan na slici 6.5.



Slika 6.5. Ilustracija Ojlerovog identiteta.

Amplituda se ilustruje poluprečnikom kruga po kome bi se kretao vektor X_{M} a početna faza je Θ:

$$\begin{aligned} x(t) &= X_{\mathrm{M}} \sin(\omega t + \theta) \\ \mathbf{X} &= X_{\mathrm{M}} \angle \theta \end{aligned} \tag{185}$$

Vektor može da se predstavi i kao par realnog i imaginarnog dela koji su jednaki kosinusu i sinusu ugla $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$:

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) &= \mathrm{Re}(e^{j\omega t}) \\ \sin(\omega t) &= \mathrm{Im}(e^{j\omega t}) \end{aligned} \tag{186}$$

Za neku drugu funkciju može da se napiše:

$$
\begin{aligned}
&X_{\mathrm{M}} e^{j\omega t} = X_{\mathrm{M}} \cos(\omega t) + jX_{\mathrm{M}} \sin(\omega t)\\
&X_{\mathrm{M}} \cos(\omega t) = \mathrm{Re}(X_{\mathrm{M}} e^{j\omega t})\\
&X_{\mathrm{M}} \sin(\omega t) = \mathrm{Im}(X_{\mathrm{M}} e^{j\omega t})
\end{aligned} \tag{187}
$$

Važno je napomenuti da smo funkciju nazvali sinusnom, ali se u praksi češće koristi kosinusna forma, zato što je po Ojlerovom identitetu kosinus jednak realnom delu prema slici 5.5.:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{X} = X_{\mathrm{M}} \angle \theta\\
&X_{\mathrm{M}} e^{j\theta} = X_{\mathrm{M}} \cos(\theta) + jX_{\mathrm{M}} \sin(\theta)
\end{aligned} \tag{188}
$$

Prezentacija prikazana na slici 5.5. predstavlja kompleksan boj koji ima realni i imaginarni deo ili modul i fazu. Između različitih predstava kompleksnog broja važe sledeće relacije:

$$
\begin{aligned}
&X = X_{\mathrm{M}} e^{j\theta}\\
&\mathrm{Re}(X) = X_{\mathrm{M}} \cos(\theta)\\
&\mathrm{Im}(X) = X_{\mathrm{M}} \sin(\theta)\\
&X = \mathrm{Re}(X) + j\,\mathrm{Im}(X)\\
&X_{\mathrm{M}} = \sqrt{\left(\mathrm{Re}(X)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(X)\right)^2}\\
&\theta = \arctan \frac{\mathrm{Im}(X)}{\mathrm{Re}(X)}
\end{aligned} \tag{189}
$$

Treba obratiti pažnju da se u pojedinim udžbenicima koristi eksponent (-1) za označavanje inverzne funkcije a da to nije recipročna vrednost, na primer u ovom udžbeniku koristiće se $\arctan$ umesto $\tan^{-1}$.

Zbir dva kompleksna broja dobija se tako što je realni deo jednak zbiru realnih delova a imaginarni deo zbira je jednak zbiru imaginarnih delove

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \mathrm{Re}(X_1) + j\,\mathrm{Im}(X_1)\\
&X_2 = \mathrm{Re}(X_2) + j\,\mathrm{Im}(X_2)\\
&X_1 + X_2 = \left(\mathrm{Re}(X_1) + \mathrm{Re}(X_2)\right) + j\left(\mathrm{Im}(X_1) + \mathrm{Im}(X_2)\right)\\
&\mathrm{Re}\left(X_1 + X_2\right) = \mathrm{Re}(X_1) + \mathrm{Re}(X_2)\\
&\mathrm{Im}\left(X_1 + X_2\right) = \mathrm{Im}(X_1) + \mathrm{Im}(X_2\\
&X_{\mathrm{M}(1+2)} = \sqrt{\left(\mathrm{Re}(X_1) + \mathrm{Re}(X_2)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(X_1) + \mathrm{Im}(X_2)\right)^2}\\
&\theta_{(1+2)} = \arctan \frac{\mathrm{Im}(X_1) + \mathrm{Im}(X_2)}{\mathrm{Re}(X_1) + \mathrm{Re}(X_2)}
\end{aligned} \tag{190}
$$

Razlika dva kompleksna broja se dobija na sličan način tako što je realni deo razlike jednak razlici realnih delova, a imaginarni deo razlike je jednak razlici imaginarnih delova

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \mathrm{Re}(X_1) + j\,\mathrm{Im}(X_1)\\
&X_2 = \mathrm{Re}(X_2) + j\,\mathrm{Im}(X_2)\\
&X_1 - X_2 = \big(\mathrm{Re}(X_1) - \mathrm{Re}(X_2)\big) + j\big(\mathrm{Im}(X_1) - \mathrm{Im}(X_2)\big)\\
&\mathrm{Re}\big(X_1 - X_2\big) = \mathrm{Re}(X_1) - \mathrm{Re}(X_2)\\
&\mathrm{Im}\big(X_1 - X_2\big) = \mathrm{Im}(X_1) - \mathrm{Im}(X_2)\\
&X_{\mathrm{M}(1-2)} = \sqrt{\big(\mathrm{Re}(X_1) - \mathrm{Re}(X_2)\big)^2 + \big(\mathrm{Im}(X_1) - \mathrm{Im}(X_2)\big)^2}\\
&\theta_{(1\text{-}2)} = \arctan\frac{\mathrm{Im}(X_1) - \mathrm{Im}(X_2)}{\mathrm{Re}(X_1) - \mathrm{Re}(X_2)}
\end{aligned}
\tag{191}
$$

Proizvod dva kompleksna broja dobija se tako što se pomnože moduli a saberu faze:

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \mathrm{Re}(X_1) + j\,\mathrm{Im}(X_1)\\
&X_2 = \mathrm{Re}(X_2) + j\,\mathrm{Im}(X_2)\\
&X_1X_2 = \big(\mathrm{Re}(X_1)\,\mathrm{Re}(X_2) - \mathrm{Im}(X_1)\,\mathrm{Im}(X_2)\big) + j\big(\mathrm{Re}(X_1)\,\mathrm{Im}(X_2) + \mathrm{Re}(X_2)\,\mathrm{Im}(X_1)\big)\\
&\mathrm{Re}\big(X_1X_2\big) = \big(\mathrm{Re}(X_1)\,\mathrm{Re}(X_2) - \mathrm{Im}(X_1)\,\mathrm{Im}(X_2)\big)\\
&\mathrm{Im}\big(X_1X_2\big) = \big(\mathrm{Re}(X_1)\,\mathrm{Im}(X_2) + \mathrm{Re}(X_2)\,\mathrm{Im}(X_1)\big)\\
&X_{\mathrm{M}(1\times2)} = X_{\mathrm{M1}}X_{\mathrm{M2}}\\
&\theta_{(1\times2)} = \theta_1 + \theta_2
\end{aligned}
\tag{192}
$$

Deljenjem dva kompleksna broja zahteva da uvedemo konjugovanu vrednost kompleksnog broja:

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \mathrm{Re}(X_1) + j\,\mathrm{Im}(X_1)\\
&X_2 = X_1^{*} = \mathrm{Re}(X_1) - j\,\mathrm{Im}(X_1)\\
&\mathrm{Re}\big(X_2\big) = \mathrm{Re}(X_1)\\
&\mathrm{Im}\big(X_2\big) = -\,\mathrm{Im}(X_1)\\
&X_{\mathrm{M2}} = X_{\mathrm{M1}}\\
&\theta_2 = -\theta_1
\end{aligned}
\tag{193}
$$

Važne osobine konjugovano kompleksnih brojeva su sledeće:

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \mathrm{Re}(X_1) + j\,\mathrm{Im}(X_1)\\
&X_1X_1^{*} = \big(\mathrm{Re}(X_1)\big)^2 + \big(\mathrm{Im}(X_1)\big)^2\\
&\mathrm{Re}\big(X_1X_1^{*}\big) = \big(\mathrm{Re}(X_1)\big)^2 + \big(\mathrm{Im}(X_1)\big)^2\\
&\mathrm{Im}\big(X_1X_1^{*}\big) = 0\\
&X_{\mathrm{M}(1\times1^*)} = X_{\mathrm{M1}}^{2}\\
&\theta_{(1\times1^*)} = 0
\end{aligned}
\tag{194}
$$

Za deljenje dva kompleksna broja koriste se operacije množenja i sabiranja kompleksnih brojeva kao i osobine konjugovanih brojeva:

$$X_1 = \mathrm{Re}(X_1) + j\,\mathrm{Im}(X_1)$$
$$X_2 = \mathrm{Re}(X_2) + j\,\mathrm{Im}(X_2)$$
$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{X_1}{X_2}\frac{X_2^*}{X_2^*} = \frac{X_1 X_2^*}{X_2 X_2^*} = \tag{195}$$
$$= \frac{\left(\mathrm{Re}(X_1)\,\mathrm{Re}(X_2) + \mathrm{Im}(X_1)\,\mathrm{Im}(X_2)\right) + j\left(\mathrm{Re}(X_2)\,\mathrm{Im}(X_1) - \mathrm{Re}(X_1)\,\mathrm{Im}(X_2)\right)}{\left(\mathrm{Re}(X_2)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(X_2)\right)^2}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{X_1}{X_2}\right) = \frac{\left(\mathrm{Re}(X_1)\,\mathrm{Re}(X_2) + \mathrm{Im}(X_1)\,\mathrm{Im}(X_2)\right)}{\left(\mathrm{Re}(X_2)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(X_2)\right)^2}$$
$$\mathrm{Im}\left(\frac{X_1}{X_2}\right) = \frac{\left(\mathrm{Re}(X_2)\,\mathrm{Im}(X_1) - \mathrm{Re}(X_1)\,\mathrm{Im}(X_2)\right)}{\left(\mathrm{Re}(X_2)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(X_2)\right)^2} \tag{196}$$
$$X_{\mathrm{M}(1/2)} = \frac{X_{\mathrm{M1}}}{X_{\mathrm{M2}}}$$
$$\theta_{(1\times 2)} = \theta_1 - \theta_2$$

Iz prethodnih izraza se vidi da je sabiranje i oduzimanje kompleksnih brojeva jednostavnije kada su brojevi predstavljeni preko realnog i imaginarnog dela, a da su množenje i deljenje jednostavniji kada se koristi polarni koordinatni sistem.

6.3 Opis elemenata kola pomoću fazora

Izrazi za napone i struje za tri osnovna elementa električnih kola (otpornik, kondenzator i kalem), kao i izrazi za jednostavnije veze ovih elemenata, poslužiće kao uzorni primeri analize kola u prostoperiodičnom režimu rada.

6.3.1 Otpornik

U slučaju otpornika, veza između struje i napona data je Omovim zakonom, i ona je ista i u fazorskom predstavljanju:

$$v(t) = Ri(t)$$
$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \tag{197}$$

Za poznate vrednosti fazora struje kroz otpornik mogu se odrediti vrednosti fazora napona na otporniku:

$$\mathbf{I} = I_{\mathrm{M}}\angle\theta_I$$
$$\mathbf{V} = V_{\mathrm{M}}\angle\theta_V$$
$$V_{\mathrm{M}} = RI_{\mathrm{M}} \tag{198}$$
$$\theta_V = \theta_I$$

Kada se koristi eksponencijalna forma, tada je:

$$\begin{aligned} i(t) &= I_{\mathrm{M}} e^{j(\omega t+\theta_I)} \\ v(t) &= V_{\mathrm{M}} e^{j(\omega t+\theta_V)} \\ V_{\mathrm{M}} &= R I_{\mathrm{M}} \\ \theta_V &= \theta_I \end{aligned} \tag{199}$$

Za sinusoidalnu formu predstavljanja napona i struja, izrazi su sledeći:

$$\begin{aligned} i(t) &= I_{\mathrm{M}} \sin(\omega t+\theta_I) \\ v(t) &= V_{\mathrm{M}} \sin(\omega t+\theta_V) \\ V_{\mathrm{M}} &= R I_{\mathrm{M}} \\ \theta_V &= \theta_I \end{aligned} \tag{200}$$

Ako je poznat napon na otporniku, a treba naći struju kroz otpornik, tada se koriste sledeći izrazi

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{R} v(t) \\ \mathbf{I} &= \frac{1}{R}\mathbf{V} \end{aligned} \tag{201}$$

Za poznate vrednosti fazora struje kroz otpornik mogu se odrediti vrednosti fazora napona na otporniku:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= V_{\mathrm{M}} \angle \theta_V \\ \mathbf{I} &= I_{\mathrm{M}} \angle \theta_I \\ I_{\mathrm{M}} &= \frac{1}{R} V_{\mathrm{M}} \\ \theta_I &= \theta_V \end{aligned} \tag{202}$$

Kada se koristi eksponencijalna forma, ponovo se dobija da struja kroz otpornik i napon na njemu imaju istu fazu:

$$\begin{aligned} v(t) &= V_{\mathrm{M}} e^{j(\omega t+\theta_V)} \\ i(t) &= I_{\mathrm{M}} e^{j(\omega t+\theta_I)} \\ I_{\mathrm{M}} &= \frac{1}{R} V_{\mathrm{M}} \\ \theta_I &= \theta_V \end{aligned} \tag{203}$$

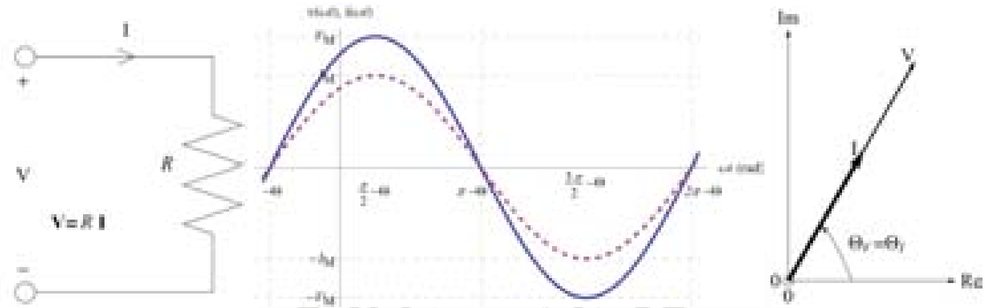
Za sinusoidalnu formu predstavljanja napona i struja, izrazi su sledeći:

$$\begin{aligned} i(t) &= I_{\mathrm{M}} \sin(\omega t+\theta_I) \\ v(t) &= V_{\mathrm{M}} \sin(\omega t+\theta_V) \\ I_{\mathrm{M}} &= \frac{1}{R} V_{\mathrm{M}} \\ \theta_V &= \theta_I \end{aligned} \tag{204}$$

Zajednička osobina svih izraza jeste da su napon na otporniku i struja kroz njega direktno srazmerni i da imaju istu fazu:

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{M}} &= RI_{\mathrm{M}} \\ \theta_V &= \theta_I \end{aligned} \tag{205}$$

Na slici 6.6. prikazan je otpornik u kolu sa naizmeničnim strujama, i njegov fazorski prikaz. Napon je nacrtan punom linijom a struja isprekidanom.



Slika 6.6. Vremenski i fazorski dijagram za napon i struju otpornika.

U trenutku t=0 faza napona i struje imaju istu vrednost. Ako je usvojeno da se svi naponi i struje predstavljaju sinusoidom, tada fazni ugao treba da se doda u argumentu funkcije.

6.3.2 Kondenzator

Pretpostavimo da je poznat napon na kondenzatoru i da ima oblik funkcije sinusa:

$$v(t) = V_{\mathrm{M}} \sin(\omega t + \theta) \tag{206}$$

Struja kroz kondenzator se dobija kao prvi izvod napona na njemu:

$$\begin{aligned} i_C(t) &= C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{M}}\sin(\omega t + \theta)}{\mathrm{d}t} = \omega C V_{\mathrm{M}} \cos(\omega t + \theta) \\ i_C(t) &= \omega C V_{\mathrm{M}} \sin(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \tag{207}$$

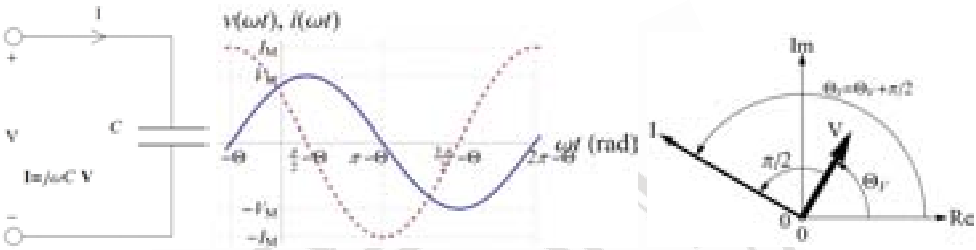
Da bi i napon i struja bili izraženi preko funkcije sinus, i ako je poznata početna faza napona na kondenzatoru, tada je početna faza struje kroz kondenzator veća za $\pi/2$, a amplituda struje se dobija kada se amplituda napona pomnoži sa ωC

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{M}} &= \omega C V_{\mathrm{M}} \\ \theta_v &= \theta \\ \theta_i &= \theta + \frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{208}$$

Ako je poznata struja kroz kondenzator, tada se napon izračunava kao integral

$$v(t) = \frac{1}{C}\int I_{\mathrm{M}} \sin(\omega t + \theta)\mathrm{d}t = -\frac{1}{\omega C} I_{\mathrm{M}} \cos(\omega t + \theta) = -\frac{1}{\omega C} I_{\mathrm{M}} \cos(\omega t + \theta)$$
$$v(t) = \frac{1}{\omega C} I_{\mathrm{M}} \sin(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2}) \tag{209}$$

U ovom izvođenju koristili smo neodređeni integral za razliku od određenog integrala kada su računate prelazne pojave. Takođe, nije uzimana u obzir ranije akumulisana energija u kondenzatoru kao jednosmerni napon koji je postojao u nekom trenutku vremena. Na primer u t=0 nas interesuje samo odziv na sinusoidalan naponski ili strujni izvor. Na slici 6.7. prikazan je kondenzator u kolu sa naizmeničnim strujama, i njegov fazorski prikaz. Napon je nacrtan punom linijom a struja isprekidanom.



Slika 6.7. Vremenski i fazorski dijagram za napon i struju kondenzatora.

Na osnovu fazorskog predstavljanja može se napisati relacija koja povezuje fazor struje kroz kondenzator i fazor napona na kondenzatoru:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= j\omega C\mathbf{V} \\ I_{\mathrm{M}} &= \omega C V_{\mathrm{M}} \\ j &= e^{j\pi/2} \\ \theta_i &= \theta_v + \frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{210}$$

Maksimalna vrednost struje dobije se kada se maksimalna vrednost napona pomnoži sa ωC, a j pokazuje da je ugao struje za $\pi/2$ veći od ugla napona. Pravila koja se koriste za izračunavanje struje su pravila za proizvod kompleksnih brojeva, gde se napon na elementu predstavlja kompleksnim brojem, a $j\omega C$ je kompleksni broj koji ima samo imaginarnu komponentu.

6.3.3 Kalem

Pretpostavimo da je poznata struja kroz kalem i da ima oblik funkcije sinusa:

$$i(t) = I_{\mathrm{M}} \sin(\omega t + \theta) \tag{211}$$

Napon na kalemu se dobija kao prvi izvod struje kroz njega:

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{M}} \sin(\omega t + \theta)}{\mathrm{d}t} = \omega L I_{\mathrm{M}} \cos(\omega t + \theta)$$
$$u_L(t) = \omega L I_{\mathrm{M}} \sin(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2}) \tag{212}$$

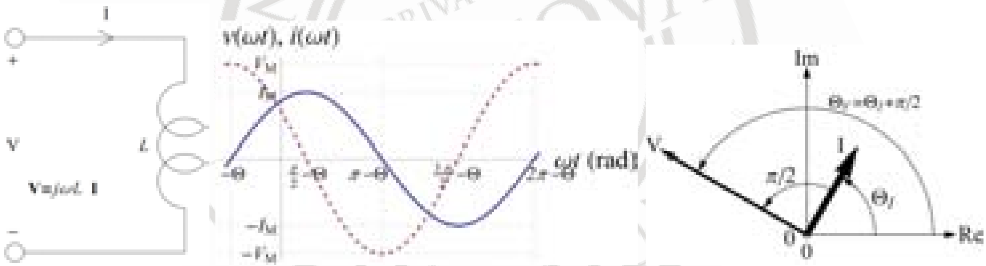
Da bi i napon i struja bili izraženi preko funkcije sinus, i ako je poznata početna faza struje kroz kalem, tada je početna faza napona na kalemu veća za π/2, a amplituda napona se dobija kada se amplituda struje pomnoži sa ωL

$$\begin{aligned} V_\mathrm{M} &= \omega L I_\mathrm{M} \\ \theta_i &= \theta \\ \theta_v &= \theta + \frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{213}$$

Ako je poznat napon na kalemu, tada se struja izračunava kao integral

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L}\int V_\mathrm{M}\sin(\omega t+\theta)\mathrm{d}t = -\frac{1}{\omega L}V_\mathrm{M}\cos(\omega t+\theta) = -\frac{1}{\omega L}V_\mathrm{M}\cos(\omega t+\theta) \\ i(t) &= \frac{1}{\omega L}V_\mathrm{M}\sin(\omega t+\theta-\frac{\pi}{2}) \end{aligned} \tag{214}$$

U ovom izvođenju korišćen je neodređeni integral, zato što se ne uzima u obzir ranije akumulisana energija u kalemu kao jednosmerna struja, koji je postojao u nekom trenutku vremena, na primer u t=0. U ovoj analizi se traži samo odziv na promenljive izvore koji imaju sinusoidalnu promenu. Na slici 6.8. prikazan je kondenzator u kolu sa naizmeničnim strujama, i njegov fazorski prikaz. Struja kroz kalem je nacrtana punom linijom, a napon na kalemu isprekidanom.



Slika 6.8. Vremenski i fazorski dijagram za napon i struju kalema.

Na osnovu fazorskog predstavljanja može se napisati relacija koja povezuje fazor napona na kalemu i fazor struje kroz kalem:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= j\omega L\mathbf{I} \\ V_\mathrm{M} &= \omega L I_\mathrm{M} \\ j &= e^{j\pi/2} \\ \theta_v &= \theta_i + \frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{215}$$

Maksimalna vrednost napona dobije se kada se maksimalna vrednost struje pomnoži sa ωL, a j pokazuje da je ugao struje za π/2 veći od ugla napona. Pravila koja se koriste za izračunavanje napona su pravila za proizvod kompleksnih brojeva, gde se struja kroz element predstavljena kompleksnim brojem, a $j\omega L$ je kompleksni broj koji ima samo imaginarnu komponentu.

6.4 Uopšteni Omov zakon, impedansa i admitansa

U električnim kolima sa jednosmernim strujama, količnik napona na otporniku i struje kroz otpornik jednaki su konstanti na osnovu Omovog zakona. Ta konstanta je nazvana otpornost otpornika.

Omov zakon važi za otpornike i u slučaju kola sa naizmeničnim strujama. Isti zakon može da se generalizuje da važi i za kalemove i kondenzatore, kada se naponi i struje prestave fazorima. Naponi i struje postaju kompleksne veličine, zbog čega i količnik napona i struje takođe može biti kompleksni broj.

Kada se formira količnik fazora napona na nekom elementu i fazora struje kroz isti element dobija se:

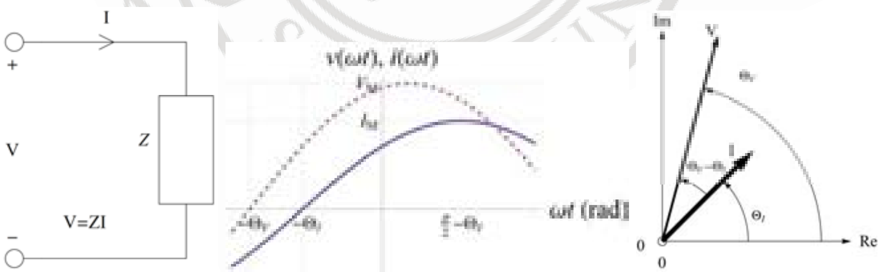
$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \tag{216}$$

Recipročna vrednost impedanse naziva se admitansa. Jedinica za admitansu je simens (S).

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} \tag{217}$$

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} \tag{218}$$

Relacije koje povezuju napon i struju preko impedanse i admitanse nazivaju se uopšteni (generalizovani) Omov zakon. Slika 6.9. ilustruje jedan primer fazorskog predstavljanja napona i struje neke impedanse. Kada je impedansa jedan kalem ili kondenzator, fazna razlika između napona i struje može da bude -π/2 ili π/2, a kada je samo otpornik fazna razlika je 0. U svim ostalim slučajevima je fazna razlika u opsegu od -π/2 do π/2.



Slika 6.9. Vremenski i fazorski dijagram za napon i struju impedanse.

Kako se impedanse i admitansa mogu predstaviti kompleksnim brojevima, između njih važe sledeće relacije koje se mogu izvesti u polarnom koordinatnom sistemu (preko modula i ugla):

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{V_M \angle \theta_V}{I_M \angle \theta_I} = \frac{V_M}{I_M} \angle(\theta_V - \theta_I) = Z\angle(\theta_V - \theta_I) = Z\angle\theta_Z \tag{219}$$

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = \frac{I_M \angle \theta_I}{V_M \angle \theta_V} = \frac{I_M}{V_M} \angle(\theta_I - \theta_V) = Y\angle(\theta_I - \theta_V) = Y\angle\theta_Y \tag{220}$$

U pravouglom koordinatnom sistemu, impedansa i admitansa se predstavljaju preko realnog i imaginarnog dela:

$$\mathbf{Z}(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \tag{221}$$

$$\mathbf{Y}(j\omega) = G(\omega) + jB(\omega) \tag{222}$$

Realni deo impedanse, koji se označava sa $R(\omega)$, naziva se rezistivna komponenta ili rezistansa. Imaginarni deo impedanse, koji se označava sa $X(\omega)$, naziva se reaktivna komponenta ili reaktansa. Realni deo admitanse naziva se konduktansa i označava sa $G(\omega)$. Imaginarni deo admitanse naziva se susceptansa, koristi se oznaka $B(\omega)$. Realni delovi mogu biti samo pozitivni, a imaginarni delovi mogu biti pozitivni ili negativni.

Impedansa i admitansa se dobijaju kao količnik dva fazora, ali oni nisu fazori. Vrednost impedanse i admitanse su konstantne i ne zavise od vremena, dok se pod pojmom fazora podrazumeva da je to vrednost veličine u nekom trenutku i da se menja sa vremenom. Međutim, impedansa i admitansa imaju vrednost koja zavisi od učestanosti sinusoidalnih signala. Za različite učestanosti i njihove vrednosti se razlikuju.

Zavisno od toga koji je oblik predstavljanja kompleksnog broja korisniji za izvođenja, koriste se dve vrste predstavljanja:

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \tag{223}$$

$$\theta_Z(\omega) = \arctan\left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right) \tag{224}$$

$$R(\omega) = Z(\omega)\cos(\theta_Z(\omega)) \tag{225}$$

$$X(\omega) = Z(\omega)\sin(\theta_Z(\omega)) \tag{226}$$

U prostoperiodičnom sistemu, u kome postoji samo jedna učestanost sinusoidalnog signala, nije potrebno da se piše da su zavisne od frekvencije:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \tag{227}$$

$$\theta_Z = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) \tag{228}$$

$$R = Z\cos(\theta_Z) \tag{229}$$

$$X = Z\sin(\theta_Z) \tag{230}$$

Impedansa se može odrediti ako je poznata admitansa, kao i obrnuto:

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \tag{231}$$

$$X = \frac{-B}{G^2 + B^2} \tag{232}$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \tag{233}$$

$$B=\frac{-X}{R^2+X^2} \tag{234}$$

U sledećoj tabeli su date impedanse i admitanse za tri osnovna električna elementa (otpornik, kondenzator i kalem):

Tabela 1. Impedanse i admitanse za tri osnovna električna elementa

element	impedansa (**Z**)	admitansa (**Y**)
otpornik, R	$\mathbf{Z}_R=R$	$\mathbf{Y}_R=\frac{1}{R}$
kondenzator, C	$\mathbf{Z}_C=\frac{1}{j\omega C}=-j\frac{1}{\omega C}$	$\mathbf{Y}_C=j\omega C$
kalem, L	$\mathbf{Z}_L=j\omega L$	$\mathbf{Y}_L=\frac{1}{j\omega L}=-j\frac{1}{\omega L}$

U ovoj tabeli treba voditi računa da je R otpornost otpornika, a ne rezistivna komponenta.

6.5 Snaga u kolima sa naizmeničnim strujama

Po definiciji, trenutna snaga je jednaka brzini promene energije:

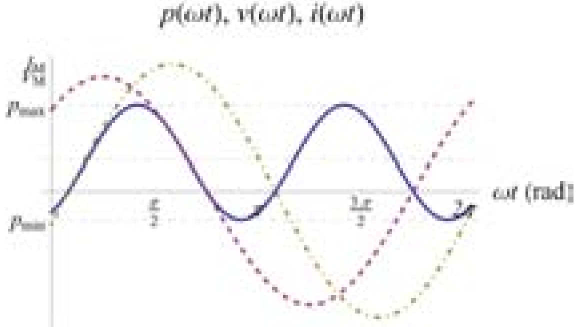
$$p=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=vi \tag{235}$$

Primenom trigonometrijskih pravila, dobija se da snaga ima vremenski promenljiv deo i deo koji ne zavisi od vremena:

$$\begin{aligned}
p&=V_\mathrm{M}\sin(\omega t+\theta_v)I_\mathrm{M}\sin(\omega t+\theta_i)=\\
&=\frac{1}{2}V_\mathrm{M}I_\mathrm{M}\cos(2\omega t+\theta_v+\theta_i)+\frac{1}{2}V_\mathrm{M}I_\mathrm{M}\cos(\theta_v-\theta_i)\\
p&=p(\omega t)+P
\end{aligned} \tag{236}$$

Srednja snaga zavisi od amplituda napona i struja, kao i od razlike faza napona i struje. Vremenski promenljiv deo snage ima dva puta veću učestanost promene učestanosti napona ili struje:

$$\begin{aligned}
p(\omega t)&=\frac{1}{2}V_\mathrm{M}I_\mathrm{M}\cos(2\omega t+\theta_v+\theta_i)\\
P&=\frac{1}{2}V_\mathrm{M}I_\mathrm{M}\cos(\theta_v-\theta_i)
\end{aligned} \tag{237}$$



Slika 6.10. Ilustracija snage u kolima sa naizmeničnim strujama.

Srednja snaga periodičnog signala se izračunava kao srednja vrednost proizvoda napona i struje. Dovoljno je da se računa srednja vrednost u okviru jedne periode:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T vi = \frac{1}{2}V_\mathrm{M} I_\mathrm{M} \cos(\theta_v - \theta_i) \tag{238}$$

Ako označimo razliku faza fazora napona na nekom elementu i struje kroz element sa ϕ, dobija se da je srednja snaga

$$P = \frac{1}{2}V_\mathrm{M} I_\mathrm{M} \cos\phi \tag{239}$$

Najveća snaga u funkciji fazne razlike dobija se kada je $\phi = 0$:

$$P = \frac{V_\mathrm{M} I_\mathrm{M}}{2} \tag{240}$$

Otpornik je pasivni element koji električnu energiju pretvara je u toplotu energiju. Fazna razlika napona na otporniku i struje kroz otpornik je jednaka nuli, $\phi = 0$. Za otpornik postoji jednostavna relacija za snagu koja je jednaka proizvodu jednosmernog napona na otporniku V_DC i jednosmerne struje kroz njega I_DC:

$$P = V_\mathrm{DC} I_\mathrm{DC} \tag{241}$$

Da bi dobili sličnu relaciju za otpornik na čijim je krajevima sinusoidalni napon a kroz njega sinusoidalna struja, definisaćemo efektivne vrednosti napona V_ef i struje I_ef:

$$\begin{aligned} P &= \frac{V_\mathrm{M} I_\mathrm{M}}{2} = \frac{V_\mathrm{M}}{\sqrt{2}}\frac{I_\mathrm{M}}{\sqrt{2}} = V_\mathrm{ef} I_\mathrm{ef} \\ V_\mathrm{ef} &= \frac{V_\mathrm{M}}{\sqrt{2}} \\ I_\mathrm{ef} &= \frac{I_\mathrm{M}}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{242}$$

Ako se pođe od Omovog zakona za naizmenične struje i otpornik, dobija se da se može koristiti maksimalna vrednost, modul ili efektivna vrednost za napone i struje:

$$R = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{V_\mathrm{M}}{I_\mathrm{M}} = \frac{V_\mathrm{ef}}{I_\mathrm{ef}} \tag{243}$$

Primenom Omovog zakona, napon ili struja se mogu izraziti preko otpornosti otpornika. Tako se i srednja snaga na otporniku može izraziti i preko kvadrata napona ili kvadrata struje i otpornosti (ili provodnosti):

$$P = V_\mathrm{ef} I_\mathrm{ef} = R I_\mathrm{ef}^2 = \frac{V_\mathrm{ef}^2}{R} = G V_\mathrm{ef}^2 = \frac{I_\mathrm{ef}^2}{G} \tag{244}$$

Upravo zbog činjenice da su izrazi za naizmenične struje isti kao i za ekvivalentnu jednosmernu struju, u brojnim slučajevima se umesto maksimalne vrednost sinusoidalne veličine koristi efektivna vrednost u fazorskom predstavljanju napona i struje.

6.6 Kirhofovi zakoni u kolima sa naizmeničnim strujama

Isti zakoni koji važe za kola sa jednosmernim strujama i za prelazni režim, važe i za kola sa naizmeničnim strujama.

6.6.1 Prvi (strujni) Kirhofov zakon

Po prvom Kirhofovom zakonu, ili strujnom Kirhofovom zakonu, suma svih struja koje utiču u čvor električnog kola jednaka je sumi svih struja koje ističu iz tog čvora. Ako je usvojeno da je smer svih struja ka čvoru u koji se stiče N grana, tada je suma svih struja jednaka nuli:

$$\sum_{j=1}^{N} i_j(t) = 0 \tag{245}$$

U slučaju prostoperiodične vrste rada električnog kola, sve struje su sinusoidalne i imaju istu učestanost. Strujni Kirhofov zakon važi u svakom trenutku vremena:

$$\sum_{j=1}^{N} I_{\mathrm{M}\,j} \sin(\omega t + \theta_{i,j}) = 0 \tag{246}$$

Kako fazorska predstava označava struje u jednom trenutku, na primer za t=0, a struje su potpuno određene amplitudom sinusoide i fazom u trenutku t=0, prvi Kirhofov zakon može da se napiše i preko fazora struja:

$$\sum_{j=1}^{N} \mathbf{I}_j = 0 \tag{247}$$

Za fazorsko predstavljanje struja, prvi Kirhofov zakon može da se interpretira na sledeći način: suma fazora svih struja koje se stiču u neki čvor električnog kola jednaka je nuli; podrazumeva se da sve struje imaju referentni smer ka čvoru. Ista formula važi i ako sve struje imaju referentni smer od čvora. Promena referentnog smera struje može da se uradi tako što se faza struje poveća za π, u fazorskom predstavljanju struje.

6.6.2 Drugi (naponski) Kirhofov zakon

Po drugom Kirhofovom zakonu zbir svih napona u petlji jednak je nuli. Ovaj zakon koji je uveden kod jednosmernih struja, važi i za vremenski promenljive struje.

U vremenskom domenu zbir svih napona u petlji jednak je nuli:

$$\sum_{j=1}^{N} v_j(t) = 0 \tag{248}$$

U slučaju prostoperiodične vrste rada električnog kola, svi naponi su sinusoidalni i imaju istu učestanost. Naponski Kirhofov zakon važi u svakom trenutku vremena:

$$\sum_{j=1}^{N} V_{\mathrm{M}\,j} \sin(\omega t + \theta_{v,j}) = 0 \tag{249}$$

Kako fazorska predstava označava napone u jednom trenutku i svi naponi su potpuno određeni amplitudom sinusoide i fazom u trenutku t=0, drugi Kirhofov zakon može da se napiše i preko fazora napona:

$$\sum_{j=1}^{N} \mathbf{V}_j = 0 \tag{250}$$

Za fazorsko predstavljanje napona, drugi Kirhofov zakon može da se interpretira na sledeći način: suma fazora napona u petlji električnog kola jednaka je nuli; podrazumeva se su referentni polariteti napona takvi da su saglasni sa smerom obilaska petlje. Ukoliko je polaritet napona suprotan od smera obilaska petlje, promena polariteta može da se uradi tako što se faza napona uveća za π.

6.7 Osnovne transformacije u kolima sa naizmeničnim strujama

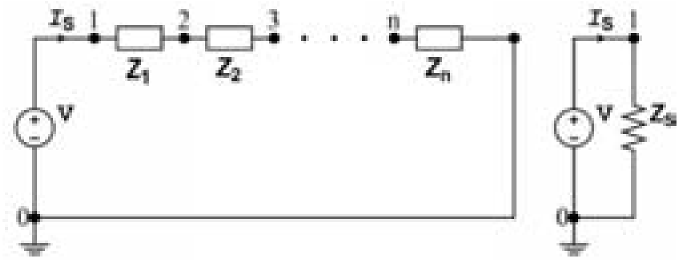
Primenom uopštenog Omovog zakona, kao i strujnog i naponskog Kirhofovog zakona, neka kola se mogu uprostiti. Uprošćenje podrazumeva da je smanjen broj jednačina kojima se električno kolo opisuje, čime je olakšano i rešavanje kola.

6.7.1 Serijska (redna) veza impedansi

Serijska ili redna veza impedansi prikazana je na slici 6.11. Redna veza se dobija kada se n impedansi nadovezuje jedna na drugu, tako da ista struja teče kroz sve impedanse. Za svaku petlju u električnom kolu može se napisati jednačina po naponskom Kirhofovom zakonu:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}_1\mathbf{I}_s + \mathbf{Z}_2\mathbf{I}_s + \cdots + \mathbf{Z}_n\mathbf{I}_s = (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \cdots + \mathbf{Z}_n)\mathbf{I}_s \tag{251}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}_s\mathbf{I}_s \tag{252}$$



Slika 6.11. Serijska (redna) veza impedansi.

Jedan od čvorova je određen kao referentni i označen kao nulti, a simbol uzemljenja (mase) se koristi da bi se lakše uočilo koji su to čvorovi električnog kola za koje treba izračunati potencijal. Počev od čvora 1 do 0 protiče ista struja kroz sve elemente, a napon čvora 1 ne sme da se promeni nakon određivanja ekvivalentne impedanse. Sve impedanse koje su vezane na red mogu da se zamene samo jednom impedansom kroz koju teče ista struja kao i kroz svaku pojedinačnu impedansu, a napon u čvoru 1 je isti u originalnom električnom kolu i u kolu sa ekvivalentnom impedansom $\mathbf{Z}_S$. Ekvivalentna impedansa je jednaka zbiru pojedinačnih redno vezanih impedansi:

$$\mathbf{Z}_S = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \cdots + \mathbf{Z}_n \tag{253}$$

Kako se sve impedanse predstavljaju kompleksnim brojevima, to se primenjuju pravila za sabiranje kompleksnih brojeva.

6.7.2 Delitelj (razdelnik) napona

Posmatrajmo dve redno vezane impedanse, kao na slici 6.12. Kroz obe impedanse protiče ista struja **I**

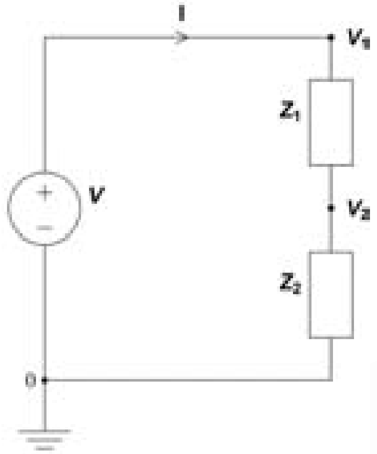
$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \tag{254}$$

Naponi na serijski vezanim impedansama su po Omovom zakonu proizvod impedanse i struje koja teče kroz taj element:

$$\mathbf{V}_{Z_1} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{V} \tag{255}$$

$$\mathbf{V}_{Z_2} = \mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{V} \tag{256}$$

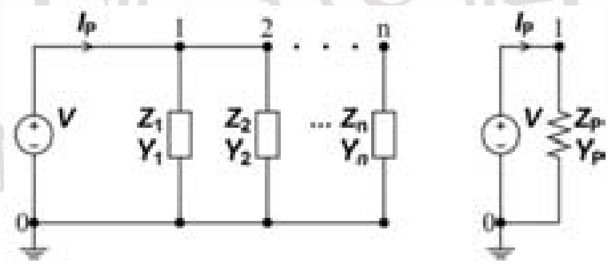
Ovo znači da se u kolu sa slike 6.12. napon izvora **V** deli između impedansi $\mathbf{Z}_1$ i $\mathbf{Z}_2$ u direktnoj srazmeri sa njihovim vrednostima. Stoga se ovo kolo naziva delitelj (razdelnik) napona.



Slika 6.12. Delitelj (razdelnik) napona.

6.7.3 Paralelna veza impedansi

Kada se *n* impedansi poveže između dva čvora, takva veza se naziva paralelna veza impedansi, Paralelna vezi impedansi prikazana je na slici 6.13. Čvorovi koji su kratko spojeni se interpretiraju kao jedan čvor (to znači da su čvorovi 1, 2, … n, jedan te isti čvor koji je na slici 6.13. desno i označen kao čvor 1).



Slika 6.13. Paralelna veza impedansi.

Na slici 6.13. levo možemo smatrati da su na čvor 1 povezani i naponski izvor i svih *n* admitansi. Tada se može napisati jednačina po strujnom Kirhofovom zakonu:

$$\mathbf{I}_p = \mathbf{Y}_1\mathbf{V} + \mathbf{Y}_2\mathbf{V} + \cdots + \mathbf{Y}_n\mathbf{V} = (\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \cdots + \mathbf{Y}_n)\mathbf{V} \tag{257}$$

Za ekvivalentni čvor 1 na slici 4.7. desno može napisati:

$$\mathbf{I}_p = \mathbf{Y}_p\mathbf{V}_s \tag{258}$$

Izrazi su identični kao za rednu vezu impedansi, s tim da su umesto impedansi napisane admitanse, a i napon i struja su promenili mesta.

Napon izvora **V** i struja kroz izvor $\mathbf{I}_P$ u oba kola na slici 6.13. su isti. Za ekvivalentnu admitansu $\mathbf{Y}_p$ sada može da se napiše:

$$\mathbf{Y}_P = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \cdots + \mathbf{Y}_n \tag{259}$$

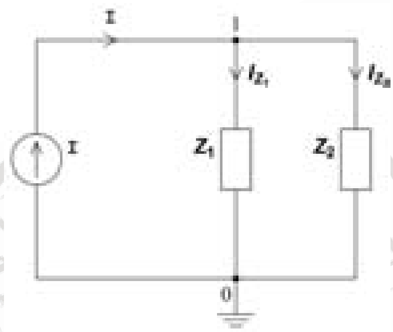
Ekvivalentna admitansa paralelno vezanih admitansa može da se izračina kao zbir pojedinačnih admitansa. Umesto admitanse, prethodni izraz može da se napiše preko impedansi, i tada se dobija sledeća relacija:

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_P} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \cdots + \frac{1}{\mathbf{Z}_n} \tag{260}$$

Naponi i struje su predstavljeni kao fazori, a impedanse i admitanse su kompleksni brojevi.

6.7.4 Delitelj (razdelnik) struja

Posmatrajmo dve paralelno vezane impedanse koje su prikazane na slici 6.14.



Slika 6.14. Delitelj (razdelnik) struje.

Obe impedanse su priključene između istih čvorova što znači da je i napon na njima isti. Tako je ekvivalentna impedansa dve paralelno vezane impedanse:

$$\mathbf{Z}_P = \frac{1}{\dfrac{1}{\mathbf{Z}_1} + \dfrac{1}{\mathbf{Z}_2}} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \tag{261}$$

Napon u čvoru je 1 može da se izrazi preko struje strujnog izvora i ekvivalentne impedanse:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}\,\frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \tag{262}$$

Struje kroz svaku od impedansi se dobijaju po Omovom zakonu kao količnik napona u čvoru 1 i same impedanse:

$$\mathbf{I}_{\mathbf{Z}_1} = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{I} \tag{263}$$

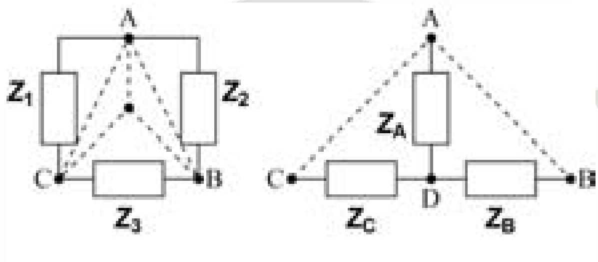
$$\mathbf{I}_{\mathbf{Z}_2} = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{I} \tag{264}$$

Struja izvora I deli se između impedansi $\mathbf{Z}_1$ i $\mathbf{Z}_2$ s tim da je struja manja kada teče kroz impedansu koja ima veću vrednost. Ovakvo kolo se naziva delitelj (razdelnik) struje.

6.8 Transformacije trougao - zvezda i zvezda - trougao

Transformacije veza impedansi iz trougla u zvezdu i iz zvezde u trougao su dve često korišćene transformacije u rešavanju električnih kola. Isti izrazi za transformacije trougla u zvezdu i zvezde u trougao koji su prikazani za otpornike u delu o jednosmernim strujama, mogu se primeniti i na impedanse s tim da se simboli za otpornost zamene simbolima za impedansu.

Ilustracija transformacija je prikazana na slici 6.15.



Slika 6.15. Transformacije trougao-zvezda i zvezda-trougao.

U stručnoj literaturi na engleskom jeziku često se koristi simboličko označavanje za ove dve transformacije impedansi: $\Delta\rightarrow Y$ i $Y\rightarrow\Delta$.

Da su ova dva kola ekvivalentna, potvrđuje se time što su naponi u čvorovima A, B i C isti, a iste su i struje koje bi bile u granama koje su preko čvorova A, B i C povezivane sa ovim kolom. Podrazumeva se da četvrti čvor nije povezan sa drugim elementima osim sa A, B i C.

Impedansa između ma koja dva čvora u oba kola, kada je treći čvor nepovezan, mora biti ista. Korišćenjem pravila za paralelno i redno vezivanje impedansi, dobija se:

$$\mathbf{Z}_{AB} = \mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B = \frac{\mathbf{Z}_2(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3)}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3} \tag{265}$$

$$\mathbf{Z}_{BC} = \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C = \frac{\mathbf{Z}_3(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3} \tag{266}$$

$$\mathbf{Z}_{AC} = \mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_C = \frac{\mathbf{Z}_1(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3} \tag{267}$$

Rešavanjem sistema jednačina po $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{Z}_B$ i $\mathbf{Z}_C$, dobija se:

$$\mathbf{Z}_A = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3} \tag{268}$$

$$\mathbf{Z}_B = \frac{\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3} \tag{269}$$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3} \tag{270}$$

Rešavanjem sistema jednačina po $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ i $\mathbf{Z}_3$, dobija se:

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_B\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_B} \tag{271}$$

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_B\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_C} \tag{272}$$

$$\mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_B\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A} \tag{273}$$

Ove transformacije se obično koriste kada nije moguća primena transformacija iz paralelnih u redna kola i obrnuto.

6.9 Transformacije izvora u kolima sa naizmeničnim strujama

Idealni naponski i strujni izvori se često koriste u izračunavanjima zato što značajno smanjuju složenost problema u analizama, a i stvarne karakteristike kola nisu značajnije različite od idealnih modela. Realni izvori se moraju primeniti kada nije moguće modelovati kolo idealnim elementima, na primer, kada se ne zna koliki je napon između čvorova između kojih su paralelno vezana dva različita idealna naponska izvora, ili, kada se ne zna kolika je struja u rednoj vezi dva različita strujna izvora.

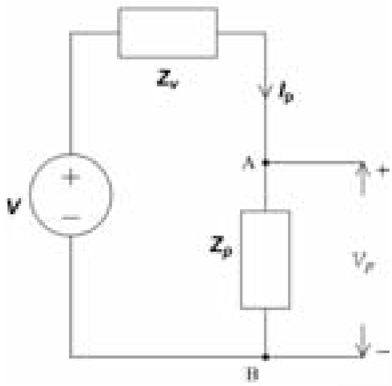
Realni naponski izvor prikazan je na slici 6.16. Realni naponski izvor ima konačnu unutrašnju impedansu $\mathbf{Z}_V$ na red sa idealnim naponskim izvorom $\mathbf{V}$. Realni strujni izvor prikazan je na slici 6.17., i on ima konačnu unutrašnju impedansu $\mathbf{Z}_I$ paralelno sa idealnim strujnim izvorom, $\mathbf{I}$. Potrošač koji je prikazan na slikama 6.16. i 6.17., $\mathbf{Z_P}$, treba da ilustruje ostatak električnog kola koje je priključeno na naponski ili strujni izvor.

U nekim slučajevima je lakše rešiti električno kolo (smanjiti broj grana ili broj čvorova kola) ako se pretvori strujni izvor u ekvivalentni naponski izvor, i obrnuto. Da bi oba ova električna izvora obezbedila isti napon na potrošaču, i istu struju kroz ekvivalentni potrošač $\mathbf{Z}_P$, napon i struja nezavisnih izvora treba da zadovolje neke uslove. Primenom Omovog zakona, isti napon na potrošaču i ista struja kroz potrošač se dobijaju kada su ispunjeni sledeći uslovi:

$$\mathbf{Z}_V = \mathbf{Z}_I \tag{274}$$

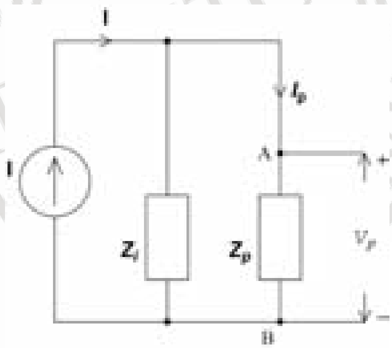
$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{R}_V} \tag{275}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}_I\mathbf{I} \tag{276}$$



Slika 6.16. Realni naponski izvor.

Kada u električnom kolu postoji nezavisni strujni izvor (predstavljen preko fazora struje sa **I**) a sa njim je paralelno povezana impedansa $\mathbf{Z}_P$, tada se ovakvo kolo može predstaviti i ekvivalentnim nezavisnim naponskim izvorom čiji je napon $\mathbf{V}= \mathbf{Z}_P\mathbf{I}$ a koji ima redno vezanu impedansu $\mathbf{Z}_P$. Kada električno kolo sadrži nezavisni naponski izvor (predstavljen preko fazora napona **V**) sa redno vezanom impedansom $\mathbf{Z}_P$, tada se ovakvo kolo može zameniti kolom koje ima ekvivalentni strujni izvor struje $\mathbf{I}=\mathbf{V}/\mathbf{Z}_P$ sa paralelno povezanom impedansom $\mathbf{Z}_P$ (nekada se umesto impedanse koristi admitansom $\mathbf{Y}_P$). Ostali parametri kola u kome se nalaze nezavisni izvori ostaju nepromenjeni.



Slika 6.17. Realni strujni izvor.

Relacije između ekvivalentnog realnog naponskog i strujnog izvora su:

$$\mathbf{I}_P = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_V + \mathbf{Z}_P} = \frac{\mathbf{Z}_I}{\mathbf{Z}_I + \mathbf{Z}_P}\mathbf{I} \tag{277}$$

$$\mathbf{V}_P = \frac{\mathbf{Z}_P}{\mathbf{Z}_V + \mathbf{Z}_P}\mathbf{V} = \frac{\mathbf{Z}_I\mathbf{Z}_P}{\mathbf{Z}_I + \mathbf{Z}_P}\mathbf{I} \tag{278}$$

Transformacije izvora se često koriste za uprošćavanje električnih kola, da bi se za potrebe analize kola, smanjio broj čvorova ili smanjio broj petlji u kolu.

6.10 Sistem jednačina napona čvorova za kola sa naizmeničnim strujama

Za potrebe rešavanja električnih kola, u situaciji kada je broj čvorova veći od broja grana kola, najbolje je da se koristi sistem jednačina formiran za napone svih čvorova kola. Za kolo koje ima *n* čvorova, broj linearnih jednačina koje treba postaviti je za jedan manji od broja čvorova, zato što se jedan čvor može koristiti kao zajednički referentni čvor. Broj nepoznatih napona u sistemu je *n*-1. Sistem jednačina napona čvorova predstavlja sistem linearnih jednačina napona predstavljenih kao fazori a sa kompleksnim koeficijentima:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_1 &= \mathbf{Y}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{Y}_{12}\mathbf{V}_2 + \cdots + \mathbf{Y}_{1(n-1)}\mathbf{V}_{(n-1)} \\
\mathbf{I}_2 &= \mathbf{Y}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{Y}_{22}\mathbf{V}_2 + \cdots + \mathbf{Y}_{2(n-1)}\mathbf{V}_{(n-1)} \\
&\vdots \\
\mathbf{I}_{(n-1)} &= \mathbf{Y}_{(n-1)1}\mathbf{V}_1 + \mathbf{Y}_{(n-1)2}\mathbf{V}_2 + \cdots + \mathbf{Y}_{(n-1)(n-1)}\mathbf{V}_{(n-1)}
\end{aligned} \tag{279}$$

Dijagonalni elementi, $\mathbf{Y}_{mm}$, predstavljaju zbir provodnosti svih grana koje su povezane sa čvorom *m*. Struje sa leve strane jednačina, $\mathbf{I}_m$, su struje izvora koje utiču u čvor *m*. Kada je $m \neq n$, $\mathbf{Y}_{mn}$ se računa kao admitansi svih grana između čvorova *m* i *n*.

Kako se često dešava da su čvorovi kola povezani samo sa nekoliko drugih čvorova, to je veliki broj admitansi jednak nuli, a što je ekvivalentno beskonačnoj impedansi, odnosno nema impedanse između tih čvorova. Sistem jednačina se može napisati posmatranjem kola.

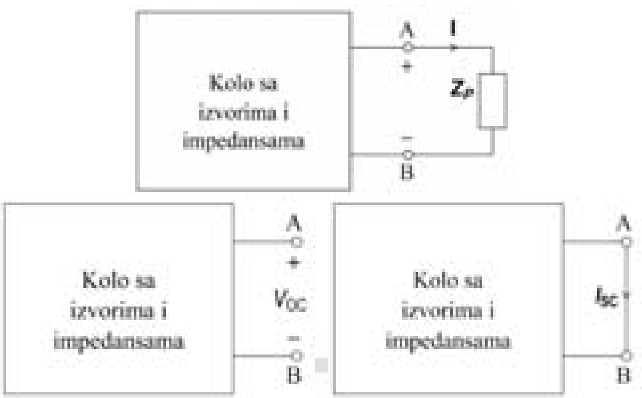
Nakon što se odrede svi naponi čvorova, a zajednički čvor ima vrednost 0, struje kroz neku admitansu u kolu se izračunavaju kao proizvod razlike napona između čvorova između kojih je priključen element i admitanse.

Treba se podsetiti da su struje i naponi fazori, a admitanse i impedanse kompleksni brojevi, odnosno da se pri rešavanju kola primenjuju pravila za rad sa kompleksnim brojevima. Rešenje sistema jednačina za struje i napone su kompleksni brojevi koji se koriste u interpretaciji fazorskog predstavljanja struja i napona.

6.11 Tevenenova i Nortonova teorema za kola sa naizmeničnim strujama

Pretpostavimo da se analizira električno kolo za koje je potrebno da se odredi struja, napon ili snaga na nekoj impedansi, koju ćemo nazvati potrošač i obeležiti sa $\mathbf{Z}_P$. Ovakva šema ilustrovana je na slici 6.18. Ukoliko raskinemo vezu koja povezuje potrošač, između priključaka kola možemo da izmerimo ili izračunamo napon $\mathbf{V}_{\mathrm{OC}}$, koji nazivamo napon otvorenog kola. Ako kratko spojimo izlazne krajeve kola, možemo da izmerimo ili izračunamo struju $\mathbf{I}_{\mathrm{SC}}$, koju nazivamo struja kratkog spoja.

Na osnovu napona otvorenog kola $\mathbf{V}_{\mathrm{OC}}$ i struje kratkog spoja $\mathbf{I}_{\mathrm{SC}}$, električno kolo se može predstaviti ekvivalentnim nezavisnim idealnim naponskim izvorom $\mathbf{V}_{\mathrm{T}}$ i rednom impedansom $\mathbf{Z}_{\mathrm{T}}$, ili ekvivalentnim nezavisnim idealnim strujnim izvorom $\mathbf{I}_{\mathrm{N}}$, kojem je paralelno vezana impedansa $\mathbf{Z}_{\mathrm{N}}$, kao što je to pokazano za realni naponski izvor i realni strujni izvor. Ove ekvivalencije proizilaze iz Tevenenove i Nortonove teorema. Zahvaljujući ovim transformacijama, umesto da se analizira složen kolo, celo kolo osim potrošača se može zameniti ekvivalentnim realnim naponskim ili strujnim izvorom i jednom impedansom, a da se napon na potrošaču $\mathbf{Z}_P$ i struja kroz njega ne promene.



Slika 6.18. Određivanje napona otvorenih krajeva i struje kratkog spoja.

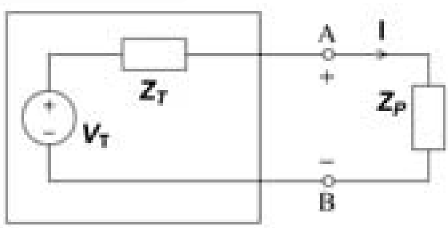
Na osnovu nacrtanih šema na slikama 6.19. i 6.20., kada se u Tevenenovom ekvivalentnom kolu raskine veza sa potrošačem, dobija se vrednost za nezavisni izvor.

$$\mathbf{V}_\mathrm{T} = \mathbf{V}_\mathrm{OC} \tag{280}$$

Kada je potrošač kratko spojen, može da se izračuna Tevenenova impedansa

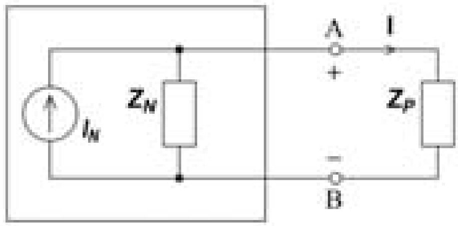
$$\mathbf{Z}_\mathrm{T} = \frac{\mathbf{V}_\mathrm{OC}}{\mathbf{I}_\mathrm{SC}} \tag{281}$$

Tevenenova teorema se može interpretirati na sledeći način: Svako električno kolo sa nezavisnim izvorima, zavisnim izvorima i impedansama može se predstaviti ekvivalentnim električnim kolom koje se sastoji od jednog idealnog naponskog izvora (sa naponom izvora koji je jednak naponu kola sa isključenim potrošačem) i jedne serijske impedanse (koja je jednaka količniku napona kola sa isključenim potrošačem i struje kroz kratak spoj umesto potrošača).



Slika 6.19. Tevenenovo ekvivalentno kolo.

Na sličan način se može primeniti strujni izvor umesto naponskog, i tada se dobija Nortonova teorema. Ilustracija Nortonove teoreme data je na sl. 6.20. Kolo sa izvorima (zavisnim i nezavisnim) i impedansama (bez potrošača) predstavlja se kolom koje se sastoji od ekvivalentnog nezavisnog strujnog izvora kome je paralelno vezana impedansa. Poređenjem kola sa slike 6.20 i slike 6.18, može da se pokaže da su struja kroz potrošač i napon na potrošaču isti.



Slika 6.20. Nortonovo ekvivalentno kolo.

Kada se uporede šema Nortonovog ekvivalentnog kola i slika 6.18. dobija se

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{I}_{SC} \tag{282}$$

Kada je potrošač kratko spojen, može da se izračuna Nortonova impedansa

$$\mathbf{Z}_N = \frac{\mathbf{V}_{OC}}{\mathbf{I}_{SC}} \tag{283}$$

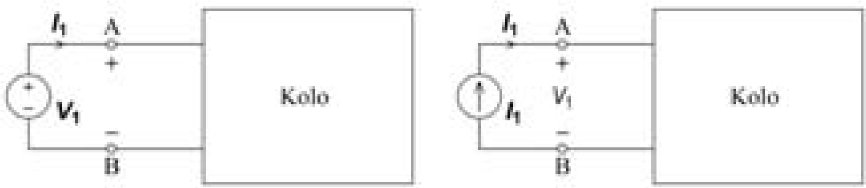
Nortonova teorema može da prikaže na sledeći način: Svako električno kolo sa nezavisnim izvorima, zavisnim izvorima i impedansama može se predstaviti ekvivalentnim kolom koje se sastoji od jednog idealnog nezavisnog strujnog izvora (vrednost struje izvora je jednaka struji kroz kratak spoj na mestu potrošača) i jedne paralelne impedanse (impedansa je jednaka količniku napona kola sa isključenim potrošačem i struje kroz kratkog spoja na mestu potrošača.

6.12 Električna kola sa jednim i dva pristupa

U praksi se najčešće posmatra napon ili struja nezavisnog izvora, koji se nazivaju pobudama, i njihov uticaj na napon na nekom elementu ili na struju kroz neki element, koji se naziva odziv na pobudu. Nekada nije moguće da se na jednostavan način odredi odziv na neku pobudu kao što je to urađeno u slučaju primene Tevenenove i Nortonove transformacije izvora. Zbog toga je uveden pojam električnog kola sa dva pristupa da bi sve što je između izvora i potrošača zamenili ekvivalentnim kolom, ili kolom koje ima neke osobine, i time olakšali određivanje odziva na pobudu. Ova teorija može da se generalizuje na više izvora i više potrošača, ali će u ovoj knjizi biti analizirani samo jednostavniji primeri, kao uzorni primeri koji se koriste za definisanje pojmova i razumevanje materije iz ove oblasti.

6.12.1 Električno kolo sa jednim pristupom

Razmotrimo pobudni nezavisni naponski izvor priključen na kolo sa jednim pristupom preko čvorova A i B kao što je ilustrovano na slici 6.21. Napon na pristupu može da se predstavi kao fazor u kolima sa naizmeničnim strujama. Priključeni izvor se zatvara u neku petlju kroz kolo na slici 6.21., jer samo u tom slučaju može da se zatvori kolo i struja koja ulazi u čvor A može preko čvora B da se vrati u izvor. Ovakvo kolo se naziva kolo sa jednim pristupom. U ovom slučaju je pobuda generisana naponom a odziv je struja, čiji fazor zavisi od toga kako su povezani elementi u kolu.



Slika 6.21. Električno kolo sa jednim pristupom.

Umesto naponskog nezavisnog izvora može da se priključi strujni izvor kao pobuda kola. Kada je priključen pobudni strujni izvor, tada ulazni napon između čvorova A i B predstavlja odziv kola.

Količnik fazora naponskog odziva i fazora strujne pobude naziva se ulazna impedansa kola:

$$\mathbf{Z}_u = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} \tag{284}$$

Ako se koristi naponski pobudni izvor, tada ulazna struja predstavlja odziv kola na naponsku pobudu. Tada količnik fazora odziva i pobude daje ulaznu admitansu kola:

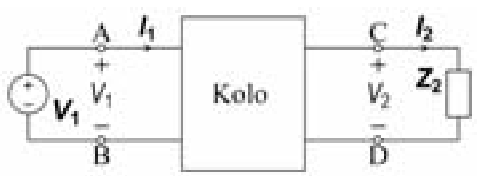
$$\mathbf{Y}_u = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1} \tag{285}$$

Impedansa i admitansa nisu fazori već kompleksni brojevi koji se ne menjaju sa vremenom, odnosno to su kompleksne konstante koje se iskazuju jedinicama om ili simens.

6.12.2 Električno kolo sa dva pristupa

U situacijama kada je električno kolo veoma složeno i nepregledno za ilustraciju međusobnih veza elemenata, tada se posebno na jednu stranu može izdvojiti pobudni izvor a na drugu potrošač na kome se posmatra odziv.

Na slici 6.22 između čvorova A i B priključen je pobudni naponski izvor, a između čvorova C i D je potrošač čija je impedansa **Z**. Na slici 6.23 između čvorova A i B priključen je pobudni strujni, a između čvorova C i D je potrošač koji može da bude predstavljen impedansom **Z** ili admitansom **Y=1/ Z**. Kolo koje ima dva para priključaka naziva se kolo sa dva pristupa. Napon između čvorova A i B i struja koja ulazi u čvor A i izlazi iz čvora B na prvom pristupu su obeleženi indeksom 1, a napon i struja na drugom pristupu gde su čvorovi C i D sa indeksom 2.



Slika 6.22. Kolo sa dva pristupa i naponskom pobudom.

Slika 6.23. Kolo sa dva pristupa i strujnom pobudom.

Kada je pobudni struja koju daje strujni izvor, onda se za kolo na slici 6.23 mogu definisati tri odziva kao količnik odzivne veličine (napon između čvorova Ai B, napon između čvorova C i D, struje kroz potrošač) koji se nazivaju:

ulazna impedansa kola

$$\mathbf{Z}_u = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} \tag{286}$$

prenosna impedansa (transimpedansa) kola

$$\mathbf{Z}_{12} = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_1} \tag{287}$$

strujno pojačanje kola

$$\mathbf{A}_i = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} \tag{288}$$

Kada je pobuda naponski izvor, za kolo sa slici 6.23. mogu se definisati još tri odziva:

ulazna admitansa kola

$$\mathbf{Y}_u = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1} \tag{289}$$

prenosna admitansa (transadmitansa) kola

$$\mathbf{Y}_{12} = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_1} \tag{290}$$

naponsko pojačanje kola

$$\mathbf{A}_u = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} \tag{291}$$

Kolo može da sadrži povezane pasivne elemente kao i kontrolisane izvore.

6.13 Analiza kola sa složenoperiodičnim strujama

U prethodnom delu razmatrana su kola sa prostoperiodičnom vrstom rada, gde se podrazumevalo da svi nezavisni izvori imaju sinusoidalni oblik i istu učestanost. Izvori su mogli da imaju različitu početnu fazu.

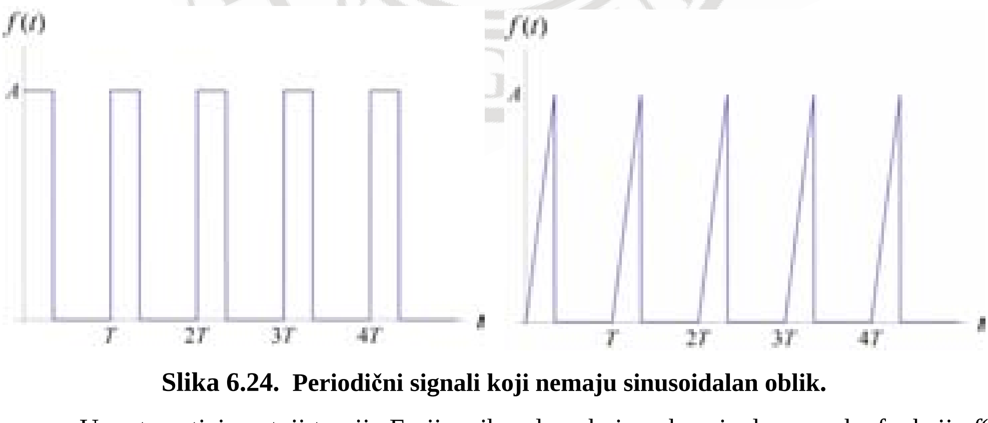
U praksi se često dešava da pobudu u kolu stvaraju nezavisni izvori koji imaju različite učestanosti. Analiza se radi za sve pobude koji imaju istu učestanost, korišćenjem fazorskog računa, a zatim se izražavaju u vremenskom domenu u funkciji vremena. Za izvore koji imaju drugačiju učestanost radi se identična analiza fazorskim predstavljanjem napona i struja i na kraju iskazivanjem u vremenskom domenu. Kada su poznati odzivi svih veličina, sabiranjem odziva na sve pobude dobija se ukupan odziv.

U praksi se često pojavljuju pobude koje nisu sinusoidalne, ili čak nisu ni periodične. Najčešće nije potrebno da se odredi odziv u dužem vremenskom periodu, već je dovoljno da se odredi odziv samo za kraći vremenski period. U svim takvim slučajevima se pretpostavi da pobuda može da se aproksimira kao da je poznata u dužem vremenskom periodu predstavljajući se periodičnim pobudama ili jednosmernim strujama i primenom do sada urađenih analiza. Nakon nalaženja odziva u dužem vremenskom periodu kao da je poznat odziv na sinusoidalnu pobudu, konačan odziv se posmatra samo u vremenskom opsegu koji je bio cilj analize.

Posmatrajmo periodični signal koji može da bude pobuda nekog izvora, a koji nije sinusoidalnog oblika:

$$f(t) = f(t + nT),\ n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots \tag{292}$$

Signal se ponavlja svakih T vremena, zbog čega se T naziva periodom signala. Ilustracije ovakvih signala koje se često sreću u elektronskim sistemima prikazane su na slici 6.24. (povorke pravougaonih ili trougaonih signala).



Slika 6.24. Periodični signali koji nemaju sinusoidalan oblik.

U matematici postoji teorija Furijeovih redova koja pokazuje da se svaka funkcija $f(t)$ koja je periodična sa periodom T može predstaviti kao zbir sinusoidalnih funkcija, koje su linearno nezavisne:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \tag{293}$$

Osnovna učestanost signala je $\omega_0=2\pi/T$, a a_0 predstavlja srednju vrednost funkcije.

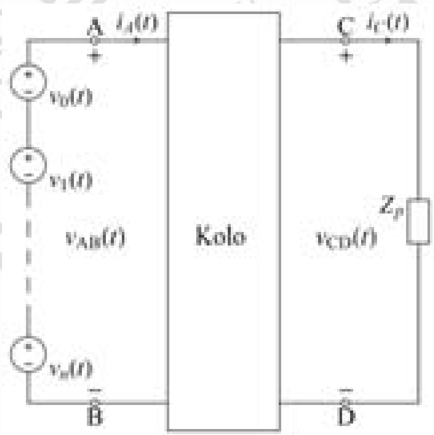
Sinusoidalne komponente pokazuju da je učestanost n puta veća od osnovne učestanosti $f=1/T$, gde je n ceo broj. Amplituda komponenti je označena sa a_n. Komponenta koja ima n puta veću učestanost znači da ima n puta manju periodu sinusoide. Ovakve komponente se nazivaju harmonici. Harmonijske komponente mogu da se predstave kao fazori sa amplitudom i početnom fazom. Nakon što se predstave kao fazori, kompletna analiza može da se uradi kao sa prostoperiodičnim pobudama, a nakon završetka analize mogu da se vrate u vremenski oblik, koristeći amplitudu i početnu fazu za svaki odziv posebno. Pri ovome treba voditi računa da li faza fazora odgovara sinusu ili kosinusu pobude.

Pretpostavimo da se periodična pobuda koja nije sinusoidalnog oblika, a koja može da se predstavi kao zbir jednosmernog izvora i većeg broja sinusoidalnih izvora, dovede na ulaz nekog linearnog električnog kola (ako se radi o naponskim izvorima, oni se vezuju na red, a ako se radi o strujnim izvorima – oni se vezuju paralelno). Razvojem u Furijeov red, pobudni napon se može predstaviti kao zbira napona:

$$v(t) = v_0(t) + v_1(t) + \cdots + v_n(t) \tag{294}$$

Nulta komponenta je konstanta $v_0(t)=v_0$.

Šematski prikaz kola sa ovakvom pobudom prikazana je na slici 6.25.



Slika 6.25. Kolo sa dva pristupa i složenoperiodičnom pobudom.

U kolu koje je prikazano na slici 6.25. svaki od n naponskih sinusoidalnih generatora ima svoju amplitudu i učestanost. Primenom fazorske analize određuje se odziv kola na svaku naponsku pobudnog u frekvencijskom domenu. Na kraju analize, svi sinusoidalni odzivi se iz fazorske predstave interpretiraju u vremenskom domenu. Kako je električno kolo linearno, primenjuje se princip superpozicije. Ukupni odziv kola se dobija zbirom svih odziva na pobudne signale. Ovim postupkom se dobija ukupni odziv kola u ustaljenom složenoperiodičnom režimu, pri čemu je dodat i odziv na konstantnu pobudu $v_0(t)=v_0$.

7 Osnovi fizike poluprovodnika, PN spoj i dioda

Poluprovodnički materijali predstavljaju osnov savremene elektronike, a njihove osobine su važne za razumevanje rada osnovnih poluprovodničkih komponenata kao što su dioda, bipolarni tranzistor i MOS tranzistor. Najvažniji materijali od kojih se prave poluprovodničke komponente su silicijum (Si), germanijum (Ge) i galijum arsenid (GaAs).

7.1 Osnovni pojmovi o provodnosti materijala

Pojmovi koji će biti korišćeni u ovom delu udžbenika su sledeći:

- Omov zakon

$$V = RI \tag{295}$$

- Električno polje i napon su povezani relacijom (V je napon na krajevima provodnika a l dužina provodnika)

$$E = \frac{V}{l} \tag{296}$$

- Gustine struje može da se odredi ako su poznati struja kroz provodnik I i poprečni presek provodnika S:

$$J = \frac{I}{S} \tag{297}$$

Kombinujući ove relacije i Omov zakon, dobija se

$$El = RJS \tag{298}$$

Električno polje može da se izrazi preko gustine struje

$$E = \frac{RJS}{l} = \rho J \tag{299}$$

Otpornost provodnika može da se napiše u sledećem obliku

$$R = \rho \frac{l}{S} \tag{300}$$

U prethodnom izrazu korišćena je konstanta ρ koja se naziva specifična otpornost. Jedinica za specifičnu otpornost je Ωm. Recipročna vrednost specifične otpornosti naziva se specifična provodnost, a jedinica je S/m

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \tag{301}$$

Gustina struje može da se iskaže preko specifične provodnosti i električnog polja:

$$J = \sigma E \tag{302}$$

Dobri provodnici imaju malu specifičnu otpornost kao što je prikazano u Tabeli 2. Provodnost zavisi od različitih uticaja, kao što je temperatura ili kombinacije elemenata od kojih je napravljen materijal.

Tabela 2. Približna vrednost otpornosti na sobnoj temperaturi

Vrsta provodnika	Materijal	Otpornost (Ωm)
Provodnici		
	Srebro	$1,6 \times 10^{-8}$
	Bakar	$1,7 \times 10^{-8}$
	Zlato	$2,3 \times 10^{-8}$
	Aluminijum	$2,7 \times 10^{-8}$
	Amorfni ugljenik	$3,5 \times 10^{-5}$
Poluprovodnici		
	Silicijum (zavisno od nečistoća)	od 1×10^{-5} do 1
Izolatori		
	Guma	1×10^{9}
	Staklo	1×10^{12}
	Teflon	1×10^{19}

Provodnost materijala zavisi od strukturom materijala. Na osnovu modela atoma poznato je da elektroni kruže oko jezgra atoma i imaju energije koje odgovaraju diskretnim energetskom nivoima. Nekim atomima je potrebna značajnija energija da bi se elektroni odvojili od atoma i slobodno se kretali između atoma.

Metali imaju delimično popunjene energetske nivoe neposredno uz potpuno popunjene nivoe. Elektroni koji su na poslednjem energetskom nivou mogu lako da napuste atom. Elektroni koji napuste energetski nivo atoma nazivaju se slobodni elektroni. Slobodni elektroni se slobodno kreću kroz metal. Zbog toga je njihova specifična otpornost mala.

Izolatori imaju veliku zabranjenu zonu između popunjenih i nepopunjenih energetskih nivoa. To zahteva da elektroni dobiju veliku energiju da bi preskočili zabranjenu zonu. Kako praktično nema slobodnih elektrona, njihova specifična otpornost je veoma velika.

Poluprovodnici imaju usku zabranjenu zonu između popunjenih i nepopunjenih energetskih nivoa. Kada elektroni dobiju malu dodatnu energiju oni mogu da preskoče zabranjenu zonu i postanu pokretni kroz poluprovodnik. Pošto energija elektrona zavisi od temperature, ali i od nečistoće koje su prisutne u strukturi poluprovodnika, provodnost poluprovodnika može da se menja u određenim granicama, bilo menjanjem strukture materijala ubacivanjem drugih atoma ili pod uticajem dodatne energije kao što je toplotna ili svetlosna.

7.2 Silicijum kao poluprovodnik

Silicijum je osnovni poluprovodnički materijal koji se najviše koristi u praksi. Kristal čistog silicijuma ima četiri elektrona na poslednjem energetskom nivou, tako da sa četiri elektrona susednih atoma ostvaruje čvrstu i pravilnu strukturu u kojoj atomi zadržavaju svoj položaj pomoću kovalentnih veza. Valentni elektroni se nalaze u najvišem energetskom opsegu. Broj slobodnih elektrona je veoma mali zato što su kovalentne veze dovoljno čvrste. Mali broj slobodnih elektrona je razlog da specifična provodnost čistog kristala silicijuma veoma mala.

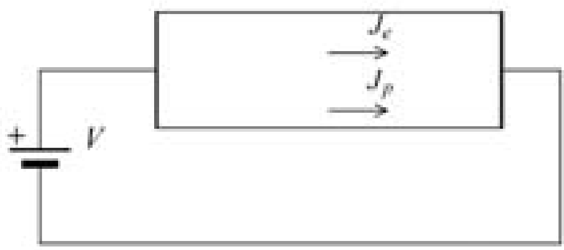
Materijali kod kojih su svi elektroni čvrsto povezani valentnim vezama sa susednim atomima ponašaju se kao izolatori. Kod silicijuma već na sobnoj temperaturi valentne veze su slabe, tako da elektroni mogu da raskinu valentnu vezu i postanu slobodni elektroni. Mesto koje je napustio elektron u valentnoj vezi naziva se šupljina. Kako nedostaje jedno negativno naelektrisanje, manjak elektrona znači da ostatak atoma ima višak pozitivnog naelektrisanja, zbog čega se ponaša kao pozitivno naelektrisan atom. Postojanje privlačnih elektrostatičkih sila pozitivno naelektrisanog atoma može da privuče elektron koji se slobodno kreće kroz materijal ili elektron iz obližnje valentne veze. Zbog postojanja dovoljno energije (na primer toplotne) elektron iz susedne popunjene valentne veze može lako da raskine vezu i popuni raskinutu valentnu vezu kod atoma kome nedostaje elektron. Tako se šupljina popuni elektronom iz susedne valentne veze, i atom ponovo postane električno neutralan, ali zato sada susedna veza ima manjak elektrona koja postaje šupljina. Ekvivalentni efekat je kao da se pozitivno naelektrisanje kreće od atoma do atoma (iako se samo elektroni kreću kroz materijal). Dok se slobodni elektroni mogu kretati u prostoru između atoma, šupljine se kreći tako što se elektron susednog atoma isčupa iz te veze i popuni mesto gde je bila šupljina. Zbog toga je pokretljivost šupljina manja od pokretljivosti elektrona. Pozitivno naelektrisan atom (šupljina) može da privuče i neki slobodni elektron koji se nađe u blizini šupljine, i tako se električki neutrališe atom. Proces spajanja šupljine i slobodnog elektrona naziva se rekombinacija. Provodnost čistog silicijuma rezultat je kretanja negativnih naelektrisanja (elektrona) i kretanja pozitivnih naelektrisanja (šupljina).

Kako svi nenaelektrisani materijali treba da budu električni neutralni, u čistom kristalu silicijuma broj slobodnih elektrona mora biti jednak broju šupljina. Koncentracije slobodnih nosilaca u čistom kristalu naziva se sopstvena koncentracija. Sopstvena koncentracija zavisi od temperature T, energetskog procepa E_G koji predstavlja minimalnu energiju za raskidanje kovalentne veze, (vrednosti za silicijum su: E_G=1,12 eV, B je konstanta koja iznosi $5{,}4\times10^{31}$, k je Bolcmanova konstanta k= $8{,}62\times10^{-5}$ eV/^{o}K):

$$n_i^2 = BT^3 e^{-E_G/kT} \tag{303}$$

Sopstvene koncentracije elektrona i šupljina na sobnoj temperaturi (T=300^{o}K=27^{o}C) su iste i iznose $n_i = p_i = 1{,}5\times10^{16}$ nosilaca/m^3 (veoma su male u odnosu na gustinu atoma u kristalu silicijuma koja približno iznosi 5×10^{28} atoma/m^3). Kod čistog silicijuma na svakih bilion atoma u kristalu postoji jedan par slobodnih nosilaca. Zato se smatra da je čist silicijum više izolator nego provodnik.

Pretpostavimo da se na krajeve silicijumskog kristala preko provodnih ploča priključi jednosmerni naponski izvor V kao što je ilustrovano na slici 7.1.



Slika 7.1. Priključenje naponskog izvora na kristal silicijuma.

Zbog postojanja potencijalne razlike između krajeva kristala silicijuma, a to znači i postojanja polja u materijalu, dolazi do kretanja slobodnih nosilaca kroz poluprovodnik u smeru delovanja polja. Slobodni elektroni koji su napustili valentnu vezu idu ka onom kraju kristala gde je priključen pozitivan potencijal naponskog izvora, ali kako je usvojeno da je smer struje ekvivalentan kretanju pozitivnih naelektrisanja, stvarni smer struja je ka onom kraju kristala gde je priključen negativan pol baterije.

Šupljine se pod dejstvom električnog polja kreću u smeru ka kraju koji je priključen na negativan pol baterije. Pošto se elektroni kreću ka višem potencijalu a šupljine ka nižem potencijalu, to znači da su smerovi struja isti, zbog čega se struje elektrona i šupljina sabiraju. Gustina struje jednaka zbiru gustine struje usled kretanja elektrona i gustine struje usled kretanja šupljina:

$$J = e(\mu_n n_i + \mu_p p_i)E = \sigma E \tag{304}$$

Specifična provodnost na sobnoj temperaturi iznosi približno σ=4,4×10^{-4} S/m (naelektrisanje elektrona je e=1.5×10^{-19} C, pokretljivost elektrona je μ_n=0,135m^2/Vs, pokretljivost šupljina je μ_p=0,048m^2/Vs.

Izlaganjem silicijuma kiseoniku na povišenoj temperaturi na njegovoj površini formira se tanak sloj oksida (SiO_2). Oksid je odličan izolator, tako da kristal silicijuma ima izolaciju na onom delu gde nisu napravljeni kontakti koji ga povezuju sa naponskim izvorom. Jedini kontakt kroz koji elektroni iz naponskog izvora dolaze u silicijum su kontakti kristala silicijuma koji je povezan sa negativnim polom jednosmernog izvora.

7.2.1 Dopiranje silicijuma primesama

Za praktične primene je potrebno da se poveća provodnost silicijuma. To se postiže time što se u kristal silicijuma unesu primese drugih atoma, koje se nazivaju i nečistoće. Proces unošenja drugih atoma naziva se dopiranje silicijuma.

Silicijum ima četiri valentna elektrona na najvišem energetskom nivou, tako da sa četiri elektrona koja pripadaju susednim atomima ima čvrstu vezu. Ako se silicijumu doda mala količina primesa od materijala koji ima pet valentnih elektrona (na primer fosfor ili arsen), četiri elektrona primese biće obuhvaćeno valentnom vezom sa četiri susedna atoma, a jedan elektron će ostati kao slobodan. Zbog toga će se pojaviti višak slobodnih elektrona koji uzrokuju povećavanje provodnosti silicijuma sa primesama. Proces dodavanja petovalentnih atoma primesa naziva se doniranje, zato što donorske primese daju (doniraju) slobodne elektrone. Silicijum koji je dopiran petovalentnim atomima naziva se n-tip silicijuma, jer ima više slobodnih nosilaca negativnog naelektrisanja (elektrona). Tipična koncentracija primesa je mala i iznosi oko 10^{23} atoma/m^3, ali je za 6 do 7 redova veličine veća od sopstvene koncentracije nosilaca. Ako je koncentracija donorskih primesa N_D, broj slobodnih elektrona u n-tipu silicijuma je skoro isključivo određen koncentracijom donorskih primesa koje su $n_{n0}=N_D$. Broj šupljina u n-tipu silicijuma je manji nego kod čistog silicijuma (na istoj temperaturi), zato što se deo šupljina koje bi postojale u čistom silicijumu rekombinuje sa slobodnim elektronima (kojih zbog donorskih primesa ima znatno više nego u čistom silicijumu). Proizvod sopstvenih koncentracija je konstantan na konstantnoj temperaturi

$$n_{n0}\,p_{n0} = n_i^2 = p_i^2 \tag{305}$$

Može da se pokaže da je sopstvena koncentracija šupljina znatno manja:

$$p_{n0} = \frac{n_i^2}{n_{n0}} = \frac{n_i^2}{N_D} \tag{306}$$

Kada se silicijumu doda mala količina primesa od materijala koji ima tri valentna elektrona (na primer bor ili indijum), tada će u valentnoj vezi nedostajati jedan elektron. Stoga se pojavljuje višak šupljina (manjak jedan elektron), koji takođe povećava provodnost silicijuma. Primese koje imaju 3 valentna elektrona nazivaju se akceptorske primese zato što privlače (primaju) slobodne elektrone. Ovako dopirani silicijum ima više slobodnih nosilaca pozitivnog naelektrisanja (šupljina) nego elektrona, zbog čega se naziva p-tip silicijuma.

Dodavanje primesa bilo kog tipa ne stvara višak jednog tipa naelektrisanja u odnosu na drugi tip. Dodavanje primesa stvara slobodne nosioce koji se kreću u poluprovodniku, ali ukupan broj pozitivnih naelektrisanja jednak je ukupnom broju negativnih naelektrisanja.

Dopiranje silicijuma dovodi do promene struktura energetskih opsega. Stvaranje slobodnih elektrona olakšano je time da se unosom donorskih primesa stvaraju dodatni energetski nivo blizu nepopunjenih provodnih nivoa. Stvaranje slobodnih šupljina olakšano je unosom akceptorskih primesa koje stvaraju dodatni energetski nivo blizu popunjenih valentnih nivoa.

Provodnost dopiranog silicijuma prvenstveno određuju većinski nosioci zato što koncentracija elektrona i šupljina zavisi od broja unetih primesa:

$$\sigma = \begin{cases} e\mu_n n = e\mu_n N_D, & \text{za } n \text{ tip silicijuma} \\ e\mu_p p = e\mu_p N_A, & \text{za } p \text{ tip silicijuma} \end{cases} \tag{307}$$

Iako je koncentracija primesa veoma mala u odnosu na ukupni broj atoma, ona je ipak znatno veća od koncentracije slobodnih nosilaca kod čistog poluprovodnika. Zato unete primese stvaraju većinske (glavne) nosioce, a manjinski (sporedni) nosioci su oni koji su suprotnog tipa.

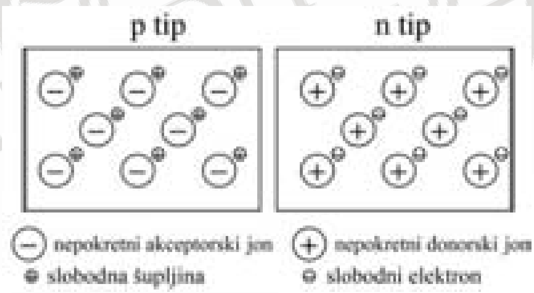
7.3 pn spoj

Ako se na istom komadu silicijuma u jednom delu materijala napravi n-tip poluprovodnika (većinski nosioci su elektroni, a manjinski su šupljine), a u drugom delu se napravi p-tip poluprovodnika (većinski nosioci su šupljine, a manjinski su elektroni), dobija se pn spoj. Iako to nisu fizički spojeni delovi silicijuma, ovako napravljeni poluprovodnici se nazivaju pn spoj. Za poluprovodničke elemente to je najvažniji spoj, a najvažniji element koji se pravi na ovaj način jeste dioda. Ovakav pn spoj se ne može napraviti tako što bi se dva kristala silicijuma dopirali različitim nečistoćama a zatim spojili.

Neke od komponenti koje se prave korišćenjem dva, tri i više pn spojeva su diode, bipolarni tranzistori, tranzistori sa efektom polja (FET) i tiristori.

7.3.1 Nepolarisani pn spoj

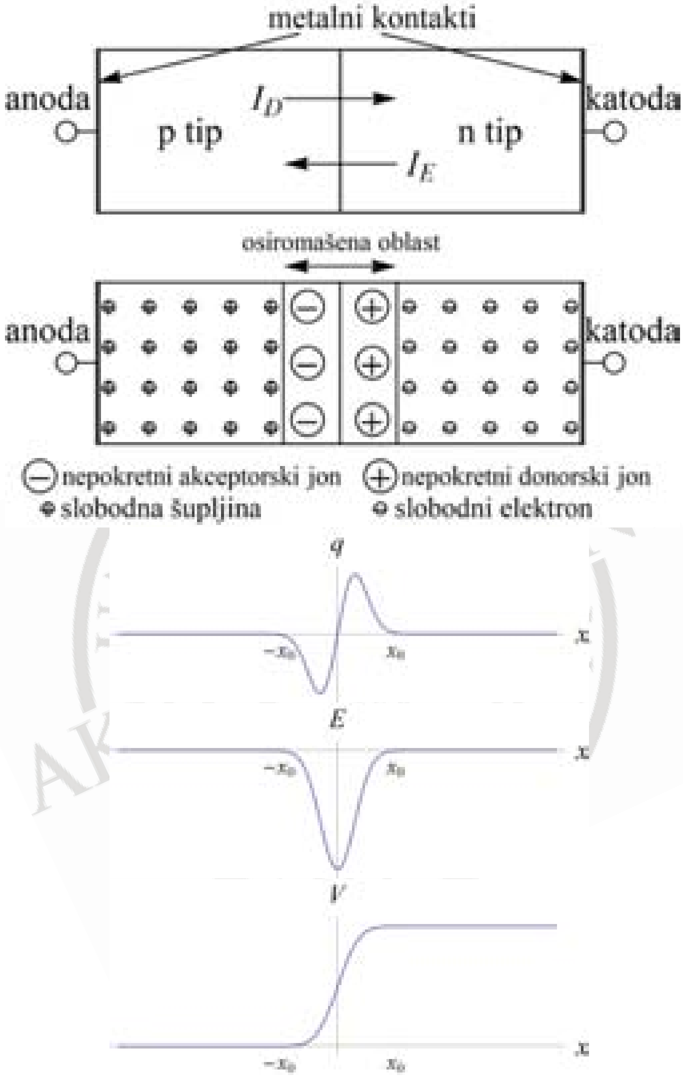
Da bi se bolje razumeo mehanizam rada pn spoja, najpre će biti analiziran slučaj kada se p i n tip poluprovodnika ne dodiruju, kao što je ilustrovano na slici 7.2. U poluprovodniku p tipa, slobodne šupljine su ravnomerno raspoređene po celom prostoru poluprovodnika, zato što bi veća koncentracija šupljina na jednom mestu stvorila polje koje odbija šupljine od tog mesta. U poluprovodniku n tipa, slobodni elektroni su ravnomerno raspoređeni po celom prostoru poluprovodnika, zato što bi veća koncentracija elektrona na jednom mestu stvorila polje koje odbija elektrone. Nikako ne može da dođe do veće koncentracije naelektrisanja ni u jednom delu materijala, jer bi tada oni stvarali električno polje koje bi tada uticalo silom odbijanja na naelektrisanja istog tipa.



Slika 7.2. Naelektrisanja kod dopiranih poluprovodnika.

Ako se u jednom kristalu čistog silicijuma ubace u jednom delu primese trovalentnih atoma a u drugom petovalentnih atoma, postojaće granica između p i n dopiranog poluprovodnika za koji kažemo da je pn spoj. Ovakav pn spoj ne može da se napravi kada se nezavisno prave p i n tip poluprovodnika, a zatim mehanički spoje.

Kada je ovako dopiran deo poluprovodnika jednom vrstom primesa, a drugi deo drugom vrstom primesa, tada u oblasti blizu spoja dolazi do prelaza većinskih slobodnih nosilaca preko spoja u drugi deo poluprovodnika gde su ti nosioci manjinski (na primer šupljine koje iz poluprovodnika p tipa, gde su većinski nosioci, pređu u poluprovodnik n tipa sa većinskim nosiocima elektronima, šupljine su manjinski nosioci). Kako je broj elektrona značajno veći od broja šupljina u n tipu poluprovodnika, postoji velika verovatnoća da se dogodi rekombinacija šupljina koje su iz p oblasti prešle u ne oblast. Pre prelaska u drugu oblast, slobodni nosioci su bili blizu pn spoja. Nakon prelaska glavnih nosioca iz oblasti blizu pn spoja u drugi tip poluprovodnika, u blizini pn spoja ostaju samo nepokretni naelektrisani atomi. Zbog toga što su većinski nosiocu prešli u drugi tip poluprovodnika, ova oblast se naziva osiromašena oblast ili oblast prostornog tovara. U njoj nema slobodnih nosilaca elektriciteta.



Slika 7.3. Raspodela naelektrisanja, električno polje i napon na nepolarisanom pn spoju.

Nepokretna naelektrisanja formiraju električno polje u oblasti prostornog tovara. Ovo električno polje se suprotstavlja daljem kretanju slobodnih nosilaca iz jednog dela poluprovodnika u drugi preko pn spoja. Ako postoji električno polje, to znači da se na spoju pojavljuje mala razlika napona, i ona se naziva potencijalna barijera. Veličina potencijalne barijere zavisi od vrste poluprovodničkog materijala i unetih primesa.

Da bi moglo da se pristupi poluprovodniku, postavljaju se metalne elektrode koje obezbeđuju vezu poluprovodnika sa drugim elementima električnog kola. Naravno, ako preko elektroda nije doveden naponski ili strujni izvor, na pristupima pn spoja nema napona niti kroz njih teče struja čak i kada su pristupi kratko spojeni. Metalna elektroda koja je vezana za p tip poluprovodnika se naziva anoda, a elektroda koja je naneta na n tip poluprovodnika se naziva katoda.

Relacije koje povezuju koncentracije naelektrisanja, napon i polje u funkciji rastojanja od pn spoja x, mogu da se koriste za izvođenje osobina poluprovodnika:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{qN}{\varepsilon} \tag{308}$$

$$E = -\frac{dV}{dx} = \int \frac{qN}{\varepsilon} dx \tag{309}$$

$$V = -\int E dx \tag{310}$$

Potencijalna barijera je od 0,6 V do 0,8 V kod silicijuma, a za germanijuma je 0,2 V. Zbog postojanja kontaktnog potencijala na mestima gde je nanet provodni sloj na poluprovodnik, veličina potencijalne barijere se ne može izmeriti merenjem napona između metalnih kontakata.

Kroz nepolarisani pn spoj protiču četiri različite struje. Dve difuzione struje većinskih nosilaca (elektrona i šupljina) potiču od različitih koncentracija nosilaca sa obe strane pn spoja; na slici su označeni sa I_D. Međutim, iako ih ima znatno manje, postoje i nosioci naelektrisanja koja su suprotnog znaka i koji se slobodno kreću kroz poluprovodnike. Dok električno polje odbija glavne nosioce od potencijalne barijere, ovakvo električno polje podstiče sporedne nosioce, koji su suprotnog polariteta od glavnih, da prođu kroz barijeru. Zbog uticaja električnog polja na sporedne nosioce, postoje dve komponente struje manjinskih nosilaca (struja elektrona i struja šupljina), koje je na slici označena kao struja usled električnog polja pn spoja I_E. Kako se ceo pn spoj spolja ponaša kao električki neutralan, i kada pn spoj nije vezan u električno kolo, ukupna struja kroz pn spoj mora biti jednaka nuli; to znači da su difuzione struje uravnotežene strujama usled električnog polja, $I_D = I_E$. Takvo ravnotežno stanje se naziva ekvilibrijum.

Kada pn spoj nije povezan sa nekim izvorom, pn spoj se može posmatrati kao kondenzator. Nepokretni joni predstavljaju opterećenje kondenzatorskih ploča, a osiromašena oblast predstavlja dielektrik zato što u njemu nema slobodnih nosioca naelektrisanja.

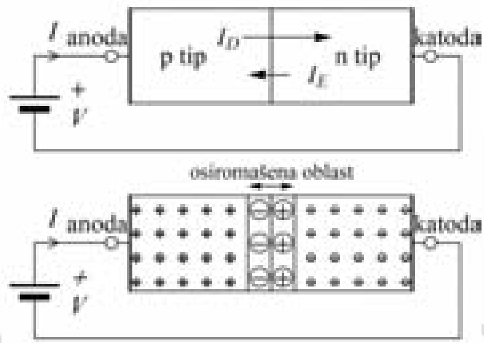
Opisani mehanizam kretanja naelektrisanja iz jednog tipa poluprovodnika u drugi ne funkcioniše ako su nezavisno napravljeni p i n spoj i zatim mehanički spojeni, zato što ne postoji jedinstvena struktura kroz koju se naelektrisanja kreću, zbog čega bi mehanički spoj bio isto kao da između dva dela postoji neprobojni zid.

7.4 Dioda

7.4.1 Direktno polarisani pn spoj

Posmatrajmo šta se događa kada se na krajeve pn spoja poveže jednosmerni naponski izvor sa pozitivnim polom vezanim na p oblast, a negativnim polom na n oblast, kao što je ilustrovano na slici 7.4. Tada dolazi do smanjenja potencijalne barijere na pn spoju, dolazi do suženja oblasti prostornog tovara, a sve to olakšanog kretanja većinskih nosilaca preko spoja.

Većinski nosioci difuzijom iz n oblasti (elektroni) prelaze u p oblast, a većinski nosioci iz p oblasti (šupljine) prelaze u n oblast. Nakon prelaska u drugi deo poluprovodnika gde sada imaju naelektrisanje istog znaka kao manjinski nosioci, dolazi do njihove rekombinacije sa većinskim nosiocima. Električno kolo je povezano preko naponskog izvora zbog čega postoji difuziona struja kroz pn spoj. Manjinski nosioci takođe prelaze preko spoja usled električnog polja, ali je potencijalna barijera sada uža zbog direktne polarizacije, što je i razlog da je struja manja nego kada nije bilo polarizacije spoja. Struja usled polja spoja je ionako bila mala zato što je broj manjinskih nosioca znatno manje u odnosu na većinske nosioce. Struja manjinskih nosioca je zanemarljivo mala u odnosu na struju većinskih nosioca.



Slika 7.4. Struje i raspodela naelektrisanja na direktno polarisanom pn spoju.

Ovakav elemenat koji se sastoji od pn spoja povezanog preko dve elektrode, naziva se dioda.

Nakon direktne polarizacije naponom V, struja kroz direktno polarisanu diodu se sastoji od dve struje: jedna struja je od kretanja većinskih nosilaca, koja je sada znatno veća od druge struje koju stvaraju manjinski nosioci. Intenzitet struje zavisi od geometrijskih dimenzija pn spoja (iskazane preko konstante K), priključenom naponu preko elektroda V, napona potencijalne barijere čija vrednost zavisi od vrste poluprovodnika, V_0, apsolutne temperature T u ^{o}K, a koristi se i Bolcmanova konstanta k:

$$I = I_D - I_E = Ke^{-e(V_0 - V)/kT} - Ke^{-eV_0/kT} = I_S(e^{eV/kT} - 1) = I_S(e^{V/V_T} - 1) \qquad (311)$$

Svi uticaju mogu da se predstave preko napona V_T. Kada je priključeni napon V znatno veći od V_T, tada se može koristiti približni obrazac:

$$I \approx I_S e^{V/V_T} \qquad (312)$$

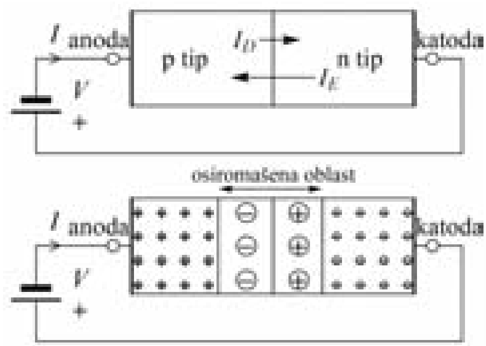
U prethodnom izrazu, struja I_S se naziva struja zasićenja pn spoja. Ona je proporcionalna površini pn spoja. Vrednost ove struje zavisi i od vrste poluprovodnika, i na sobnoj temperaturi je oko 10^{-15} A za silicijum, dok je oko 10^{-6} A za germanijuma. Sa V_T je označen temperaturni napon koji je na sobnoj temperaturi približno 25 mV.

7.4.2 Inverzno polarisani pn spoj

Ako se između anode i katode diode dovede jednosmerni naponski izvor, tako da je anoda na nižem potencijalu od katode, kao što je pokazano na slici 7.5., tada se povećava potencijalna barijera na spoju, proširuje se oblast prostornog tovara, što dovodi do otežanog kretanja većinskih nosilaca, a to je razlog da je i difuzna struja još manja. Struja manjinskih nosilaca ostaje približno ista i ona postaje dominantna struja kroz spoj:

$$I = I_D - I_E \approx -I_S \tag{313}$$

Iz prethodnog izraza sledi da je struja inverzno polarisanog pn spoja jednaka struji zasićenja I_S. Međutim, merenja pokazuju da je struja inverzno polarisanog pn spoja značajno većeg intenziteta od struje zasićenja. Ova razlika se tumači postojanjem površinskih efekata koji stvaraju struju curenja.



Slika 7.5. Struje i raspodela naelektrisanja na inverzno polarisanom pn spoju.

Kada je napon naponskog izvora jednak nuli, što je ekvivalentno kao da su anoda i katoda kratko spojene, struja kroz diodu je takođe jednaka nuli. Bez obzira da li je dioda direktno ili inverzno polarisana, struja je uvek u smeru koji podržava naponski izvor. Negativna vrednost struje inverzno polarisane diode posledica je usvojenih smerova, tako da je usvojen smer suprotan onom koji podržava naponski generator.

7.4.3 Proboj pn spoja i Zener dioda

Ako se na diodu dovede veliki inverzni napon, električno polje u oblasti prostornog tovara je toliko jako da dovodi do naglog porasta struje inverzno polarisanog spoja. Nagli porast struje pri inverznoj polarizacije se naziva proboj pn spoja. Napon pri kome se dešava ova pojava naziva se probojni napon.

Postoje dva razloga zbog kojih dolazi do proboja. Ako je probojni napon manji od 5 V, to je Zenerov proboj. Ako je probojni napon veći od 7 V, do proboja dolazi usled lavinskog efekta. Ako je probojni napon između 5 V i 7 V, do proboja dolazi usled obe pojave. Veličina probojnog napona najviše zavisi od koncentracije primesa u poluprovodniku.

Zenerov proboj ima značajne praktične primene. Napon na Zener diodi u oblasti proboja praktično je konstantan zbog vrlo nagle promene struje. Zener diode su našle veliku primenu u kolima za stabilizaciju jednosmernog napona, a često se koristi i kao naponski referentni izvor.

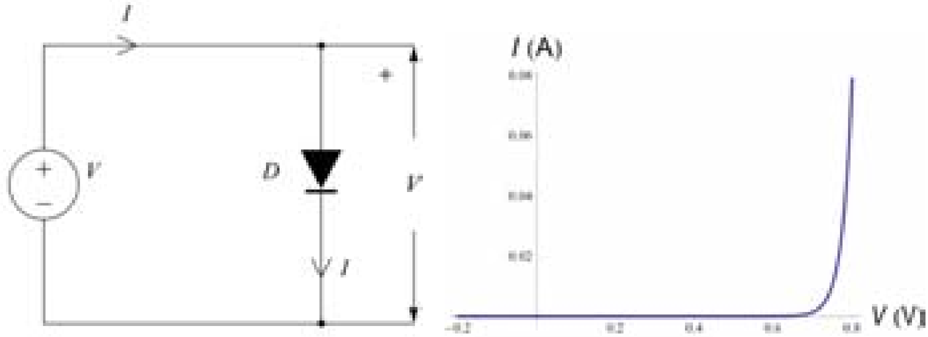
7.4.4 Modeli diode

7.4.4.1 Karakteristika diode

Dioda se u praktičnim primerima može predstaviti modelom u kome se struja diode može odrediti samo jednom relacijom, bez obzira da li je nastala pri direktnoj ili inverznoj polarizaciji

$$I = I_S (e^{V/V_T} - 1) \tag{314}$$

Relacija kod koje se struja kroz element iskazuje u funkciji napona koji je priključen na pristupe elementu naziva se strujno-naponska karakteristika. Tipična strujno-naponska karakteristika diode grafički je prikazana na slici 7.6.



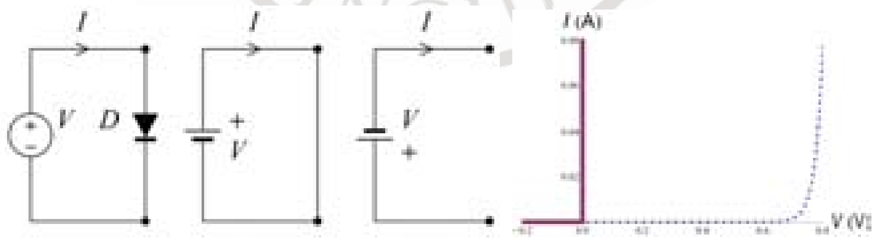
Slika 7.6. Grafički prikaz strujno-naponske karakteristike diode.

Relacija koja povezuje struju kroz diodu i napon na diodi je nelinearna. U praksi se često zahteva da se koristi što jednostavniji model diode, na primer da se linearizuje karakteristika. Razvijeno je nekoliko uprošćenih modela diode koji su pogodni za izračunavanja bez upotrebe računara a daju dovoljno tačne rezultate.

Na primer, sa slike 7.6. vidi se da je struja približno nula sve do napona 0,75 V, a da struja ima velike vrednosti za napone veće od 0,75 V.

7.4.4.2 Idealna dioda

Idealna dioda je najjednostavniji model diode. Kada je dioda direktno polarisana, modeluje se kao kratak spoj pristupa diode, tako da je napon na diodi jednak nuli. Inverzno polarisana dioda modeluje se otvorenim kolom, što znači da je i struja kroz diodu jednaka nuli. Dioda se praktično ponaša kao prekidač u zavisnosti od polariteta napona na njoj. Direktno polarisana idealna dioda se ponaša kao zatvoren prekidač. Inverzno polarisana idealna dioda ponaša se kao otvoren prekidač. Ilustracija modela idealne diode data je na slici 7.7.



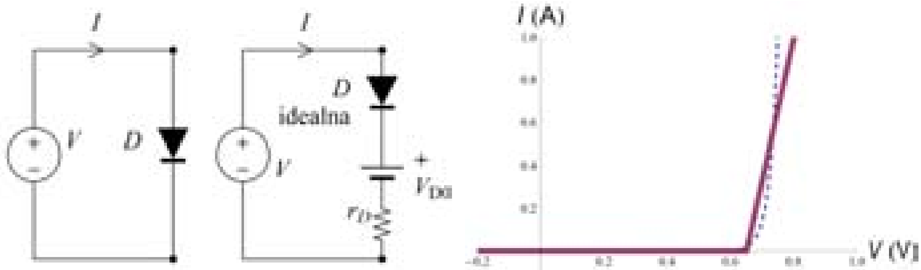
Slika 7.7. Karakteristika idealne diode i njena ekvivalentna interpretacija.

Idealizovana predstava diode često se koristi kao osnova drugih modela diode.

Struja je beskonačno velika ako je idealna dioda povezana na idealni naponski izvor. U praksi, svi naponski izvori imaju konačnu rednu otpornost, zbog čega je struja ograničena i izračunava se Omovim zakonom.

7.4.4.3 Izlomljeno linearni model diode

Izlomljeno linearni model diode predstavlja nelinearnu karakteristiku diode sa dva linearna segmenta. Izlomljeno linearni model diode prikazan je na slici 7.8.

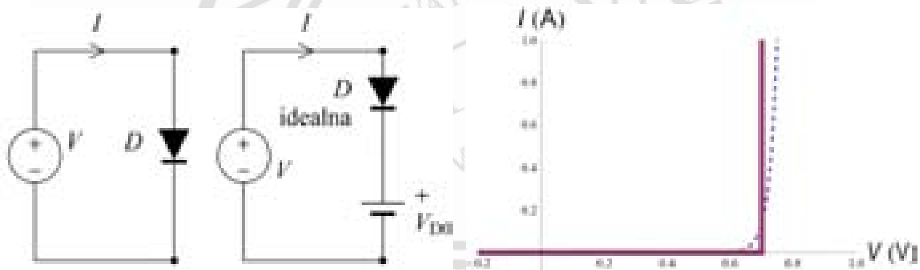


Slika 7.8. Izlomljeno linearna aproksimacija karakteristike diode i ekvivalentni model.

Za izlomljeno linearni električni model diode koristi se idealna dioda i realni naponski jednosmerni izvor. Model i karakteristika diode su prikazani na slici 7.8. Parametri modela su V_{D0}=0,65 V, I_s=10^{-13} i r_D=0,15 Ω. Uloga idealne diode jeste da se obezbedi da struja teče samo pri direktnoj polarizaciji diode kada je V>V_{D0}.

7.4.4.4 Model diode sa konstantnim padom napona

Model diode sa konstantnim padom napona isti je kao izlomljeno linearni model, tako s tim da se koristi idealni naponski izvor umesto realnog izvora (otpornost diode jednaka je nuli). Model diode je prikazan na slici 7.9. Usvaja se da je napon pri kome struja kroz diodu može da ima velike vrednosti približno V_{D0}=0,7 V.



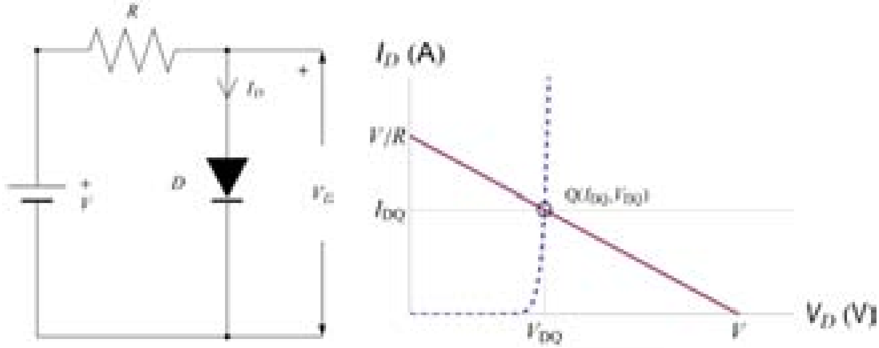
Slika 7.9. Aproksimacija diode sa konstantnim naponom i ekvivalentni model.

Na prethodnoj slici su korišćeni sledeći parametri modela: V_{D0}=0,7 V i I_s=10^{-13}. Idealna dioda treba da obezbedi da struja teče samo pri direktnoj polarizaciji diode za V>V_{D0}.

7.4.4.5 Radna tačka diode

Neka je dioda vezana u složeno kolo. Ostatak kola možemo aproksimirati Tevenenovim kolom, što je ekvivalentno rednoj vezi idealnog naponskog izvora i jednog otpornika.

Kolo sa diodom i ekvivalentnim naponskim realnim izvorom prikazano je na slici 7.10.



Slika 7.10. Određivanje radne tačke diode u kolu sa jednosmernim izvorima.

Treba odrediti struju i napon na diodi, koja je redno vezana sa naponskim izvorom napona V i otpornika poznate otpornosti R. Dioda je direktno polarisana i pretpostavimo da kroz nju teče struja znatno veća od I_S:

$$I_D = I_S e^{V_D/V_T} \tag{315}$$

Po drugom Kirhofovom zakonu može da se postavi jednačina za napone petlje:

$$V - RI_D - V_D = 0 \tag{316}$$

Rešavanjem prethodne jednačine po struji koja teče kroz diodu, dobija se jednačina prave u sistemu:

$$I_D = \frac{1}{R}V - \frac{1}{R}V_D \tag{317}$$

Ova linearna jednačina se naziva radna prava.

Sada postoje dve jednačine, od kojih je jedna linearna a druga sadrži eksponencijalni član. Stvarna vrednost struje se može naći grafički u preseku ove dve jednačine, i ta vrednost se naziva mirna radna tačka (pošto izvor daje konstantan napon, onda postoji samo jedno rešenje koje je u preseku krive linije i prave). Kada se menja napon izvora, tada se menja i radna tačka, jer je presek prave linije i karakteristike diode na drugom mestu. Takođe, ako se karakteristike diode menjaju pod uticajem neke pojave, na primer zbog promene temperature okoline u kojoj se nalazi dioda, tada je presek na drugom mestu na radnoj pravoj.

Postoje brojni algoritmi da se nađe rešenje preseka dve funkcije. Na sreću, postoje brojni besplatni programi koji se mogu koristiti za nalaženje radne tačke, na primer SPICE. Proizvođači komponenti najčešće nude besplatne verzije ovih programa sa već predefinisanim vrednostima za parametre dioda, kao što je na primer program LTSPICE. Programi koji se koriste u nastavi na tehničkim fakultetima, kao što su Matlab i Mathematica, imaju standardnu funkciju za nalaženje jedne realne nule funkcije, tako da nije potrebno praviti posebne programe za rešavanje ovakvim matematičkih problema. Za crtanje slike 7.10. i određivanje radne tačke, korišćena je standardna funkcija FindRoot programa Mathematica tako što je od dve relacije za struju diode generisana jedna:

$$\frac{1}{R}V - \frac{1}{R}V_D - I_S e^{V_D/V_T} = 0 \tag{318}$$

Dobija se jedno rešenje za napon na diodi, koji se zatim zameni u jednačinu za struju diode, i time odredi radna tačka diode.

7.4.4.6 Primene i vrste dioda

Osobine diode znatno zavise od različitih uticaja kao što su:

- Materijal od koga je napravljena dioda.
- Geometrijske karakteristike pn spoja.
- Temperature ambijenta u kojem dioda radi.

Diode su važan i često korišćeni element u elektrotehnici. Obzirom da diode imaju široku primenu, diode se proizvode sa karakteristikama koje najviše odgovaraju njihovoj nameni. Proizvođači poluprovodničkih komponenata nude diode za sledeće primene:

- Usmerači malih snaga (dobijanje jednosmernog napona od naizmeničnog, sprečavanje proticanja struje u suprotnom smeru).
- Usmerači velikih snaga.
- Prekidački režim rada.
- Rad na visokim učestanostima.
- Varikap i varaktor diode (naponski kontrolisana kapacitivnost).
- Fotodiode.
- LED (svetleće) diode.

Kompanije koje proizvode diode najčešće objavljuju kataloge sa detaljnim karakteristikama, često se ovi katalozi mogu preuzeti besplatno preko Interneta.

8 Bipolarni tranzistori

Bipolarni tranzistori su našli veliku primenu kao pojačavački elementi i kao prekidački elementi. Kao i svaki aktivni element, tranzistori stvaraju nelinearna izobličenja u električnim kolima.

Za razumevanje ispravnog rada neophodno je poznavanje radne prave i podešavanje radne tačke. U osnovi da bi se iskoristila svojstva tranzistora, najpre treba podesiti radne uslove tako da tranzistor radi ispravno za ceo raspoloživ opseg ulaznog signala; tek posle toga se analizira rad kada deluju mali signali. Ekvivalentna kola tranzistora kao pojačavačkog elementa podrazumevaju da se tranzistor ponaša kao linearni element i da ne stvara nelinearna izobličenja.

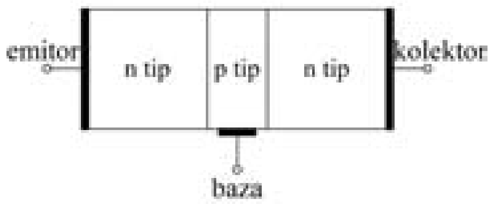
Za razumevanje brojnih kola koja koriste tranzistore potrebno je da se zna i koja konfiguracija rada bipolarnog tranzistora najviše odgovara praktičnim primenama.

8.1 Struktura i simboli bipolarnog tranzistora

Bipolarni tranzistor je jedinstvena poluprovodnička struktura koja se sastoji od tri različito dopirane poluprovodničke strukture i ima tri pristupne elektrode. Bipolarni tranzistor imaju dva pn spoja. Između dve poluprovodničke strukture jednog tipa (na primer n tipa) nalazi se poluprovodnička struktura suprotnog tipa (na primer p tipa). Nabrajanjem vrste poluprovodnika dobija se naziv vrste bipolarnog tranzistora: npn ili pnp.

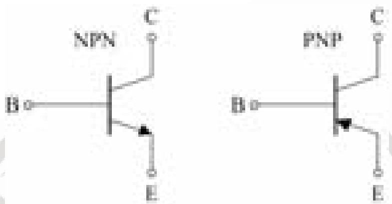
Poluprovodničke strukture su različito dopirane. Najviše dopirana oblast predstavlja emitor, središnja oblast koja je manje dopirana naziva se baza, a najmanje dopirana oblast je kolektora. Da bi tranzistor ispravno funkcionisao za ono čemu je namenjen, baza mora biti vrlo uska, znatno uža od preostale dve strukture. Za potrebe priključivanja tranzistora u električno kolo, sve tri poluprovodničke strukture imaju metalne kontakte. U ovoj knjizi, opis funkcionisanja bipolarnog tranzistora biće prikazan preko npn tranzistora zato što se oni više koriste u praksi. Princip rada pnp tranzistora je isti, a razlika je jedino u vrsti glavnih nosioca elektriciteta. Slika 8.1. ilustruje strukturu bipolarnog npn tranzistora.

Režim rada tranzistora zavisi od polarizacije pn spojeva, odnosno od toga da li su ova dva pn spoja direktno ili inverzno polarisana. Radi lakšeg opisa jedan spoj se naziva emitorski spoj (pn spoj emitor-baza), a drugi je kolektorski spoj (pn spoj kolektor-baza). Tabela 3 prikazuje karakteristične vrste rada tranzistora.



Slika 8.1. Uprošćeni prikaz strukture bipolarnog npn tranzistora.

Simboli koji se najčešće koriste za npn i pnp tranzistore dati su na slici 8.2.



Slika 8.2. Simboli npn i pnp tranzistora.

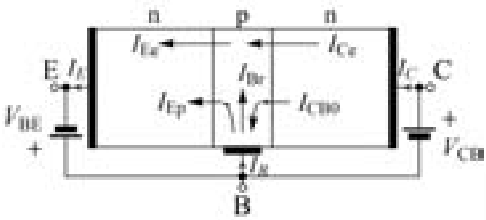
Tabela 3. Režimi rada tranzistora

Namena	**Vrsta rada**	**Emitor-Baza**	**Kolektor-Baza**	**Karakteristika**
pojačavač	aktivni režim	direktna polarizacija	inverzna polarizacija	$|V_{CE}|>0$, $|I_C|>0$
zatvoren prekidač	zasićenje	direktna polarizacija	direktna polarizacija	$V_{CE}\approx 0$, kratak spoj CE
otvoren prekidač	zakočenje	direktna polarizacija	inverzna polarizacija	$I_C\approx 0$, otvoreno kolo
dve diode	zakočenje	inverzna polarizacija	inverzna polarizacija	$|I_C|\approx|I_S|$, $|I_{Cv}\approx|I_S|$

Aktivni režim se koristi za pojačavanja signala (napona ili struje). Režimi zasićenja i zakočenja se koriste u elektronskim prekidačima. Kada su oba spoja inverzno polarisana, analiza se svodi na rad dve inverzno polarisane diode.

8.2 Rad bipolarnog tranzistora u aktivnom režimu

Direktnom polarizacijom emitorskog spoja i inverznom polarizacijom kolektorskog spoja, dobija se aktivni režimu rada tranzistora. Polarizacija se ostvaruje priključivanjem jednosmernih naponskih izvora (baterija), kao što je prikazano na slici 8.3.



Slika 8.3. Struje u aktivnom režimu rada npn tranzistora.

Za bolje razumevanje rada tranzistora u aktivnom režimu potrebno je znati koje sve struje postoje na emitorskom spoju (emitorski spoj je direktno polarisan). Jednu vrstu struja čine difuzione struje većinskih nosilaca koje postoje sa obe strane spoja:

1. Struja koju stvara kretanje elektrona od emitora ka bazi I_{Ee}, a čiji je smer od baze ka emitoru zato što je struja negativnih naelektrisanja suprotnog smera od njihovog kretanja.
2. Struja koju stvara kretanje šupljina od baze ka emitoru I_{Ep}, i koja ima isti smer kao i kretanje pozitivnih naelektrisanja (šupljina).

Kako je smer obe struje od baze ka emitoru, struja emitora je jednaka zbiru ove dve struje:

$$I_E = I_{Ee} + I_{Ep} \approx I_{Ee}, \text{ jer je } \quad I_{Ep} << I_{Ee} \qquad (319)$$

Baza je slabije dopirana od emitora, zbog čega je koncentracija šupljina u bazi manja od koncentracije elektrona u emitoru, što je razlog da je i emitorska struja biti približno jednaka struji elektrona.

Elektroni koji su difuzijom iz emitora prešli u bazu, sada u bazi predstavljaju manjinske nosioce. Pre uspostavljanja direktne polarizacije na emitorskom spoju i pre nego što su počeli elektroni da prelaze bazu, ravnotežna koncentracija elektrona u bazi je bila veoma mala jer su u bazi bili kao manjinski nosioci. Nakon prelaska elektrona iz emitora u bazu, u bazi je znatno povećana koncentracija elektrona, a posebno u blizini emitorskog spoja. Istovremeno sa pozitivnom polarizacijom emitorskog spoja, kolektorski spoj je inverzno polarisan, što je razlog da električno polje na kolektorskom spoju podstiče kretanje manjinskih nosilaca iz baze u kolektor preko kolektorskog spoja. Zbog postojanja električnog polja koncentracija manjinskih nosilaca oko kolektorskog spoja je veoma mala (manjinski nosioci su elektroni u bazi i šupljine u kolektoru). Koncentracija elektrona u bazi nije ravnomerna, već opada sa velike vrednosti oko emitorskog spoja na malu vrednost oko kolektorskog spoja. Može se usvojiti pretpostavka da koncentracija elektrona u bazi linearno opada od emitorskog ka kolektorskom spoju (zato što je baza veoma uska). Koncentracija elektrona nije uniformna u bazi, što je uzrok da se elektroni kreću difuzijom od mesta gde ih ima više (emitorski spoj) ka mestu gde ih ima manje (kolektorski spoj). Deo elektrona se rekombinuje u bazi, u kojoj postoje šupljine kao glavni nosioci, i ovi elektroni ne mogu da stignu od emitora do kolektora.

Kako je baza slabije dopirana i ima malu širinu, broj rekombinovanih elektrona koji u stvari idu od emitora ka bazi je veoma mali.

Na osnovu ove analize se može zaključiti da najveći broj elektrona koji čini emitorsku struju prelazi u najvećem procentu u kolektor, a samo manji deo ovih elektrona se rekombinuje u bazi i deo je bazne struje.

Na kolektorskom spoju, koji je inverzno polarisan, postoje dve struje manjinskih nosilaca usled električnog polja:

1. Struja koju stvaraju elektroni koji se kreću od baze ka kolektoru I_{Ce}.
2. Struja koju stvaraju šupljine koje se kreću od kolektora ka bazi I_{CB0}.

Kretanje naelektrisanja je u suprotnim smerovima, ali struja elektrona je u suprotnom smeru od kretanja elektrona, zbog čega je kolektorska struja jednaka zbiru manjinskih struja:

$$I_C = I_{Ce} + I_{CB0} \approx I_{Ce}, \text{ jer je } \quad I_{CB0} << I_{Ce} \tag{320}$$

Zbog direktno polarisanog emitorskog spoja, koncentracija elektrona u bazi je znatno veće od koncentracije šupljina koje dolaze iz slabo dopiranog kolektora, tako da se može zanemariti doprinos šupljina ukupnoj struji, odnosno, struja kolektora je približno jednaka struji koju stvaraju elektroni.

Struju baze čine tri struje:

1. Struja iz baze koju stvaraju šupljine (kao većinski nosioci u bazi) kretanjem od baze ka emitoru I_{Ep}.
2. Struja koju stvaraju šupljine (kao manjinski nosioci u kolektoru) kretanjem iz kolektora ka bazi I_{CB0}.
3. Struja koju stvaraju šupljine (kao većinski nosioci u bazi) usled rekombinacije elektrona koji dolaze iz emitorskog dela u bazi I_{Br}.

Struja rekombinacije i struja šupljina suprotnog su smera od struje šupljina koje dolaze iz kolektora, tako da je:

$$I_B = I_{Br} + I_{Ep} - I_{CB0} \tag{321}$$

Količnik struje elektrona koji prelaze iz emitora u kolektor i struje emitora naziva koeficijent strujnog pojačanja od emitora do kolektora, a obeležava se sa α:

$$\alpha = \frac{I_{Ce}}{I_E} = \frac{I_C - I_{CB0}}{I_E} \approx \frac{I_C}{I_E} \tag{322}$$

Prema prvom Kirhofovom zakonu zbir svih struja koje ulaze u čvor, a u ovoj situaciji smatramo kao da se ceo tranzistor nalazi u čvoru, dobija se

$$I_E = I_B + I_C \tag{323}$$

Sređujući ovaj izraz dobija se:

$$I_C = \frac{\alpha}{1-\alpha} I_B + \frac{1}{1-\alpha} I_{CB0} = \beta I_B + (\beta + 1) I_{CB0} \approx \beta I_B \tag{324}$$

Faktor β se naziva koeficijent strujnog pojačanja od baze do kolektora.

Vrednosti faktora su u granicama za α od 0.95 do 0.999, a za β su od 20 do 1000.

$$\beta \approx \frac{\alpha}{1-\alpha}, \quad \alpha \approx \frac{\beta}{1+\beta} \tag{325}$$

Tipična vrednost za faktor α je 0.995, što odgovara faktoru β od 200 (za α=0.99, β=100).

Koeficijent β pokazuje koja je osnovna karakteristika tranzistora: ako je potrebno da se pojača struja baze, tada se pojačanje dobija kao kolektorska ili emitorska struja. Tranzistor je aktivni element, ali nije izvor. Pojačanje struje se dobija na račun energije koju daju naponski izvori za polarizaciju tranzistora (direktna polarizacija na emitorskom spoju i inverzna polarizacija na kolektorskom spoju).

8.2.1 Model npn tranzistora za velike signale

Približne relacije koje su dobijene prethodnom analizom omogućavaju da se tranzistori modeluju jednostavnim linearnim kolima koja se sastoje od standardnih elemenata i zavisnih izvora, kao što je ilustrovano na slici 8.4.

Kada je spoj baza-emitor pozitivno polarisan struja baze je eksponencijalna funkcija od napona između baze i emitora:

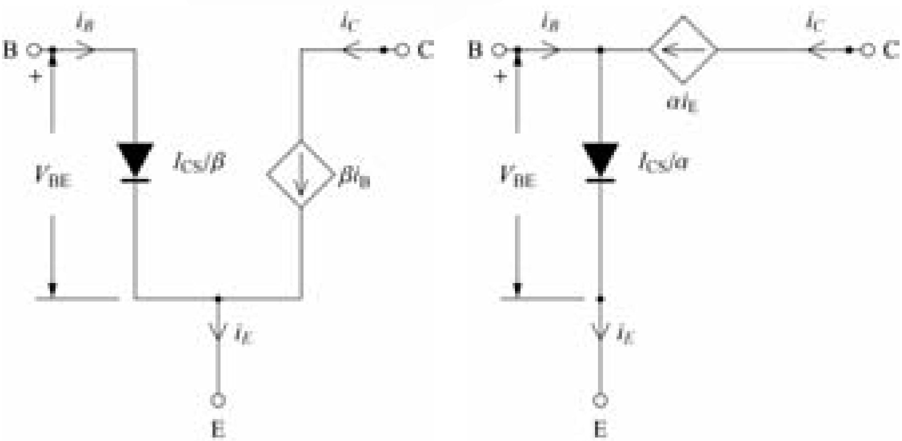
$$I_B = I_{BS} e^{V_{BE}/V_T} \tag{326}$$

Kada je spoj kolektor-baza inverzno polarisan, kolektorska struja ima istu zavisnost ako se usvoji pojednostavljen model preko faktora β:

$$I_C = \beta I_B = \beta I_{BS} e^{V_{BE}/V_T} = I_{CS} e^{V_{BE}/V_T} \tag{327}$$

Kada se napon između baze i emitora posmatra kao ulazni napon, tada je struja kolektora eksponencijalna funkcija od ulaznog napona.

Najjednostavniji modeli npn bipolarnog tranzistora u aktivnom režimu, za velike signale, može da se dobije korišćenjem kontrolisanih strujnih izvora, kao što je ilustrovano na slici 8.4:



Slika 8.4. Modeli npn tranzistora za velike signale u aktivnom režimu rada.

8.2.2 Model tranzistora za male signale

U praksi se polarizacijom tranzistora podešava jednosmerni radni režim a stvarno pojačanje se računa za naizmenični signal. Zato se uobičajeno pretpostavlja da se napon između baze i emitora sastoji od fiksnog jednosmernog dela i malog promenljivog dela. Uobičajena konvencija je prikazana sledećim relacijama:

$$v_{BE} = V_{BE} + v_{be}\ ,\ \text{gde je}\ v_{be} << V_T \tag{328}$$

Amplituda promenljivog dela napona u odnosu na jednosmerni je značajno manja, zbog čega se za struju baze može pisati:

$$\begin{aligned} i_B &= I_{BS} e^{v_{BE}/V_T} = I_{BS} e^{(V_{BE}+v_{be})/V_T} = I_{BS} e^{V_{BE}/V_T} e^{v_{be}/V_T} \\ &= I_B e^{v_{be}/V_T} \approx I_B (1 + \frac{v_{be}}{V_T}) = I_B + \frac{I_B}{V_T} v_{be} = I_B + \frac{1}{r_\pi} v_{be} = I_B + i_b \end{aligned} \tag{329}$$

Struja baze se sastoji od jednosmerne i promenljive komponente. Jednosmerna komponenta ulaznog napona određuje jednosmernu komponentu struje baze. Uobičajeno se koristi metoda radne prave, a za jednosmerne vrednosti napona i struje kaže se da je to mirna radna tačka. Mali promenljivi ulazni napon dovodi do male promene struje baze oko radne tačke. Zato i parametar $r_\pi = V_T / I_B$ zavisi od radne tačke tranzistora.

Na isti način, za struju kolektora može da se pokaže da ima jednosmernu komponentu i promenljivu komponentu:

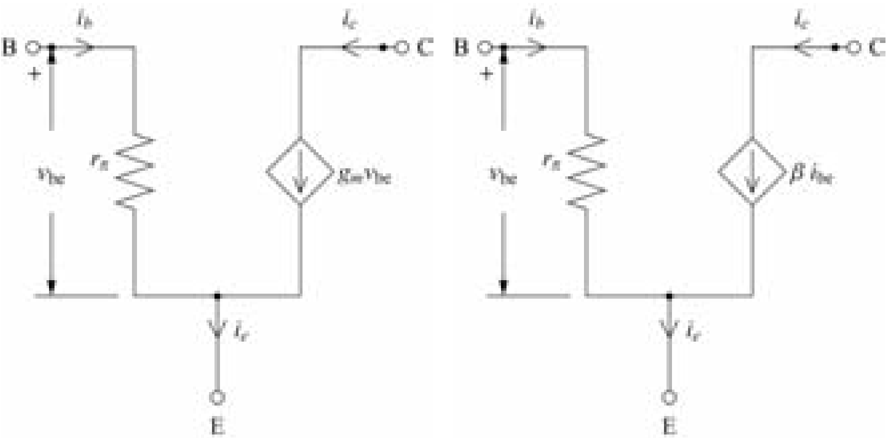
$$\begin{aligned} i_C &= \beta i_B = I_{CS} e^{v_{BE}/V_T} = I_{CS} e^{(V_{BE}+v_{be})/V_T} = I_{CS} e^{V_{BE}/V_T} e^{v_{be}/V_T} \\ &= I_C e^{v_{be}/V_T} \approx I_C (1 + \frac{v_{be}}{V_T}) = I_C + \frac{I_C}{V_T} v_{be} = I_C + g_m v_{be} = I_C + i_c \end{aligned} \tag{330}$$

Jednosmerna komponenta ulaznog napona određuje jednosmernu komponentu kolektorske struje. Male promene ulaznog napona uzrokuju promenu kolektorske struje oko radne tačke. Parametar $g_m = I_C / V_T$ naziva se transkonduktansa tranzistora. Može da se izvede veza između parametara koji se odnose na promenljivu komponentu:

$$g_m = \frac{I_C}{V_T} = \frac{\beta I_B}{V_T} = \frac{\beta}{r_\pi} = \frac{1}{r_e} \tag{331}$$

Emitorska otpornost se dobija iz $r_e = v_{be} / i_b = 1/ g_m$.

Model tranzistora za male signale koji koristi relacije $v_{be} = r_\pi i_b$, $i_c = \beta i_b$ i $i_c = g_m v_{be}$ naziva se hibridni π model. Verzije hibridnih π modela su prikazane na slici 8.5.



Slika 8.5. Hibridni π modeli tranzistora za male signale.

U primeni modela za male signale tranzistor se predstavlja modelom u kome se uticaj nezavisnih jednosmernih izvora eliminiše tako što se naponski izvori kratko spajaju, a strujni izvori predstavljaju kao otvoreno kolo. Nakon crtanja električnog kola sa odgovarajućim modelima, postavljaju se jednačine po Kirhofovim zakonima i Omovom zakonu, ili nekom drugom metodom. Za rešavanje sistema jednačina mogu da se koriste matematički programi, zato što i za jednostavna kola postupak rešavanja može biti veoma složen.

8.3 Ulazne i izlazne karakteristike tranzistora

Ulazna karakteristika tranzistora daje zavisnost struje baze od napona između baze i emitora, pri čemu se napon između kolektora i emitora uzima kao parametar. Ova zavisnost ima eksponencijalni karakter.

Izlazna karakteristika tranzistora daje zavisnost kolektorske struje od napona između kolektora i emitora pri čemu se struja baze uzima kao parametar.

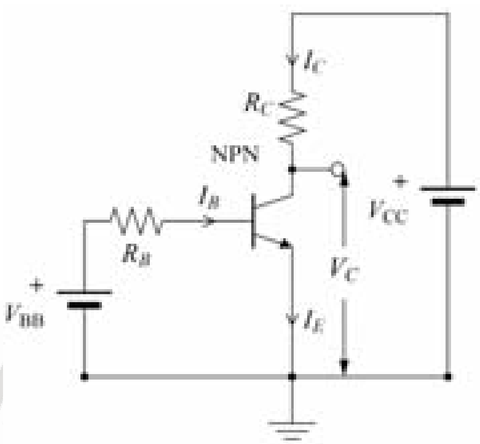
Karakteristika prenosa tranzistora opisuje se strujom kolektora u funkciji od napona između baze i emitora, pri čemu se napon između kolektora i emitora uzima kao parametar. I ova funkcija je eksponencijalnog oblika.

Ulazne i izlazne karakteristike i karakteristike prenosa mogu se naći u katalozima kompanija koje proizvode tranzistore, i one koriste u procesu projektovanja.

Proizvođači elektronskih komponenti uobičajeno daju softverske programe za projektovanje. Tako je najbolje da se koristi softver koji može da se koristi i za proračun jednosmernog režima rada i kasnije za simulaciju za male signale. Neki od tih softvera omogućavaju da se uzimaju u obzir i realni parametri, kao što je na primer napajanje elektronskih komponenti, kako iz proračuna ne bi proizašlo da može da se ostvari izlazni napon veći od napona napajanja elektronskih komponenti. Jedan od takvih softvera je LTSPICE.

8.4 Polarizacija tranzistora

Pod terminom polarizacija tranzistora podrazumeva se dovođenje jednosmernih napona na njegove elektrode, koji obezbeđuju takav radni režim da su emitorski i kolektorski spoj ispravno polarisani. U aktivnom režimu rada, emitorski spoj je direktno polarisan, a kolektorski spoj je inverzno polarisan. Za polarizaciju se mogu koristiti dva nezavisna jednosmerna naponska izvora, kao što je ilustrovano na slici 8.6.



Slika 8.6. Polarizacija npn tranzistora sa dve baterije za rad u aktivnom režimu.

Postupak određivanja jednosmernih radnih uslovi radi se u nekoliko koraka: prvo se za kolo baze napiše jednačina po drugom Kirhofovom zakonu:

$$V_{BB} - R_B I_B - V_{BE} = 0 \tag{332}$$

Struja baze se određuje iz prethodne jednačine:

$$I_B = \frac{V_{BB} - V_{BE}}{R_B} \tag{333}$$

Za kolektorsko kolo može da se napiše jednačina po drugom Kirhofovom zakonu:

$$V_C + R_c I_C - V_{CC} = 0 \tag{334}$$

Vrednost kolektorske struje određuje se na osnovu poznate bazne struje:

$$I_C = \beta I_B = \beta \frac{V_{BB} - V_{BE}}{R_B} \tag{335}$$

U jednačini za kolektorsko kolo, zameni se vrednost kolektorske struje izrazom iz prethodne jednačine, a zatim napiše izraz za napon na kolektoru:

$$V_C = V_{CC} - R_C I_C = V_{CC} - R_C \beta I_B = V_{CC} - R_C \beta \frac{V_{BB} - V_{BE}}{R_B} \tag{336}$$

Radna tačka je definisana naponom na kolektoru i kolektorskom strujom.

U polju karakteristika zavisnosti struje kolektora od napona između kolektora i emitora crta se jednačina radne prave (na slici 8.6. napon između kolektora i emitora jednak je naponu između kolektora i zajedničkog čvora – mase):

$$I_C = -\frac{V_{CE}}{R_C} + \frac{V_{CC}}{R_C} \tag{337}$$

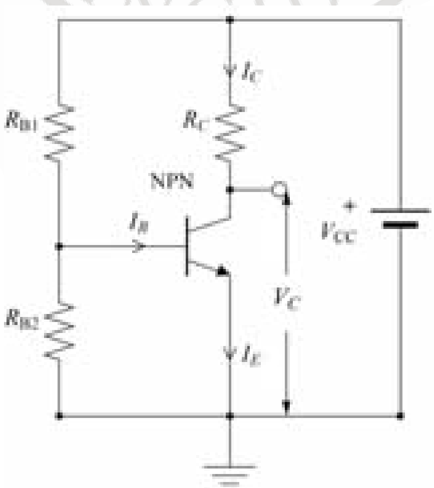
Na slici 8.6. nacrtana je masa (simbol uzemljenja) da bi se istaklo koji je čvor zajednički i referentan za električno kolo. Uobičajeno je da se jedan deo kola označava kao ulazno kolo (u ovom slučaju to je bazni deo kola), a drugi deo kola kao izlazno kolo (u ovom slučaju to je kolektorski deo kola). Kada se mere naponi, oni se mere u odnosu na masu, zbog čega se jedan deo mernog instrumenta uvek veže na masu a drugim krajem se vrše merenja tako što se voltmetar povezuje sa čvorom čiji napon se meri. Analiza kola je jednostavnija jer se jednačine najčešće posebno postavljaju za ulazno kolo a posebno za izlazno, kao što je urađen u ovom primeru.

Da bi se smanjio broj jednosmernih naponskih izvora, umesto dve baterije koristi se samo jedna za polarizaciju i kolektora i baze. To se realizuje kolom koje je prikazano na slici 8.7.

Primenom Tevenenove teoreme na ulazno kolo, koje se sastoji od baterije V_{CC} i otpornika R_{B1} i R_{B2}, pokazuje se da se ekvivalentan jednosmeran napon za bazno kolo i ekvivalentna serijska otpornost baznog kola za polarizaciju:

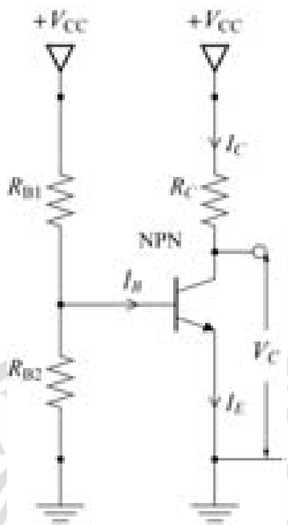
$$V_{BB} = V_{CC}\frac{R_{B2}}{R_{B1}+R_{B2}},\ R_B = \frac{R_{B1}R_{B2}}{R_{B1}+R_{B2}} \tag{338}$$

Radi jednostavnije analize može da se koristi polarizacija sa dve baterije pri čemu se koriste vrednosti dobijene prethodnim jednačinama, čime se nezavisno analiziraju bazno i kolektorsko kolo, iako oba kola koriste isti jednosmerni naponski izvor.



Slika 8.7. Polarizacija npn tranzistora sa jednom baterijom za rad u aktivnom režimu.

Zbog bolje preglednosti kola, u električnim šemama elektronskih kola ne crta se baterija V_{CC} . Da bi se izbeglo crtanje linija koje povezuju sa napajanjem električnog kola, kao i crtanja linija koje povezuju masu sa elementima spojenim na masu, uobičajeno je da se crta simbol napajanja ili simbol mase, kao što je ilustrovano na slici 8.8.



Slika 8.8. Polarizacija npn tranzistora sa jednom baterijom.

Podrazumeva se da je drugi kraj naponskog izvora povezan na masu. Zahvaljujući ovakvoj predstavi, jasnije je da su bazno i kolektorsko kolo odvojeni što olakšava postavljanje jednačina po Kirhofovim zakonima. Pre postavljanja jednačina za bazno kolo, prvo se uradi transformacija izvora po Tevenenovoj teoremi, nakon toga se primene vrednosti za napon izvora i otpornost izvora. Kada je tranzistor u aktivnom režimu, napon između baze i emitora se usvaja da je između 0,6 V i 0,7 V.

Neki parametri tranzistora mogu značajno da se razlikuju, nekada i 50% od nominalne kataloške vrednosti, zbog čega precizno izračunavanje ionako ne mora da daje tačnu vrednost kada se koriste realni tranzistori. Zbog toga je dovoljno da se izračunaju približne vrednosti.

8.5 Osnovna pojačavačka kola sa jednim tranzistorom

Jedna od važnijih primena bipolarnih tranzistora jeste da linearno pojačava naizmenične signale, na primer da neki mali sinusoidalni napon ili sinusoidalnu struju pojača nekoliko desetina ili stotine puta. Polarizacija tranzistora mora da bude takva da omogući pojačanje pobudnog promenljivog signala, vodeći računa da pojačani signal ostane u oblasti linearnog dela radne prave tako da je promenljiv napon linearno pojačan. Naime, ako bi radna tačka bila pogrešno postavljena, moglo bi da se dogodi da napon teži da bude veći od napona napajanja ili suprotnog polariteta, čime bi tranzistor iz aktivnog režima prešao u režim zasićenja ili zakočenja.

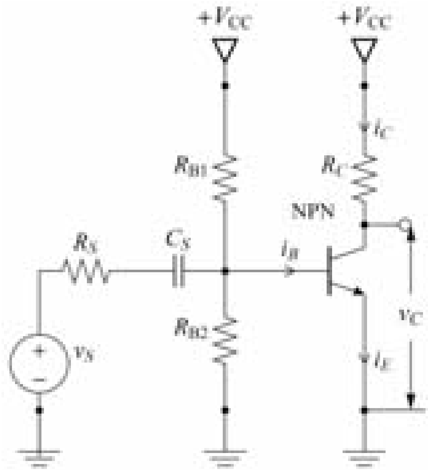
Bipolarni tranzistor može da radi kao pojačavač promenljivih signala, tako što pojačava struju, napon ili struju i napon. Tako na primer, velika promena struja kolektora funkcija je promene male struje baze ili male promenom napona baza-emitor, Jedna od mogućnosti je da se promenljivi ulazni signal dovede između baze i emitora, a promenljiv napon se uzima sa kolektora ili emitora. Jedna od elektroda tranzistora se nalazi na konstantnom potencijalu, a dve preostale elektrode se koriste za dovođenje ulaznog promenljivog signala i preuzimanje pojačanog signala. Ako je emitor na konstantnom potencijalu, to je pojačavač sa zajedničkim emitorom. Kada je kolektor na konstantnom potencijalu, dobija se pojačavač sa zajedničkim kolektorom. Treća osnovna konfiguracija ima bazu na konstantnom potencijalu, i takav pojačavač se naziva pojačavač sa zajedničkom bazom.

U ovom poglavlju se analiziraju sve tri osnovne konfiguracije u režimu rada sa malim promenljivim signalima. Osim osnovne konstrukcije, dato je izvođenje osnovnih karakteristika kao što su pojačanje (naponsko i strujno), i otpornost (ulazna i izlazna). Postupak analize uvek je isti i zasniva se na Omovom zakonu, Kirhofovim pravilima kao i pravilima za transformaciju izvora. Tranzistor se zamenjuje modelom za male signale zato što se pretpostavlja da neće doći do izlaska iz aktivnog režima i do prelaska u zasićenje ili zakočenje. Naponski izvori jednosmerne struje se kratko spajaju a strujni raskidaju iz kola. Nakon svih ovih transformacija (predstavljanje tranzistora modelom za male signale, transformacija jednosmernih izvora) postavljaju se jednačine kola po nekom od zakona za promenljive napone. Rešavanje jednačina je najbolje da se radi u nekom od programa za simboličko računanje, da bi se izbegle greške pri ručnom izvođenju. Treba imati uvek na umu da su modeli tranzistora samo dobra aproksimacija realnog tranzistora, da se proizvodni parametri, a samim tim i parametri tranzistora koji se koriste u računanju, promenljivi u širim granicama, te da se dobija sam približno tačan rezultat. I ovako približno tačno izvođenje još uvek je sasvim dovoljno da bi se razumela suština rada tranzistora kao pojačavača i odredile granice u kojima se nalaze izračunate vrednosti (pojačanja, ulazne i izlazne impedanse).

Za detaljnije računanje rada tranzistora na raspolaganju su programi koje obezbeđuju proizvođači komponenti, tako da se nakon crtanja električnog kola mogu uraditi i preciznije i detaljnije analize sa složenijim modelima tranzistora. Na primer, može se uradi analiza nelinearnih efekata kako bi se utvrdilo da li tranzistor stvarno radi u linearnom delu ili dolazi do izobličenja signala na izlaznom priključku električnog kola.

8.5.1 Pojačavač sa zajedničkim emitorom

Pojačavač sa zajedničkim emitorom je najčešće korišćeno pojačavačko kolo sa jednim bipolarnim tranzistorom. Ovaj pojačavač ostvaruje i naponsko i strujno pojačanje promenljivih ulaznih signala. Osnovna konfiguracija kola je prikazana na slici 8.9. Pobudni signal se dovodi iz realnog naponskog izvora (na primer sa sinusoidalnom pobudom) koji ima unutrašnju otpornost (otpornik R_s predstavlja ekvivalentnu otpornost pobudnog izvora). Da bi se izbegao uticaj otpornosti izvora na polarizaciju tranzistora, redno sa izvorom promenljivog napona se vezuje kondenzator. S druge strane se očekuje da je kapacitivnost takva da neće značajnije oslabiti promenljivi napon koji se dovodi preko kondenzatora na bazu tranzistora.



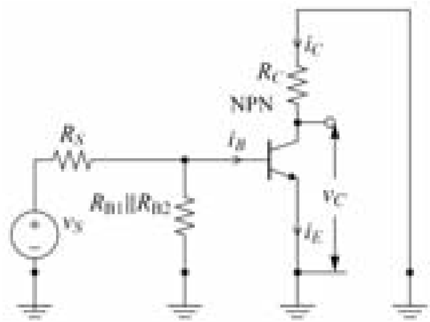
Slika 8.9. Pojačavač sa zajedničkim emitorom.

Svi čvorovi koji su povezani na masu su označeni simbolom mase. Emitor tranzistora je direktno vezan na masu. Zato se kaže da je emitor uzemljen. Elektroda tranzistora koja je zajednička i za ulazno kolo i za izlazno kolo (odakle se preuzima pojačana vrednost ulaznog signala) određuje naziv kola. U ovom slučaju emitor je zajednička elektroda zbog čega se ovakvo kolo naziva pojačavač sa zajedničkim emitorom. Izlani napon se uzima između kolektora i emitora, zbog čega kolektorsko kolo pripada izlaznom delu kola a kolektorski napon je izlazni napon.

Da bi posmatrali odziv na pobudu koju stvara promenljivi izvor, svi nezavisni naponski generatori se kratko spajaju, a nezavisni strujni izvori predstavljaju kao otvorena veza.

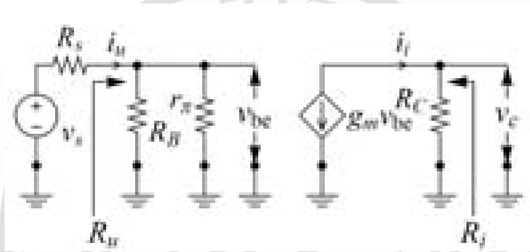
Da bi se uprostilo postavljanje jednačina, svi otpornici koji su paraleno vezani zamenjuju se ekvivalentnom paralelnom vezom (umesto izračunavanja paralelne vrednosti, bolje je na slici prikazato simbolom dve vertikalne paralelne linije || da se radi o paralelnoj vezi dva elementa).

Treba voditi računa o tome da uprošćena šema kola nema nacrtane napone za polarizaciju, i da ovakvo nacrtano kolo ne može stvarno da radi u aktivnom režimu. Upravo jednosmerni izvori daju potrebnu energiju za pojačanje, ali oni ne utiču na izvođenje kada se radi o izračunavanju pojačanja ili ulazne i izlazne impedanse kola.



Slika 8.10. Uprošćeno kolo pojačavača (sa zajedničkim emitorom) za pojačanje promenljivog napona.

Pošto smo sigurni da tranzistor radi u aktivnom linearnom režimu, sada može i tranzistor da se zameni hibridnim π modelom za male signale, kao što je nacrtano na slici 8.11.



Slika 8.11. Ekvivalentno kolo pojačavača sa zajedničkim emitorom za hibridni π model tranzistora.

Koristeći izraz za razdelnik napona, napon između baze i emitora može da se izrazi kao funkcija ulaznog napona (usvojena je aproksimacija da je ekvivalentna otpornost otpornika za polarizaciju baze znatno veća od ulazne otpornosti tranzistora između baze i emitora, zbog čega se aproksimira kao otvorena veza):

$$v_{be} = \frac{r_\pi}{R_s + r_\pi} v_s \tag{339}$$

Naponsko pojačanje je napon na kolektorskom otporniku (plus izlaznog napona je na kolektoru, a minus napona je na masi), a pri čemu se koristi prethodna jednačina za napon između baze i emitora:

$$A_v = \frac{v_i}{v_s} = \frac{-g_m v_{be} R_C}{v_s} = -g_m R_C \frac{r_\pi}{R_s + r_\pi} \tag{340}$$

Može se koristiti relacija koja povezuje parametre tranzistora:

$$\beta = g_m r_\pi \tag{341}$$

Naponsko pojačanje zavisi od parametara tranzistora, otpornosti promenljivog izvora i otpornosti u kolektorskom kolu:

$$A_v = -\beta \frac{R_C}{R_s + r_\pi} \tag{342}$$

Iz prethodnog izraza se vidi da u slučaju kada je $R_s >> r_\pi$, naponsko pojačanje je proporcionalno faktoru β. Tipične vrednosti faktora β su od 20 do 1000. Tolerancije ovog faktora su 30% do 50%, što znači da i pojačanje varira u tim granicama. Zbog toga je poželjno da se pri projektovanju vodi računa o tome da se na drugi način kontroliše pojačanje pojačavača i time učini manje zavisno od ovako velike varijacije parametara.

Ako je $R_s << r_\pi$, naponsko pojačanje je $A_v \approx -g_m R_C$. Pojačanje je sada praktično nezavisno od parametra β, jer su tolerancije faktora g_m manje od tolerancija β.

Primenom sličnog postupka izvodi se izraz za strujno pojačanje pojačavača sa zajedničkim emitorom:

$$A_i = \frac{i_i}{i_u} = \frac{-g_m \dfrac{r_\pi}{R_s + r_\pi} v_u}{\dfrac{v_u}{R_s + r_\pi}} = -g_m r_\pi = -\beta \tag{343}$$

Ulazna otpornost pojačavača sa zajedničkim emitorom dobija se kao količnik ulaznog napona i ulazne struje:

$$R_u = r_\pi \tag{344}$$

Kada se generator poveže između izlaznih krajeva, a napon izvora u ulaznom kolu je nula, dobija se izlazna otpornost:

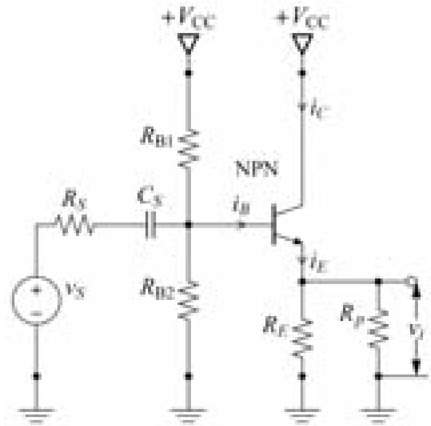
$$R_i = R_C \tag{345}$$

Kao zaključak možemo da izdvojimo najvažnije karakteristike pojačavača sa zajedničkim emitorom:_

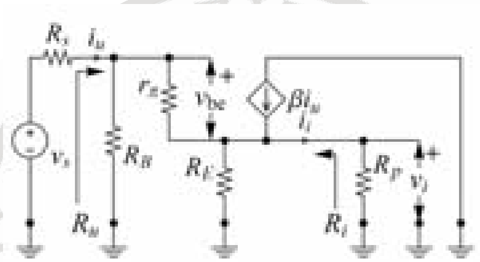
- Naponsko i strujno pojačanje mogu imati velike vrednosti.
- Ulazna otpornost nije velika.
- Izlaznu otpornost određuje otpornost otpornika u kolu kolektora, a izlazna otpornost ima veliku vrednost.
- Naponsko pojačanje je negativno; negativna vrednost napona predstavlja se faznom razlikom od 180^o između ulaznog i izlaznog signala; to znači da ovaj pojačavač obrće fazu sinusoidalne pobude.

8.5.2 Pojačavač sa zajedničkim kolektorom

Pojačavač sa zajedničkim kolektorom prikazan je na slici 8.12. Ekvivalentno kolo za pojačanje promenljivog napona dobija se na isti način kao kod pojačavača sa zajedničkim emitorom (slika 8.13.). Kolektor je vezan direktno na jednosmerni izvor, a u modelu za promenljive struje vezan je na masu. Naponska pobuda je priključena između baze i mase, a kako je kolektor povezan na masu za promenljive struje, to znači da je pobuda između baze i kolektora. Izlazni napon se uzima između emitora i mase. Obzirom da je za promenljive struje kolektor uzemljen, to znači da je izlazni napon između emitora i kolektora.



Slika 8.12. Pojačavač sa zajedničkim kolektorom.



Slika 8.13. Ekvivalentno kolo pojačavača sa zajedničkim kolektorom.

U ekvivalentnom kolu sa slike 8.13 emitorski otpornik R_E i otpornost potrošača R_p su paralelno vezani i kroz njihovu paralelnu kombinaciju protiče struja $(\beta+1)i_u$. Ako označimo promenljivi napon na bazi sa v_b, za naponsko pojačanje se dobija:

$$A_v = \frac{v_i}{v_s} = \frac{v_b}{v_s}\frac{v_i}{v_b} = \frac{r_\pi + (\beta+1)(R_E \parallel R_p)}{R_s + r_\pi + (\beta+1)(R_E \parallel R_p)}\frac{(\beta+1)(R_E \parallel R_p)}{r_\pi + (\beta+1)(R_E \parallel R_p)}$$
$$= \frac{(\beta+1)(R_E \parallel R_p)}{R_s + r_\pi + (\beta+1)(R_E \parallel R_p)} \qquad (346)$$

U praksi je najčešće $R_s + r_\pi << (\beta+1)(R_E \parallel R_p)$, tako da se uprošćavanjem izraza za naponsko pojačanje pojačavača sa zajedničkim kolektorom pokazuje da je ono približno jednako jedinici, ali je uvek manje od jedan:

$$A_v \approx 1 \qquad (347)$$

Ako se pretpostavi da je $R_p << R_E$, za strujno pojačanje se dobija:

$$A_i = \frac{i_i}{i_u} = \frac{(\beta+1)R_E}{R_E + R_p} \approx \beta+1 \qquad (348)$$

Prethodna relacija pokazuje da je osnovna karakteristika pojačavača sa zajedničkim kolektorom da ostvari vrlo veliko strujno pojačanje.

Ulazna otpornost se dobija kao količnik ulaznog napona i ulazne struje. Ulazna otpornost je velika:

$$R_u = r_\pi + (\beta + 1)(R_E \parallel R_p) \tag{349}$$

Izlazna otpornost se dobija kada se kolo pobudi sa izlaza a pretpostavi se da je naponski generator u baznom kolu jednak nuli:

$$R_i = R_E \parallel \left(\frac{r_\pi + R_s}{\beta + 1} \right) \approx \frac{r_\pi + R_s}{\beta + 1} \tag{350}$$

Zbog postojanja člana (β+1) u imeniocu, Izlazna otpornost je veoma mala.

Najvažnije karakteristike pojačavača sa zajedničkim kolektorom su jedinično naponsko pojačanje, značajno strujno pojačanje, velika ulazna otpornost i mala izlazna otpornost. Naponsko pojačanje je pozitivno, a to znači da su ulazni napon i izlazni napon u fazi (ovaj pojačavač ne obrće fazu).

8.5.3 Pojačavač sa zajedničkom bazom

Da bi pojačavač bio sa zajedničkom bazom, on ne sme da ima priključen izvor promenljivog napona ili struje na bazu, niti se sa njega može uzimati izlazni napon ili izlazna struja. To konkretno znači da je na bazu priključen samo jednosmerni napon za polarizaciju tranzistora koji radi u aktivnom režimu. Pojačavač sa zajedničkom bazom prikazan je na slici 8.14. Baza je vezana na konstantan napon preko razdelnika jednosmernog napona. Kako je jednosmerni napon izvora kratak spoj u analizi promenljivog signala, može se smatrati da je baza vezana na masu za promenljivi signal (baza je uzemljena). Pobuda se priključuje između emitora i baze (mase). Izlazni napon se preuzima između kolektora i baze (mase).

Ekvivalentno kolo pojačavača sa zajedničkom bazom za promenljive struje prikazano je na slici 8.15. Dobija se na isti način kao kod ostalih tranzistorskih pojačavača tako što se model tranzistora crta između elektroda tranzistora.

Primenom Kirhofovih pravila i ostalih transformacija koje su ranije opisane, može da se odredi naponsko pojačanje pojačavača sa zajedničkom bazom:

$$A_v = \frac{v_i}{v_s} = \frac{g_m r_\pi R_C}{r_\pi + (g_m r_\pi + 1) R_s} \tag{351}$$

Naponsko pojačanje praktično ne zavisi od β. Ako je $r_\pi << (g_m r_\pi + 1) R_s$, naponsko pojačanje je približno jednako

$$A_v \approx \frac{R_C}{R_s} \tag{352}$$

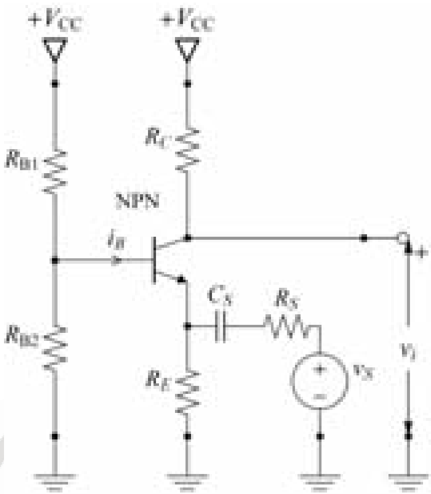
U slučaju da je otpornost pobudnog generatora veoma mala, naponsko pojačanje se može odrediti kolektorskim otpornikom

$$A_v \approx g_m R_C \tag{353}$$

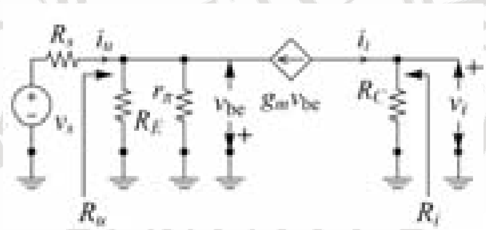
Strujno pojačanje pojačavača sa zajedničkom bazom je približno jednako jedinici:

$$A_i = \frac{i_i}{i_u} = \frac{\beta}{\beta+1} = \alpha \approx 1 \qquad (354)$$

Strujno pojačanje pojačavača sa zajedničkom bazom je uvek manje od jedan.



Slika 8.14. Pojačavač sa zajedničkom bazom**.**



Slika 8.15. Ekvivalentno kolo pojačavača sa zajedničkom bazom.

Ulazna otpornost pojačavača sa zajedničkom bazom dobija se kao količnik ulaznog napona i struje:

$$R_u = \frac{R_E \parallel r_\pi}{\beta+1} \approx r_e \qquad (355)$$

Ulazna otpornost pojačavača sa zajedničkom bazom je veoma mala. Izlazna otpornost je približno jednaka otpornosti otpornika u kolektorskom kolu:

$$R_i = R_C \qquad (356)$$

Najvažnije karakteristike pojačavača sa zajedničkom bazom su veliko naponsko pojačanje, jedinično strujno pojačanje, ulazna otpornost je veoma mala, a izlazna otpornost je određena vrednošću otpornika u kolu kolektora (R_C obično ima veliku vrednost). Naponsko pojačanje je pozitivno, što znači da ovaj pojačavač ne obrće fazu.

9 MOS tranzistor (MOSFET)

Tranzistori poznati kao MOSFET (skraćenica MOSFET je od engleskog naziva Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor) su našli veliku primenu kako u analognoj tako i u digitalnoj elektronici. Sam naziv opisuje kakva je struktura i princip rada ovog tipa tranzistora. Kod bipolarnog tranzistora postoje dve vrste nosioca naelektrisanja, elektroni i šupljine, a kontrolna elektroda (baza) je između dve elektrode (emitora i kolektora) kroz koje prolazi značajno veća struja. Malom strujom baze upravlja se intenzitetom velike struje između emitora i kolektora. Kod MOS tranzistora kontrolna elektroda (gejt) je izolovana od dve elektrode (sors i drejn) kroz koje može da protiče velika struja. Kontrola struje se vrši električnim poljem sa gejta. Struja MOSFETa se sastoji samo od jednog tipa glavnih nosilaca naelektrisanja, i to elektrona kod NMOS tranzistora i šupljina kod PMOS tranzistora. Ovakav tip tranzistora kod koga postoji samo jedna vrsta glavnih nosioca naziva se i unipolarni tranzistor.

Princip rada MOS tranzistora opisan nije odmah našao primenu pre svega zbog teškoća u realizaciji. Osnovna karakteristika MOS tranzistora jeste da imaju jednostavnu strukturu i male dimenzije. Danas su MOS tranzistori najčešće korišćeni tip u realizaciji digitalnih logičkih kola kao i memorijskih kola. MOS tranzistori se sve više koriste i u realizaciji analognih integrisanih kola.

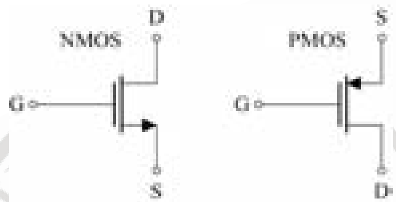
9.1 Struktura i simboli MOS tranzistora

NMOS tranzistor se realizuje na supstratu (podlozi) p tipa, u kojem su napravljena dve jako dopirane n^+ oblasti. Na ove dve n^+ oblasti je nanesen tanak sloj metala kako bi se formirale dve pristupne elektrode. Jedna od njih se naziva sors (eng. source) a drugi je drejn (eng. drain). Površina između sorsa i drejna je izolovana od supstrata nanošenjem tankog sloja izolatora (silicijum dioksida). Na izolacioni sloj je nanesen tanak sloj metala, koji postaje treća kontrolna elektroda. Treća elektroda se naziva gejt (eng. gate). Osim ove tri elektrode, sa suprotne strane supstrata i podloga ima metalni kontakt kao četvrta elektroda. MOS tranzistor ima četiri elektrode, ali se u ovoj knjizi za objašnjenje rada MOS tranzistora koriste samo prve tri elektrode (sors, drejn i gejt). Uticaj podloge je mali iz ugla elektronske komponente i funkcija koje se u električnom kolu realizuju ovim poluprovodničkim elementom. Struktura MOS tranzistora je potpuno simetrična.

Vrednosti rastojanja sorsa i drejna su od 1 do 10 μm, a označavaju se slovom *L*. Tipične vrednosti širine MOS tranzistora su od 2 do 500 μm i označavaju se slovom *W*. U savremenim integrisanim kolima velike složenosti, kao što su mikroprocesori i memorije, minimalne dimenzije mogu da budu i manje od 1 μm, reda čak i nm, što omogućava realizovanje više miliona tranzistora na jednom silicijumskom supstratu (čipu).

Tehnološki postupak izrade PMOS tranzistora je isti, s tim da je podloga n tipa, a sors i drejn su jako dopirane p^+ oblasti.

Postoje brojne varijacije simbola MOS tranzistora, a u ovoj knjizi se koriste simboli NMOS i PMOS tranzistora sa tri elektrode. Crtanje četvrte elektrode ne doprinosi razumevanju osnovne primene MOS tranzistora, što je razlog da se koriste simboli u električnim šemama kako su prikazani na slici 9.1. U literaturi se često sreću i simboli na kojima su prikazane četiri elektroda (četvrta elektroda je supstrat koji se vezuje za jednu od preostale tri elektrode).



Slika 9.1. Simboli NMOS i PMOS tranzistora.

9.2 Princip rada NMOS tranzistora

Između n^+ oblasti sorsa i podloge supstrata postoji dioda koja je usmerena od podloge ka sorsu. Između n^+ oblast drejna i podloge supstrata postoji još jedna ista takva dioda koja je usmerena od podloge ka drejnu. Ako se elektroda podloge posmatra kao provodni sloj koji povezuje dve diode, tada su ove dve diode redno vezane, ali okrenute jedna ka drugoj.

Kada na elektrode nije priključen nikakav napon, ni jedna od dioda ne može da provodi, kao što je objašnjeno u poglavlju o pn spoju i diodama. Kada je između drejna i sorsa priključen jednosmerni napon, jedna od ove dve diode je inverzno polarisana, zbog čega ne može da protiče struja ni u jednom smeru. Kada se dovede napon v_{DS} između drejna i sorsa, poluprovodnik se ponaša kao izolator zbog toga što je jedna od dioda inverzno polarisana. Otpornost između drejna i sorsa je veoma velika, reda 10^{12} Ω.

Gejt je odvojen od supstrata oksidom koji je izolator. Kakav god jednosmeran napon da dovedemo na elektrodu gejta, od gejta prema ostalim elektrodama ne može da protiče struja, jer se on ponaša kao jedna ploča kondenzatora prema podlozi kao drugoj ploči kondenzatora. Gejt je izolovan i od ostalih elektroda.

Pretpostavimo da je na gejt doveden pozitivan napon v_{GS}, a da su sors i drejn vezani na masu. Pozitivni napon gejta stvara električno polje koje odbija šupljine (šupljine su većinski nosioci u podlozi) dalje od područja ispod gejta i ostavlja nepokretne negativno naelektrisane akceptorske atome. To znači da se ispod gejta stvara oblast u kojoj ima malo pokretnih glavnih nosilaca zbog čega se ova oblast naziva osiromašena oblast.

Dovoljno veliki pozitivni napon na gejtu stvara električno polje koje privlači elektrone. Ovo polje privlači slobodne elektrone iz n+ oblasti sorsa i drejna. Ovi slobodni elektroni se grupišu u podlozi neposredno ispod gejta i stvaraju provodnu oblast u kojoj su elektroni glavni nosioci naelektrisanja. Kako se slobodni elektroni nalaze između sorsa i drejna, oni prave spoj između njih, što je razlog da se ovako formiran sloj elektrona naziva kanal. Ako su sors i drejn na istom potencijalu, to je isto kao kada su dva kraja provodnika na istom potencijalu, nemo razloga da teče struja kroz ovaj kanal u kome nema električnog polja između drejna i sorsa.

Kada je uspostavljen kanal od slobodnih elektrona između drejna i sorsa, i kada se između drejna i sorsa dovede jednosmerni napon v_{DS}, kroz kanal će proteći struja zato što dovedeni napon stvara električno polje.

Obzirom da pozitivan napon na gejtu izaziva stvaranje kanala (koristi se i termin indukcija kanala), ovakva vrsta MOS tranzistora naziva se još i tranzistor sa indukovanim n kanalom. Kako su slobodni nosioci u kanalu nastali privlačenjem napona sa gejta, ovaj tranzistor se naziva i NMOS tranzistor sa indukovanim kanalom. Celokupna struja sastoji se od kretanja samo jednih nosioca, u ovom slučaju elektrona, a šupljine nemaju nikakav uticaj. Ovakvi tranzistori se nazivaju i unipolarni tranzistori zato što struju može da formira samo jedan tip nosioca, i to nosioci koji su suprotnog tipa od glavnih nosioca podloge.

Struja kroz kanal ne može da teče dok se kanal ne uspostavi celom dužinom između sorsa i drejna. Minimalna vrednost napona koji obezbeđuje formiranje kanala naziva se napon praga provođenja i obeležava se sa V_t. Vrednost napona između gejta i sorsa je ista kao i vrednost napon između gejta i drejna, ako je drejn na istom potencijalu kao sors. Vrednost napona praga provođenja zavisi od proizvodnog procesa izrade tranzistora i tipično je u opsegu od 1 V do 3 V.

Izolacioni materijal između gejta i podloge, sa dve metalne elektroda na gejtu i podlozi, u suštini formiraju pločasti kondenzator. Dovođenje napon između gejta i podloge stvara električno polje u dielektriku pločastog kondenzatora. Kod kondenzatora se podrazumeva da su obe elektrode od tankog sloja metala, dok je u ovom slučaju druga ploča u stvari poluprovodnik koji ima konačne dimenzije. Zato električno polje koje postoji između gejta i podloge privlači slobodne nosioce u tankom sloju ispod izolacionog materijala. Time se kontroliše broj slobodnih nosilaca u kanalu, što znači da napon između gejta i sorsa određuje provodnost kanala, podrazumevajući da je podloga na istom potencijalu kao i sors.

Kako MOS tranzistori električnim poljem regulišu provodnost kanala, to se za naziv ovih tranzistora koristi termin tranzistori sa efektom polja ili skraćeno MOSFET od engleskog naziva Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor (u žargonu se po nekada kaže MOSFET tranzistor, iako je poslednje slovo T u stvari skraćenica za tranzistor).

9.2.1 Ponašanje NMOS tranzistora pri malim naponima između drejna i sorsa

Pretpostavimo da je između gejta i sorsa doveden napon koji formira provodni kanal, $v_{GS}>V_t$, takozvani indukovani kanal. Da bi mogla da teče struja kroz kanal, potrebno je da se između drejna i sorsa dovede barem mali pozitivan napon v_{DS} koji je reda stotinak mV. Kroz indukovani kanal će se kretati elektroni od sorsa ka drejnu (zato što su elektroni negativna naelektrisanja, na drejnu je pozitivniji napon u odnosu na sors, i električno polje u kanalu je od drejna ka sorsu). Kroz kanal će proticati struja čiji je smer od drejna ka sorsu, zato što je po definiciji smer struje jednak smeru kretanja pozitivnih naelektrisanja, a suprotan smeru kretanja negativnih naelektrisanja. Smer struje na simboličkom predstavljanju ovih tranzistora pokazuje strelica (slika 9.1.).

Jačina struje zavisi od broja slobodnih nosilaca u kanalu i priključenog napona između drejna i sorsa. Broj slobodnih nosilaca zavisi od razlike napona v_{GS} i napona praga V_t, v_{GS}-V_t, a ova razlika napona se često naziva i efektivni napon. Struja drejna i_D biće proporcionalna naponu v_{GS}-V_t i naponu v_{DS}. Struja gejta je jednaka nuli zato što je gejt izolovana elektroda. Po prvom Kirhofovom zakonu, struja sorsa je jednaka struji drejna.

U režimu malih napona između drejna i sorsa, NMOS tranzistor se može posmatrati kao otpornik čija se otpornost zavisi od naponom na gejtu.

Uzimajući u obzir postupke tehnološke izrade (fizičke konstante μ_n i ε_{ox}, parametri tehnološkog procesa t_{ox} i V_t), geometrijske dimenzija tranzistora W i L) i pojave koje se dešavaju, u stručnoj literaturi se može naći izvođenje zavisnosti struje drejna i_D od napona v_{GS}, V_t , v_{GS}-V_t i v_{DS}:

$$i_D = \frac{1}{2}\frac{\mu_n \varepsilon_{ox}}{t_{ox}}\frac{W}{L}\left[2(v_{GS}-V_t)v_{DS}-v_{DS}^2\right] = k_n\frac{W}{L}\left[2(v_{GS}-V_t)v_{DS}-v_{DS}^2\right] \tag{357}$$

Ako nas interesuje uticaj samo dovedenih napona, struja drejna zavisi od napona v_{GS} i v_{DS}.

Oblast rada NMOS tranzistora u režimu malih napona v_{DS} naziva se linearna oblast (jer se MOS tranzistor ponaša kao otpornik ako zanemarimo kvadratni član). Koristi se i termin triodna oblast zato što su karakteristike slične kao kod triodnih elektronskom cevi.

9.2.2 Ponašanje NMOS tranzistora pri većim naponima između drejna i sorsa

Napon između gejta i neke tačke u provodnom kanalu koji ide od drejna do sorsa ima različite vrednosti, zato što drejn i sors nisu na istom potencijalu. Na kraju kanala koji je bliži sorsu to je upravo napon koji je doveden između gejta i sorsa, v_{GS}. Na kraju kanala koji je bliži drejnu, napon može da se izračuna po drugom Kirhofovom zakonu, $v_{GD}=v_{GS}-v_{DS}$). Dubina kanala zavisi od napona između gejta i kanala, a kako napon nije isti, razlikovaće se i dubina kanala. Ako je napon na drejnu pozitivniji u odnosu na gejt, na strani sorsa kanal je dublji (kaže se i širi), a na strani drejna kanal je plići (kaže se i uži). Što je pozitivan napon v_{DS} veći, to će promena dubine kanala biti sve veća. Kada napon v_{DS} postane jednak naponu $v_{GS}-V_t$, $v_{DS}=v_{GS}-V_t$ dubina kanala u okolini drejna se približno svede na nulu. Za ovakav kanal se kaže da je stisnut. Veće vrednosti napona v_{DS} iznad $v_{GS}-V_t$ nemaju uticaj na oblik kanala, tako da se struja drejna ne menja pri daljem povećanju napona v_{DS}. To znači da dolazi do zasićenja struje drejna.

Kaže se da NMOS tranzistor radi oblast zasićenja za napona $v_{DS}>v_{GS}-V_t$. Struja drejna u režimu zasićenja može se odredi iz prethodne jednačine tako što se zameni napon između drejna i sorsa sa $v_{DS}=v_{GS}-V_t$:

$$i_D = k_n\frac{W}{L}(v_{GS}-V_t)^2 \tag{358}$$

Ako se dalje povećava vrednost napona između drejna i sorsa, struja drejna zavisi isključivo od napona v_{GS}. Vrednost struje zasićenja može da se odredi geometrijom supstrata.

9.3 CMOS tranzistor (komplementarni MOS) i PMOS tranzistor

MOS tranzistor sa p kanalom se pravi na supstratu n tipa a sors i drejn su sa p^+ oblasti. Princip rada je potpuno isti kao kod NMOS tranzistora. Razlika je u polaritetu svih napona i struja. Glavni nosioci su šupljine umesto elektrona kod NMOS tranzistora. Naponi v_{GS}, v_{DS} i V_t su negativni, a struja drejna i_D ima smer prema sorsu i izlazi iz drejna. U izrazima za struju umesto pokretljivosti elektrona koristi se pokretljivost šupljina μ_p.

Kako je pokretljivost elektrona pn približno 2.5 puta veća od pokretljivosti šupljina, NMOS tranzistori se više koriste u praksi. Zbog veće pokretljivosti, struja NMOS tranzistora može da bude 2.5 veća u odnosu na PMOS tranzistora istih dimenzija i u istim uslovima rada.

U nekim primenama poželjno je da postoje komplementarni tranzistori koji mogu da rade kao da su suprotno polarisani. Upravo su PMOS tranzistori našli primenu u integrisanim kolima za izradu komplementarnih MOS ili CMOS kola. CMOS kola su našla široku primenu u realizaciji i digitalnih i analognih kola.

Obe vrste tranzistora se realizuju na istoj vrsti podloge, p tim podloge. NMOS tranzistor se realizuje direktno na podlozi p tipa. Za realizaciju PMOS tranzistora potrebno je da je podloga n tipa. Zbog toga se osnovni supstrat dopira da postane n tip, a zatim se ceo postupak ponovi za fabrikaciju PMOS tranzistora, kao da je podloga n tipa.

Tranzistori NMOS i PMOS tipa se međusobno izoluju debelim slojem oksida, čime se sprečava uticaj rada jednog tranzistora na drugi tip tranzistora.

9.4 Model NMOS tranzistora za velike signale

MOS tranzistori su našli primenu u integrisanim kolima kao prekidački elementi ali i kao pojačavači. MOS tranzistori se koriste u sve tri vrste rada: zakočenje, triodna oblast i zasićenje. U kojoj će oblasti tranzistor da radi, određuje se naponima koji se dovode na elektrode MOS tranzistor, odnosno od polarizacije tranzistora. Za svaku vrstu rada može da se koristi odgovarajući ekvivalentni električni model NMOS tranzistora, što omogućava da se napravi model za velike signale.

9.4.1 Model NMOS tranzistora u zakočenju

Kada nema uslova za formiranje kanala, NMOS tranzistor radi u režimu zakočenja. Potreban uslov je $v_{GS}<V_t$. Između drejna i sorsa, umesto kanala, postoje dve diode koje su povezane katodama; jedna dioda je od sorsa ka supstratu, a druga od drejna ka supstratu. Jedna dioda je uvek inverzno polarisana bez obzira koji je od napona sorsa ili drejna na višem potencijalu. Zbog inverzne polarizacije jedne od dioda, otpornost između sorsa i drejna je reda 10^{12} Ω. Između gejta i ostale dve elektrode postoji izolator, što daje mogućnost da se ceo MOS tranzistor može modelovati otvorenim kolom.

9.4.2 NMOS tranzistor u triodnoj oblasti

NMOS tranzistor radi u triodnoj oblasti kada je napon na gejtu dovoljno veliki za formiranje kanala, $v_{GS}>V_t$, a napon između sorsa i drejna mali tako da je $v_{DS}<<v_{GS}-V_t$, U jednačini za struju drejna se za veoma male napone v_{DS} može zanemariti kvadratni član:

$$i_D \approx 2k_n \frac{W}{L}(v_{GS} - V_t)v_{DS} \tag{359}$$

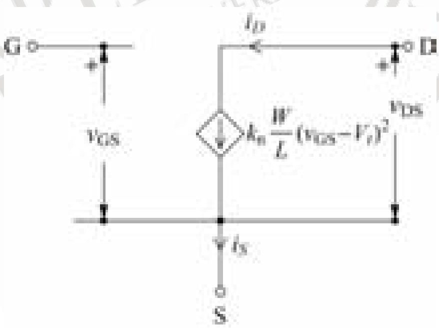
U triodnoj oblasti NMOS tranzistor se ponaša kao otpornik. Otpornost zavisi od kontrolnog napona v_{GS}:

$$r_{DS} = \frac{v_{DS}}{i_D} = \frac{1}{2k_n \frac{W}{L}(v_{GS} - V_t)} \tag{360}$$

U integrisanim kolima se često koristi ova osobina MOS tranzistora za realizaciju otpornika. Posebno je interesantan slučaj kada je potrebno da se promeni vrednost otpornosti, a da se to ne radi mehanički ili korišćenjem prekidačke logike. Promenom napona se realizuje programabilni naponski kontrolisani otpornik.

9.4.3 NMOS tranzistor u zasićenju

Kada je napon na gejtu dovoljno veliki za formiranje kanala, $v_{GS}>V_t$, a napon između sorsa i drejna dovoljno veliki, tako da je kanal stisnut na strani drejna, $v_{DS}>v_{GS}-V_t$, NMOS tranzistor radi u oblasti zasićenja. Struja drejna NMOS tranzistora u oblasti zasićenja može da se posmatra kao idealni zavisni strujni izvor kontrolisan naponom v_{GS}. Ekvivalentni model tranzistora je prikazan na slici 9.2.



Slika 9.2. Ekvivalentni model NMOS tranzistora u oblasti zasićenja.

9.5 Model NMOS tranzistora za male signale

Aktivna kola, kojima pripadaju i MOS tranzistori, postavljaju se u radni režim odgovarajućom polarizacijom, odnosno jednosmernim naponima koji obezbeđuju da element radi u odgovarajućem režimu. To znači da se određuju radna prava i radna tačka. Suština aktivnih elemenata jeste da pojačaju promenljivi napon ili struju (na račun napajanja iz jednosmerne baterije ili jednosmernog izvora), tako da aktivno kolo ne izađe iz režima rada u kome se ostvaruje linearna zavisnost signala na izlazu u odnosu na promenljivi signal na ulazu u kolo. Zbog toga se naponi i struje izvora predstavljaju kao zbir jednosmerne i promenljive komponente. Svaka od analiza se posebno radi za korišćenjem modela koji odgovara jednosmernom ili promenljivom signalu. Na izlazu se sabiraju odzivi na jednosmernu i promenljivu pobudu, i tako se dobija kompletan odziv.

Za jednosmerni režim rada MOS tranzistora se koristi modela tranzistora u zasićenju. Za određivanje napona i struja u radu sa vremenski promenljivim izvorima, može da se koristi model za male signale. Da bi NMOS tranzistor radio kao pojačavač, njegova radna tačka treba da bude u oblasti zasićenja.

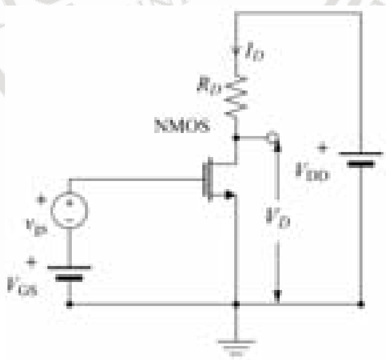
Principijelna šema pojačavača sa polarizacijom nacrtana je na slici 9.3. Jednosmerni izvori su posebno označeni da bi se bolje uočio promenljivi izvor. Korisni signal se preuzima sa drejna. Uvodimo konvenciju radi lakšeg praćenja formula i izvođenja. Slova u indeksu označavaju elektrode između kojih se dovodi napon. Ako je napon jednosmeran, tada je oznaka napona velikim slovom *V*, na primer za jednosmerni napon između gejta i sorsa V_{GS}. Ako je napon promenljiv ali može da ima i jednosmernu komponentu, tada je slovna oznaka malim slovom, ali su indeksi velikim slovom, na primer v_{GS}. Ako napon ima samo promenljivu komponentu, tada su i napon i indeksi malim slovom, v_{gs}.

Za određivanje radne tačke tranzistora pretpostavlja se da je promenljivi napon jednak nuli, v_{gs}=0. Jednosmerni režim rada može da se opiše sa sledeće dve jednačine:

$$I_D = k_n \frac{W}{L}(V_{GS} - V_t)^2 \qquad (361)$$

$$V_D = V_{DD} - R_D I_D \qquad (362)$$

Struja drejna i napon na drejnu u radnoj tački se određuju direktno iz jednačina. Za masu je određen čvor za koji je zajednički jednosmernim izvorima u kolu gejta i drejna.



Slika 9.3. Osnovno pojačavačko kolo sa NMOS tranzistorom.

Uticaj promenljivog signala v_{gs} posmatra se u radnoj tački. Ukupan napon između gejta i sorsa dobija se kao zbir jednosmernog napona za polarizaciju i promenljive komponente:

$$v_{GS} = V_{GS} + v_{gs} \qquad (363)$$

Ukupna struja drejna iskazana preko jednosmernog napona i promenljive pobude postaje:

$$i_D = k_n \frac{W}{L}(V_{GS} + v_{gs} - V_t)^2 \tag{364}$$

Nakon sređivanja izraza tako da se posebno odvoji uticaj promenljivog dela, dobija se:

$$i_D = k_n \frac{W}{L}((V_{GS} - V_t)^2 + 2v_{gs}(V_{GS} - V_t) + v_{gs}^2) \tag{365}$$

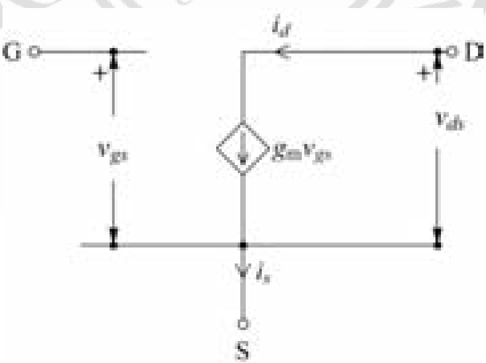
U prethodnoj jednačini, prvi član odgovara stalnoj struji drejna u radnoj tački. Drugi član predstavlja komponentu struje koja zavisi od promenljivog pobudnog napona, i koji se koristi da bi se dobio kao izlazni pojačani napon. Treći član je srazmeran kvadratu promenljivog dela pobudnog napona i on unosi nelinearna izobličenja. Da bi se nelinearna izobličenja smanjila, neophodno je da promenljivi ulazni napon bude znatno manji od jednosmernog napona:

$$v_{gs} << 2(V_{GS} - V_t) \tag{366}$$

Za struju drejna se konačno dobija:

$$\begin{aligned} i_D &= k_n \frac{W}{L}((V_{GS} - V_t)^2 + 2v_{gs}(V_{GS} - V_t)) \\ I_D &= k_n \frac{W}{L}(V_{GS} - V_t)^2 \\ i_d &= 2k_n \frac{W}{L}(V_{GS} - V_t)v_{gs} \end{aligned} \tag{367}$$

Na osnovu ovog izvođenja, može se napraviti model NMOS tranzistor za male signale koji se sastoji od idealnog naponski zavisnog strujnog izvora. Model NMOS tranzistora za male promenljive signale je prikazan na slici 9.4.



Slika 9.4. Osnovno pojačavačko kolo sa NMOS tranzistorom.

Parametar g_m, daje vezu između struje i_d i napona v_{gs}. Ovaj parametar se naziva transkonduktansa MOSFET-a a definiše se izrazom:

$$g_m = 2k_n \frac{W}{L}(V_{GS} - V_t) \tag{368}$$

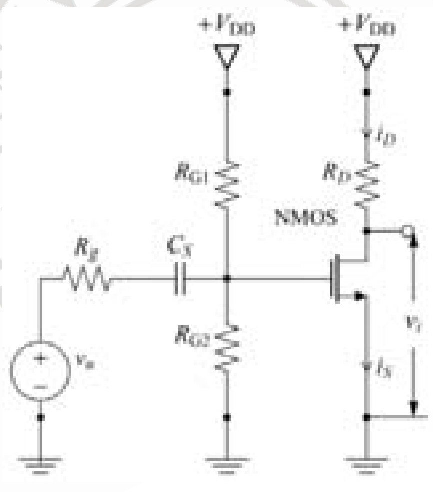
Model za male signale NMOS tranzistora je sličan modelu bipolarnog tranzistora, ali je značajno jednostavniji. U modelu NMOS tranzistora nema ulazne otpornosti, zbog čega je i ulazna struja jednaka nuli. Nepovoljna osobina je ta da je vrednost transkonduktanse kod NMOS tranzistora manja nekoliko puta od transkonduktanse bipolarnog tranzistora (pri istoj struji u izlaznom delu kola).

9.6 Osnovna pojačavačka kola sa NMOS tranzistorom

Da bi tranzistor radio kao pojačavač, ulazni napon ili struja se dovode na jednu elektrodu, sa druge elektrode se preuzima pojačan signal, a treća elektroda je na konstantnom potencijalu. U zavisnosti od toga koja je elektroda na konstantnom potencijalu, postoje tri osnovne konfiguracije pojačavača: sa zajedničkim sorsom, sa zajedničkim drejnom i sa zajedničkim gejtom.

9.6.1 Pojačavač sa zajedničkim sorsom

Pojačavač sa zajedničkim sorsom se najčešće koristi kao pojačavačko kolo sa jednim MOS tranzistorom. Pojačavačko kolo je prikazano na slici 9.5.

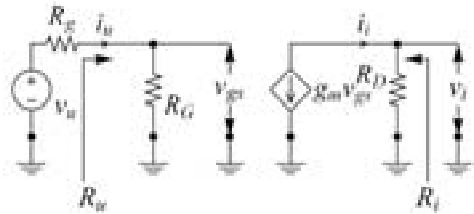


Slika 9.5. Pojačavač sa zajedničkim sorsom.

Pobuda je priključena između gejta i sorsa, a sors je vezan za masu. Izlazni napon uzima se između drejna i sorsa. Pošto je sors zajednička elektroda za promenljiv signal, ovo kolo se naziva pojačavač sa zajedničkim sorsom.

Otpornici R_{G1} i R_{G2} služe za podešavanje napona V_{GS}, a time i radne tačke, odnosno napona V_D i struje napona I_D. Kondenzator služi da se spreči uticaj promenljivog izvora na polarizaciju tranzistora.

Ekvivalentno kolo za promenljive signale prikazano je na slici 9.6. (svi jednosmerni naponski izvori su kratko spojeni).



Slika 9.6. Ekvivalentno kolo pojačavača sa zajedničkim sorsom.

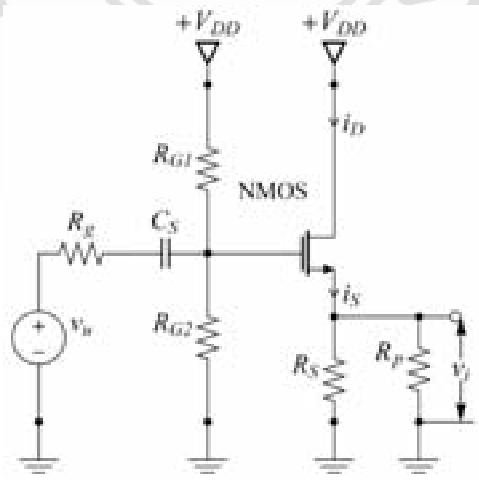
Struja gejta je jednaka nuli, tako da razdelnik napona nije opterećen ulaznom otpornošću tranzistora; zbog toga otpornici R_{G1} i R_{G2} mogu imati znatno veće vrednosti nego kod pojačavača sa bipolarnim tranzistorom. Ulazna otpornost je jednaka paralelnoj vezi otpornika R_{G1} i R_{G2}, ($R_G=R_{G1}\|R_{G2}$). Zbog toga se i uzimaju velike vrednosti za otpornosti ovih otpornika. Naponsko pojačanje se dobija rešavanjem kola sa slike 9.6:

$$A_v = \frac{v_i}{v_u} = \frac{-g_m v_{gs} R_D}{v_u} = -g_m R_D \frac{R_G}{R_g + R_G} \approx -g_m R_D \tag{369}$$

Pojačavač sa zajedničkim sorsom ima naponsko pojačanje koje je jednako proizvodu transkonduktanse i otpornosti otpornika u kolu drejna. Negativan znak znači da ovaj pojačavač obrće fazu.

9.6.2 Pojačavač sa zajedničkim drejnom

Pojačavača sa zajedničkim drejnom prikazan je na slici 9.7, Drejn je vezan direktno na jednosmerni izvor za napajanje, što znači da je za promenljiv signal vezan za masu što je razlog da se ovo kolo i zove pojačavač sa zajedničkim drejnom. Pobudni napon se priključuje između gejta i drejna, a izlazni napon je između sorsa i mase.

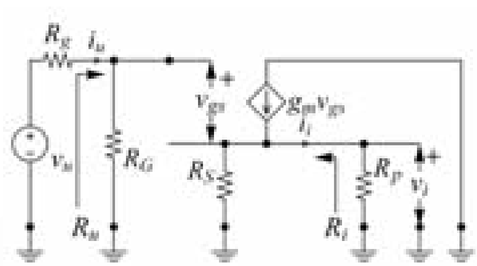


Slika 9.7. Pojačavač sa zajedničkim drejnom.

Ekvivalentno kolo za promenljive signale prikazano je na slici 9.8. (svi jednosmerni naponski izvori su kratko spojeni na masu). Posle zamene MOS tranzistora modelom za male signale i primenom Kirhofovih zakona, Omovog zakona i ostalih transformacija, dobija se izraz za naponsko pojačanje (ekvivalentna otpornost je paralelna veza otpornosti u sorsu i otpornosti potrošača koja može da bude ulazna otpornost narednog pojačavačkog stepena):

$$
\begin{aligned}
R_{Se} &= \frac{R_S R_p}{R_S + R_p} \\
A_v &= \frac{v_i}{v_u} = g_m \frac{R_{Se}}{1 + g_m R_{Se}} \frac{R_G}{R_g + R_G} \approx 1
\end{aligned}
\tag{370}
$$

Naponsko pojačanje pojačavač sa zajedničkim drejnom je približno jednako jedinici. Napon na izlazu je u fazi s naponom na ulazu u pojačavač.



Slika 9.8. Ekvivalentno kolo pojačavača sa zajedničkim drejnom.

Na osnovu usvojenog modela tranzistora, može da se odredi izlazna otpornost pojačavača sa zajedničkim drejnom:

$$
R_i = \frac{R_{Se}}{1 + g_m R_S}
\tag{371}
$$

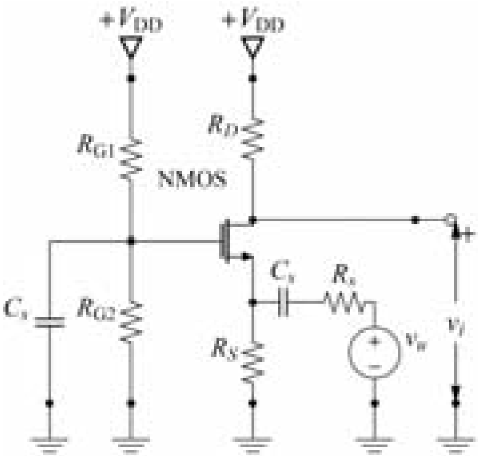
Iz prethodnog izraza proizilazi da je izlazna otpornost pojačavača veoma mala.

9.6.3 Pojačavač sa zajedničkim gejtom

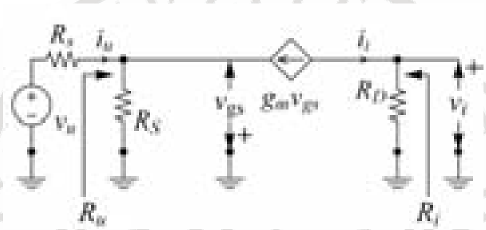
Slika 9.9. ilustruje osnovnu konfiguraciju pojačavač sa zajedničkim gejtom. Gejt se nalazi na konstantnom napon koji je određen razdelnikom napona. Uobičajeno se stavlja i kondenzator koji ima veliku kapacitivnost da bi za promenljive signale gejt praktično bio vezan na masu. Pobudni napon se dovodi između sorsa i mase, a izlazni napon je između drejna i mase.

Primenom istih postupaka kao i za prethodna kola sa tranzistorima, dobija se model za male signale, koji je prikazan na slici 9.10. Naponsko pojačanje se izvodi rešavanjem ekvivalentnog kola:

$$
\begin{aligned}
R_{Se} &= \frac{R_S R_s}{R_S + R_s} \\
A_v &= \frac{v_i}{v_u} = g_m \frac{R_D}{1 + g_m R_{Se}} \frac{R_S}{R_s + R_S} \approx \frac{R_D}{R_{Se}}
\end{aligned}
\tag{372}
$$



Slika 9.9. Pojačavač sa zajedničkim gejtom.



Slika 9.10. Ekvivalentno kolo pojačavača sa zajedničkim gejtom.

Pojačanje pojačavača sa zajedničkim drejnom određeno je vrednostima otpornosti u kolu sorsa i drejna. Napon na izlazu i pobudni napon su u fazi.

10 Složena pojačavačka kola

Realizacija osnovnih pojačavačkih kola sa jednim tranzistorom ima praktičnu primenu kod realizacije sa diskretnim tranzistorima, kao i za razumevanje rada osnovnih elektronskih sklopova. Diskretni pojačavači često zahtevaju komponente sa uskim tolerancijama koje su veoma skupe. U integrisanoj tehnologiji na raspolaganju je veliki broj tranzistora i uticaj raznih promena, uključujući i uticaj tolerancija vrednosti elemenata, ili uticaj temperaturnih promena, može se realizovati složenim kolima sa tranzistorima i diodama. Cena integrisanih komponenti (na primer pojačavačkih stepena sa ogromnim pojačanjem, velikom ulaznom otpornošću i malom izlaznom otpornošću) je višestruko manja od diskretnih komponenti (na primer pojačavači sa jednim tranzistorom, otpornicima sa uskim tolerancijama i malom promenom na varijacije temperature okoline, kondenzatori sa uskim tolerancijama).

Uloga složenih pojačavačkih kola jeste da realizuje visokokvalitetne pojačavače, ali sa cenom koja je značajno niža od diskretne realizacije. Pojava programabilnih analognih kola omogućava da se pojedini parametri pojačavača mogu menjati preko digitalnog kontrolnog ulaza, tako da se promena konfiguracije pojačavača ili promena parametara analogne komponente može menjati korišćenjem softvera. Kod diskretnih realizacija, ovakve promene bi po mogle da zahtevaju da se fizički raskidaju neke veze, na primer upotrebom lemilice, što zahteva skupo održavanje.

Savremene analogne komponente zahtevaju da se izvrši autokalibracija, ili podešavanja promenom vrednosti otpornosti, ako se uslovi rada značajno promene (usled promene temperature, vlažnosti vazduha, starenja komponenti, elektrohemijskih procesa tokom eksploatacije). Neka aktivna kola zahtevaju da se tokom eksploatacije uređaja vrše podešavanja, tako da se u dužem vremenskom periodu i pod različitim uslovima rada uvek dobija ispravan rad u zadatim granicama.

U ovom poglavlju biće izneti osnovni nedostaci jednostavnih pojačavačkih kola i kako se rešavaju neki od ovih nedostataka. Osnovni nedostaci su nedovoljno pojačanje, prevelike ili premale vrednosti otpornosti i kapacitivnosti, preveliki uticaj radnog ambijenta na nominalne vrednosti pojačavača.

Naponska pojačanja pojačavačkih kola sa jednim tranzistorom, kao što su pojačavači sa zajedničkim emitorom ili sorsom, zavise od parametra tranzistora (na primer transkonduktanse) i otpornosti otpornika u kolu kolektora ili drejna. Da bi se ostvarilo što je moguće veće naponsko pojačanje, potrebno je da otpornost bude što je moguće veća. Prevelike otpornosti mogu imati negativan uticaj na rad pojačavačkog kola, na primer mogu uzrokovati smanjenje transkonduktanse, a time se onemogućava preveliko pojačanje. Iako se pojačavačem sa zajedničkim emitorom može realizovati veće pojačanje nego sa zajedničkim sorsom, pojačanje pojačavača sa jednim tranzistorom često nije dovoljno da zadovolji potrebe primene pojačavača. Umesto jednog pojačavača može se realizovati više kaskadno vezanih pojačavača i ostvariti značajno pojačanje. Međutim, preveliko pojačanje može prouzrokovati da pojačan signal bude izobličen u odnosu na ulazni. Uticaj generisanja šuma u aktivnim komponentama može dovesti do prevelikog pojačanja šuma u odnosu na korisni pobudni signal, zbog čega je efekat pojačanja smetnji i šuma veći od pojačanja korisnog signala.

U integrisanoj tehnologiji nije pogodno da se koriste klasični otpornici, a neke tehnologije zahtevaju previše prostora na substratu za realizaciju otpornika. Umesto realizacije otpornika sa velikom otpornošću, nekada je pogodnije realizovati isti efekat kombinacijom aktivnih i prekidačkih sklopova.

Treći nedostatak kod opisanih konfiguracija sa jednim tranzistorom je taj da zahtevaju upotrebu kondenzatora koji treba da obezbede ispravnu polarizaciju jednosmernim izvorima i spreče međusobni uticaj jednosmernih izvora na promenljive izvore, ili promenljivih izvora na napajanje. Ovaj efekat posebno dolazi do izražaja kod sprega jednog pojačavačkog stepena sa narednim pojačavačkim stepenom. Kondenzatori se koriste da se ne bi poremetila radna tačka tranzistora priključivanjem pobude ili narednog stepena. Takvi kondenzatori najčešće treba da imaju veliku kapacitivnost da ne bi oslabili signale na niskim učestanostima. U realizacijama sa diskretnim komponentama, ovi kondenzatori ne predstavljaju problem, osim što značajno povećavaju dimenzije uređaja. Kondenzatore velikog kapaciteta nije moguće realizovati na u integrisanoj tehnologiji jer bi zauzimali veli prostor. Umesto korišćenja kondenzatora, ispravna polarizacija tranzistora se postiže raznim drugim tehnikama za postavljanje radne tačke.

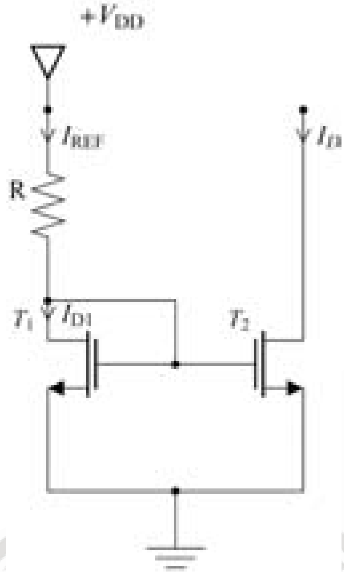
Da bi se održala niska cena proizvodnje pojačavača, a otklonili navedeni nedostaci, razvijena su nova kola koja treba da imaju veliko pojačanje uz istovremeno malo zauzeće površine integrisanih kola. Iako je proizvodnja integrisanih kola jeftinija, ako se sve komponente realizuju sa samo jednom vrstom tranzistora, ili jednim tehnološkim postupkom, postoje i proizvođači koji kombinuju više tehnologija izrade tranzistora u cilju postizanja kvalitetnijih rešenja. Najrasprostranjeniji su tehnološki postupci izrade tranzistorskih pojačavača u integrisanoj tehnologiji oni koji sadrže samo MOS tranzistore. Zato se i otpornici realizuju sa tranzistorima. Time se obezbeđuje velika dinamička otpornost, uz istovremeno zadržavanje ispravne polarizacije tranzistora, kako bi se obezbedilo da tranzistor radi u linearnoj oblasti.

10.1 Strujni izvori

Da bi se realizovalo veliko naponsko pojačanje potrebno je da se koriste otpornici velike otpornosti ili veoma visoki jednosmerni naponski izvori. Ako se prisetimo dela o idealnim strujnim izvorima, znamo da strujni izvori imaju veoma veliku, skoro beskonačnu unutrašnju otpornost. Stoga je od velikog interesa da se koriste strujni izvori za polarizaciju radne tačke, ali da se istovremeno izbegne potreba za veoma visokim jednosmernim izvorima.

Ovakvu vrstu strujnih izvora koriste pojačavači u integrisanoj tehnologiji. Jednostavna realizacija strujnog izvora ilustrovana je na slici 10.1.

.



Slika 10.1. Strujni izvor sa NMOS tranzistorom.

Tranzistor T_1 ima kratko spojene drejn i gejtom. Ovime je obezbeđeno da tranzistor sigurno radi u režimu zasićenja zato što je $v_{DS}=v_{GS}>v_{GS}-V_t$. Struja kroz tranzistor T_1 (referentna struja) određena je otpornošću R (zavisi i od strujno naponskih karakteristika MOS tranzistora; za isti postupak izrade napon V_D je isti za istu struju drejna):

$$I_{\mathrm{REF}} = \frac{V_{DD} - V_D}{R} \qquad (373)$$

Jednosmerna struja ne može da teče kroz gejt, zbog čega je po prvom Kirhofovom zakonu struja drejna jednaka referentnoj struji:

$$I_{D1} = I_{\mathrm{REF}} \qquad (374)$$

Na osnovu relacije za struju drejna u funkciji napona između gejta i sorsa:

$$I_{D1} = k_n \frac{W_1}{L_1}(v_{GS} - V_t)^2 \qquad (375)$$

može se odrediti napon između gejta i sorsa:

$$(v_{GS} - V_t)^2 = I_{\mathrm{REF}} \frac{1}{k_n}\frac{L_1}{W_1} \qquad (376)$$

Tranzistor T_2 ima isti napon između gejta i sora kao i T_1; izborom radne tačke tako da tranzistor T_2 bude u zasićenju, dobija se jednačina za izlaznu struju:

$$I_D = I_{D2} = k_n \frac{W_2}{L_2}(v_{GS} - V_t)^2 \qquad (377)$$

Zamenom vrednosti napona između gejta i sorsa za T_1, dobija se:

$$I_D = I_{\text{REF}} \frac{W_2}{L_2} \frac{L_1}{W_1} \tag{378}$$

Količnik izlazne struje I_D i referentne struje naziva se strujno pojačanje strujnog izvora:

$$\frac{I_D}{I_{\text{REF}}} = \frac{W_2}{L_2} \frac{L_1}{W_1} \tag{379}$$

Ako je geometrija (dužina i širina tranzistora) ista, tada je izlazna struja jednaka referentnoj. Zbog toga se ovo kolo naziva strujno ogledalo.

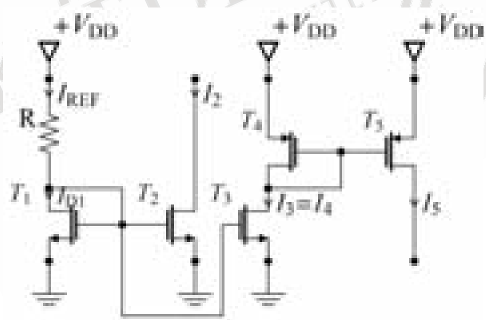
Naravno, izborom drugačije geometrije, izlazna struja je određena referentnom strujom i odnosom dužina i širina ova dva tranzistora.

Ako tranzistor T_2 radi u zasićenju, njegova izlazna struja ne zavisi od otpornosti u kolu drejna T_2, a to znači da T_2 ima veliku izlaznu otpornost. Da bi T_2 radio u režimu zasićenja, napon na njegovom drejnu ne sme da bude manji od sledeće vrednosti:

$$V_{D2} \geq v_{GS} - V_t \tag{380}$$

Kako je referentna struja određena otpornošću R i naponom između gejta i sorsa, a kako nema proticanje jednosmerne struje kroz gejt, paralelnim vezivanjem drugih tranzistora na gejt T_2, mogu se dobiti strujni izvori i za druga kola, na primer za T_3, kao što je ilustrovano na slici 10.2.

Korišćenjem PMOS tranzistora može se realizovati izlazna struja suprotnog smera, kao što je pokazano na slici 10.2. za struju I_5.



Slika 10.2. Strujni izvori sa NMOS i PMOS tranzistorima.

Za kolo na slici 10.2. mogu se napisati relacije koje određuju sve struje:

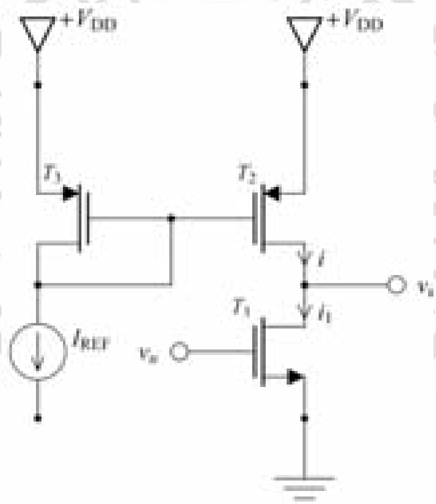
$$\begin{aligned} I_2 &= I_{\text{REF}} \frac{W_2}{L_2} \frac{L_1}{W_1} \\ I_3 &= I_{\text{REF}} \frac{W_3}{L_3} \frac{L_1}{W_1} \\ I_4 &= I_3 \\ I_5 &= I_4 \frac{W_5}{L_5} \frac{L_4}{W_4} = I_{\text{REF}} \frac{L_1 L_4 W_3 W_5}{L_3 L_5 W_1 W_4} \end{aligned} \tag{381}$$

Preko čvorova za koje su vezani drejnovi tranzistora T_2 i T_5, strujni izvori (I_2 i I_5) se povezuju sa drugim delovima električnog kola.

10.2 Pojačavač sa dinamičkim opterećenjem

Strujni izvori mogu se korisno upotrebiti za realizaciju pojačavača sa velikim pojačanjem umesto korišćenja otpornika velike otpornosti. Strujni izvori daju konstantnu jednosmernu struju koja se koristi za podešavanje radne tačke tranzistora. Takođe, strujni izvori imaju veliku izlaznu otpornost (teorijski beskonačnu), što ostatak kola vidi kao veliku otpornost, u slučajevima kada se koristi umesto potrošača. Ako je tranzistor koji treba da ostvari pojačanje NMOS tipa, na primer T_1, tada struja strujnog izvora može da dobije iz tranzistora PMOS tipa (T_2), kao što je ilustrovano na slici 10.3. Tranzistor koji realizuje strujno ogledalo kod koga su drejn i gejt kratko spojeni je takođe PMOS tipa (T_3).

Ovakvo kolo pojačavača sa zajedničkim sorsom koje koristi strujni izvor kao dinamičko opterećenje, prikazano je na slici 10.3.



Slika 10.3. Pojačavač sa zajedničkim sorsom i dinamičkim opterećenjem.

Za naponsko pojačanje je već izveden izraz za pojačanje kada je analiziran uprošćeni model pojačavača sa zajedničkim sorsom:

$$A_v \approx -g_m R_D \tag{382}$$

Kako je otpornost idealnog strujnog izvora beskonačna, tada je i naponsko pojačanje beskonačno. Realan strujni izvor ima konačnu otpornost vezanu u paralelu sa idealnim strujnim izvorom. To znači da u modelu za male signale, između drejna i sorsa tranzistora T_1 postoji jedna konačna ali velika otpornost r_{DS1}, a takođe postoji otpornost i između drejna tranzistora T_2 i napajanja velika otpornost r_{DS2}. Kako se u analizi za male signale izvori jednosmernog napona kratko spajaju sa masom, to su ove dve otpornosti paralelno vezane.

$$A_v \approx -g_m(r_{DS1} \| r_{DS2}) = -\frac{V_A}{\sqrt{I_{REF}}}\sqrt{k_n \frac{W_1}{L_1}} \tag{383}$$

U prethodnom izrazu korišćen je napon V_A koji određuje nagib strujno naponske karakteristike (struja drejna u funkciji napona između drejna i sorsa je skoro horizontalna prava). Tipične vrednosti napona V_A su između 30 V i 200 V. Ovakvo kolo sa aktivnim opterećenjem obezbeđuje naponsko pojačanje od 20 do 100.

Sličan postupak se može koristiti i kod pojačavača sa zajedničkim gejtom ili drejnom.

10.3 Diferencijalni pojačavač

U dosadašnjim razmatranjima uvek su analizirani primeri kod kojih je jedan priključak pobudnog izvora bio povezan na masu. U praksi se često događa da ni jedan od priključaka sa kojih se uzima napon da bi bio pojačan nije vezan za masu. Napon na nekom elementu, ili napon između bilo koja dva čvora od kojih ni jedan nije povezan na masu, jednak je razlici potencijala između dva čvora, ili između dva priključka nekog elementa.

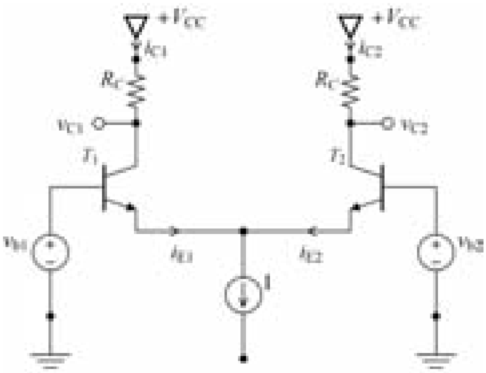
Iako se svaki napon nekog čvora u odnosu na masu može posebno pojačati, a kasnije realizovati razlika dva pojačana napona, pojačavanjem korisnog signala se istovremeno pojačavaju i neželjeni signali kao na primer šum, koje nije lako otkloniti nakon nezavisnih pojačanja.

Da bi se što više pojačao signal koji je nastao između dva čvora (pri čemu ni jedan od čvorova nije povezan na masu), koristi se posebno kolo koje je nazvano diferencijalni pojačavač.

Postoji veliki broj različitih realizacija diferencijalnog pojačavača. Neki od jednostavnijih primera su sa dva tranzistora, dva otpornika i strujnim izvorom. U složenijim verzijama, da bi se ostvarile bolje karakteristike, otpornici koji treba da imaju veliku vrednost zamenjeni su strujnim izvorima.

10.3.1 Diferencijalni pojačavač sa bipolarnim tranzistorima

Najjednostavnije kolo diferencijalnog pojačavača sa bipolarnim tranzistorima prikazano je na slici 10.4.



Slika 10.4. Osnovno kolo diferencijalnog pojačavača sa bipolarnim tranzistorima.

Za kolo na slici 10.4, emitori oba tranzistora su kratko spojena i na njima je isti napon I_E. Sada se mogu napisati jednačine za emitorske struje za oba tranzistora:

$$\begin{aligned} i_{E1} &= I_{ES} e^{(v_{B1}-v_E)/V_T} \\ i_{E2} &= I_{ES} e^{(v_{B2}-v_E)/V_T} \end{aligned} \tag{384}$$

Iz prethodne jednačine treba da se eliminiše napon v_E, kako bi dobili zavisnost baznih struja od pobudnih napona dovedenih na baze tranzistora:

$$\frac{i_{E1}}{i_{E2}} = \frac{I_{ES} e^{(v_{B1}-v_E)/V_T}}{I_{ES} e^{(v_{B2}-v_E)/V_T}} = e^{(v_{B1}-v_{B2})/V_T} \tag{385}$$

Zbir ove dve emitorske struje po prvom Kirhofovom zakonu jednak je struji strujnog izvora:

$$I = i_{E1} + i_{E2} \tag{386}$$

Iz prethodne dve jednačine mogu da se odrede obe emitorske struje. Na primer jedna od jednačina postaje:

$$I = i_{E2} e^{(v_{B1}-v_{B2})/V_T} + i_{E2} = i_{E2}(1 + e^{(v_{B1}-v_{B2})/V_T}) \tag{387}$$

Konačno se dobija za obe struje:

$$\begin{aligned} i_{E2} &= \frac{I}{1 + e^{(v_{B1}-v_{B2})/V_T}} \\ i_{E1} &= \frac{I}{1 + e^{(v_{B2}-v_{B1})/V_T}} \end{aligned} \tag{388}$$

Uvedimo umesto razlike napona na bazama, napon v_d, izraz za kolektorsku struju u funkciji emitorske struje, kao i izraz za zbir kolektorskih struja:

$$\begin{aligned} v_d &= v_{B1} - v_{B2} \\ I_{C1} &= \alpha I_{E1} \\ I_{C2} &= \alpha I_{E2} \\ I_C &= \alpha(I_{E1} + I_{E2}) = \alpha I \end{aligned} \tag{389}$$

Ako je razlika napona na bazama veoma mala, tada se mogu dobiti približni izrazi za kolektorske struje oba tranzistora:

$$I_{C1} = \alpha I + g_m \frac{v_d}{2}$$
$$I_{C2} = \alpha I - g_m \frac{v_d}{2} \tag{390}$$

Naponi na kolektorima tranzistora po Omovom zakonu su jednaki proizvodu struja i otpornosti:

$$v_{C1} = V_{CC} - \alpha R_C I - g_m R_C \frac{v_d}{2}$$
$$v_{C2} = V_{CC} - \alpha R_C I + g_m R_C \frac{v_d}{2} \tag{391}$$

Jedan deo u prethodnim izrazima je funkcija od razlike napona na bazama, a drugi deo zavisi od stalnih izvora. Diferencijalno pojačanje po definiciji je pojačanje razlike napona na bazama (usvojili smo pretpostavku da je razlika napona veoma mala):

$$A_d = \frac{v_{C1} - v_{C2}}{v_d} = -g_m R_C \tag{392}$$

Pojačanje srednje vrednosti definisano je izrazom:

$$A_{\mathrm{CM}} = \frac{v_{C1} - v_{C2}}{\frac{v_{B1} + v_{B2}}{2}} \approx 0 \tag{393}$$

Iz prethodnog izraza sledi da je u slučaju kada je kolo potpuno simetrično i kada su naponi na ulazima jednaki, pojačanje približno jednako nuli.

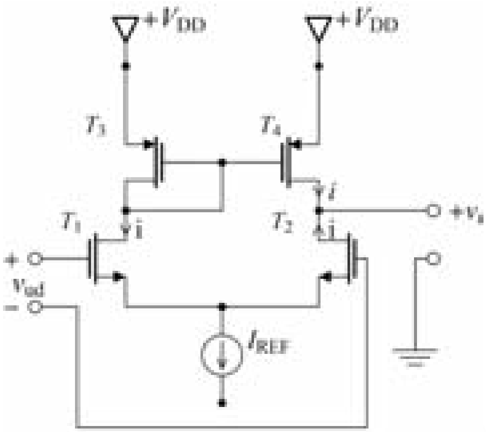
Vrednost izlaznog napona može da se iskaže preko pojačanja:

$$v_i = A_d (v_{B1} - v_{B2}) + A_{\mathrm{CM}} \frac{v_{B1} + v_{B2}}{2} \tag{394}$$

10.3.2 Diferencijalni pojačavač sa MOS tranzistorima

Diferencijalni pojačavač sa MOS tranzistorima može da se realizuje na isti način kao sa bipolarnim tranzistorima. Na slici 10.5 prikazan je diferencijalni pojačavač sa MOS tranzistorima.

Umesto klasične realizacije otpornika u kolu drejna, u integrisanoj tehnici se primenjuje složenija realizacija diferencijalnog pojačavača koja koristi strujne izvore kao dinamička opterećenja kod pojačavačkih tranzistora.



Slika 10.5. Diferencijalni pojačavač sa MOS tranzistorima.

Rad kola diferencijalnog pojačavača sa MOS tranzistorima može se objasniti istim postupkom kao u realizaciji sa bipolarnim tranzistorima. Promenljivi deo izlazne struje dat je izrazom:

$$i = g_m \frac{v_{ud}}{2} \tag{395}$$

Struje drejnova svih tranzistora su iste, a istu vrednost imaju i struje sorsova, zato što su struje gejtova jednake nuli. Po prvom Kirhofovom zakonu, zbir dve struje drejna T_1 i T_2 jednaka je struji strujnog izvora, zbog čega se struja strujnog izvora podjednako deli na oba tranzistora.

Najpre treba da se izračuna transkonduktansa za male signale. U radnoj tački, struje drejnova su:

$$I_D = \frac{I}{2} \tag{396}$$

Transkonduktansa se dobija iz poznate struje drejna i napona u radnoj tački:

$$g_m = \frac{I}{V_{GS} - V_t} \tag{397}$$

Između drejnova tranzistora T_2 i T_4 i mase, u modelu za male signale, nalaze se otpornosti između drejna i mase, a koje su paralelno vezane.

Treba uočiti da su jednosmerne struje drejna tranzistora T_2 i T_4 iste i idu od napajanja V_{DD} do mase, i da je njihov zbir jednak nuli. Struje za male signale se dobijaju kada se, u modelu za male signale, izvor jednosmernog napona kratko spoji na masu, što znači da su sada strujni izvori povezani u isti čvor. Zato je izlazna struja jednaka zbiru struja drejnova u modelu za male signale. Struja za polarizaciju ne prolazi kroz izlazni čvor jer je naredni stepen povezan na gejt tranzistora; zbog toga je jednosmerna struja ka gejtu narednog stepena jednaka nuli.

Zbir struja je zato jednak dvostrukoj vrednosti struje jednog tranzistora, a ekvivalentna otpornost kroz koju teče ova struja jednaka je paralelnoj vezi otpornosti između drejna i sorsa (u modelu za male signale, a u radnoj tački koja je određena ispravnom polarizacijom tranzistora):

$$v_i = 2i\frac{r_{DS2}r_{DS4}}{r_{DS2}+r_{DS4}} \tag{398}$$

Ako iz statičkih karakteristika MOS tranzistora odredimo ove otpornosti, koje su iste za istu vrstu tranzistora, dobija se

$$r_{DS2} = r_{DS4} = r_D = 2\frac{V_A}{I} \tag{399}$$

Napon V_A koji određuje nagib strujno naponske karakteristike (struja drejna u funkciji napona između drejna i sorsa je skoro horizontalna prava) ima tipične vrednosti između 30 V i 200 V. Prethodni izraz pokazuje da otpornost između drejna i sorsa u modelu za male signale zavisi od parametara tranzistora, ali i od struje strujnog generatora (čija vrednost može da se projektuje po potrebi).

Izlazni napon sada može da se odredi sledećom relacijom:

$$\begin{aligned} v_i &= 2i\frac{r_D}{2} = \\ &= ir_D = g_m\frac{v_{ud}}{2}r_D = \\ &= g_m v_{ud}\frac{V_A}{I} \end{aligned} \tag{400}$$

Izlazni napon za model malih signal postaje:

$$v_i = \frac{V_A}{V_{GS}-V_t}v_{ud} \tag{401}$$

Naponsko pojačanje je količnik izlaznog i ulaznog diferencijalnog napona:

$$A_v = \frac{V_A}{V_{GS}-V_t} \tag{402}$$

Naponsko pojačanje koje se ostvaruje sa MOS tranzistorima može da bude od 20 do 100.

10.4 Operacioni pojačavač

Projektovanje pojačavača i drugih elektronskih sklopova postaje veoma složeno ako sadrži veliki broj tranzistora i otpornika. Tržište zahteva komponente koje su jeftine, koje se lako koriste i podešavaju prema potrebama. Sama cena elektronskih komponenti toliko je mala, da se u specifičnim aplikacijama, koje se ne proizvode u velikim serijama, dominantan deo cene određuje rad projektanta i inženjera koji projektuju, asembliraju i održavaju uređaje. Kako složenost elektronske komponente ne utiče u većoj meri na cenu uređaja, to se pojavila potreba da se naprave takve komponente koje ne zahtevaju složene postupke projektovanja i ispitivanja raznih uticaja, kao što su nelinearni efekti i uticaj temperature ambijenta u kojima radi elektronski uređaj.

Jedna od elektronskih komponenti koja se izdvojila kao univerzalni element jeste operacioni pojačavač. Postoje elementi slični operacionim pojačavačima koji su našli veliku primenu u praksi, ali je razumevanje rada ovih pojačavača dovoljno da bi se razumeo princip rada i drugih elektronskih elemenata.

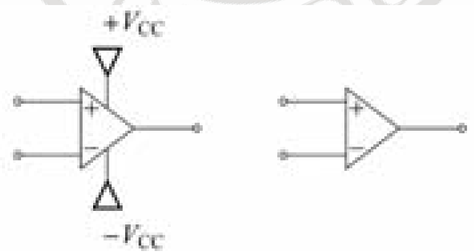
Suština ovih složenih elektronskih komponenti je u tome da se inženjeri prvenstveno bave primenom elektronskih komponenti, i da postupak projektovanja i testiranja rada bude veoma kratak i pouzdan.

Neki od problema koji su uočeni su da pojačavači nemaju dovoljno veliko pojačanje i da pojačanje zavisi od osobina elektronskih komponenti. Da bi se povećalo naponsko pojačanje, pojačavački stepeni mogu da se povezuju na red (koristi se i termin kaskadno povezivanje). Naponsko pojačanja većeg broja kaskadno vezanih pojačavača jednako je proizvodu naponskih pojačanja pojedinačnih. Tako se ostvaruje veoma veliko pojačanje. Pojačavači koji imaju veoma veliko naponsko pojačanje nazivaju se operacioni pojačavači. Termin operacioni je nastao zato što se primenom takvog pojačavača mogu realizovati neke matematičke operacije.

Često se koristi termin idealni operacioni pojačavač. Idealni operacioni pojačavač ima sledeće karakteristike: beskonačno veliko naponsko pojačanje, beskonačno velika ulazna otpornost i veoma mala izlazna otpornost (koja se često usvaja da je jednaka nuli).

Iako u praksi najčešće pobudni izvori promenljivog napona imaju jedan kraj vezan na masu, čest je i slučaj da treba pojačati veoma mali napon između dva čvora od kojih ni jedan nije povezan na masu. Radi univerzalnosti ove elektronske komponente, operacioni pojačavač najčešće ima diferencijalni ulaz, a svakako jedan od ulaza u operacioni pojačavač može biti povezan na masu. Za realizaciju diferencijalnog pojačanja, prvi pojačavački stepen je diferencijalni pojačavač.

Operacioni pojačavači prikazani su na slici 10.6. Simboli kojima se u električnim šemama predstavlja je trougao, pri čemu se po nekada označavaju i priključci za jednosmerno napajanje.



Slika 10.6. Simboli operacionog pojačavača.

Ni jedan operacioni pojačavač ne može da radi ako nema napajanje iz jednosmernog izvora, pre svega zato što se pojačanje ostvaruje na osnovu energije koja se dobija iz jednosmernih izvora. Zato prvi simbol ima oznake i jednosmernih izvora za polarizaciju tranzistora, koji se uobičajeno označavaju sa V_{CC} ili V_{DD}. Iako ovaj simbol ne sadrži simbol mase, podrazumeva se da su jednosmerni izvori povezani sa masom. Čak i u situacijama kada proizvođači operacionih pojačavača navode da je za napajanje dovoljna jedna baterija, treba voditi računa da ulazni signali budu takvi da ne dovedu operacioni pojačavač da radi u režimu zasićenja, što se manifestuje time da je izlazni signal pojačavača na potencijalu pozitivnog ili negativnog napona napajanja, na primer da je izlaz jednak $+V_{CC}$ ili $–V_{CC}$. U takvoj situaciji operacioni pojačavač ne može da pojača mali ulazni napon i izlaz ostaje nepromenjen.

U narednom tekstu i primerima primene se pretpostavlja da operacioni pojačavač radi u linearnom režimu i da je polarizacija svih tranzistora u njemu ispravna. U takvim slučajevima nema potrebe da se i dalje vodi računa o jednosmernim izvorima, jer ni ne utiču na funkciju koju realizuju pojačavači. Zato će se u svim narednim primerima koristiti uprošćen simbol za operacioni pojačavač koji sadrži dva ulazna čvora i jedan izlazni (podrazumeva se da je izlazni napon između nacrtanog izlaznog čvora i mase). Ulazni napon, koji se dovodi na ulazni priključak označen sa +, pojačava se *A* puta (kod idealnog pojačavača smatra se da je *A* beskonačno veliko), a ulazni napon koji se dovodi na ulazni priključak označen sa –, pojačava se –*A* puta.

Ako je jedan od ulaznih krajeva operacionog pojačavača vezan na masu, a na drugi kraj se dovede mali jednosmerni napon, tada će on biti beskonačno pojačan, ali to ne znači da se može dobiti beskonačno velika vrednost napona na izlazu. Najveća vrednost napona na izlazu jednaka je naponu napajanja $+V_{CC}$ (kada se na + ulaz dovede mali pozitivni napon ili kada se na – ulaz dovede mali negativan napon), a najmanja je $–V_{CC}$ (kada se na – ulaz dovede mali pozitivni napon ili kada se na + ulaz dovede mali negativan napon).

Da idealni operacioni pojačavač ne bi bio u zasićenju, a to znači da izlazni napon ne bi bio $+V_{CC}$ ili $–V_{CC}$, napon između ulaznih krajeva mora biti jednak nuli. Kako je ulazna otpornost beskonačno velika, bez obzira koliki je napon između ulaznih krajeva, ulazna struja je jednaka nuli.

Ova osobina je od posebnog značaja za operacione pojačavače jer omogućava jednostavno projektovanje. Na primer, ako je jedan od ulaznih krajeva na nuli, tada je i drugi kraj na nuli (da ne bi bio u zasićenju i da bi radio u linearnom režimu). To ne znači da su ulazni krajevi kratko spojeni (jer je između njih beskonačno velika otpornost). Ulazni priključak koji nije direktno vezan na masu a nalazi se na potencijalu mase (napon je i na njemu jednak nuli) naziva se virtuelna masa.

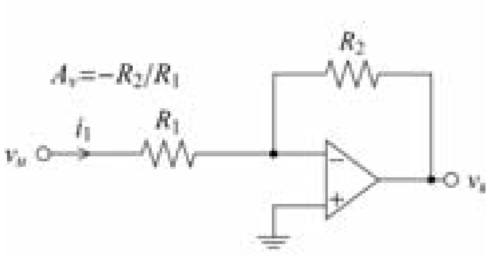
Realni operacioni pojačavači nemaju beskonačno pojačanje, što znači da može postojati i mali napon između ulaznih priključaka. U nekim situacijama je neophodno da se projektovanje uradi sa realnim operacionim pojačavačem, a konačne vrednosti se dobijaju nalaženjem limesa, kada pojačanje teži beskonačnosti (jednostavnije je da se u izrazima koristi recipročna vrednost pojačanja, što dozvoljava da se umesto limesa kada pojačanje teži beskonačno velikoj vrednosti, recipročna vrednost pojačanja zameni nulom u konačnoj relaciji).

10.5 Primene operacionog pojačavača

Operacioni pojačavač je najčešće korišćena integrisana komponenta u analognoj elektronici. Operacionim pojačavačem mogu da se realizuju aritmetičke operacije, a postoje i kola koja rade kao integratori i diferencijatori.

10.5.1 Invertorski pojačavač

Najjednostavniji pojačavač koji zahteva korišćenje dva otpornika i jedan operacioni pojačavač prikazan je na slici 10.7.



Slika 10.7. Invertorski pojačavač.

Da bi pojačavač radio u linearnom režimu rada, a kako je + priključak vezan na masu, to i – priključak ima potencijal mase (napon mase je 0V). Struja kroz otpornik R_1 određena je Omovim zakonom, kao količnik napona na otporniku i otpornosti otpornika:

$$i_1 = \frac{v_u}{R_1} \tag{403}$$

Struja ne može da teče u pojačavač preko – priključka, zato što je ulazna otpornost pojačavača beskonačno velika; na osnovu prvog Kirhofovog zakona struja jedino može da teče kroz otpornik čija je otpornost R_2. Izlazni napon može da se odredi po drugom Kirhofovom zakonu i on je jednak negativnoj vrednosti struje kroz otpornik R_2 (izlazni napon se zatvara u petlji preko napona na R_2 i virtuelne mase negativnog priključka operacionog pojačavača do mase na koju je vezan drugi kraj izlaznog napona) i daje izlazni napon:

$$v_i = -R_2 i_1 = -\frac{R_2}{R_1} v_u \tag{404}$$

Znak minus u pojačanju je posledica smera struje ka izlaznom priključku.

Naponsko pojačanje se dobija kao količnik izlaznog i ulaznog napona:

$$A_v = \frac{v_i}{v_u} = -\frac{R_2}{R_1} \tag{405}$$

Naponsko pojačanje je negativno i određeno je odnosom dve otpornosti. Zahvaljujući tome što se vrednosti otpornosti mogu precizno realizovati u uskim tolerancijama i naponsko pojačanje može biti veoma precizno realizovano. Tolerancije otpornosti su tipično od 1% do 10%, ali mogu biti i manje od 0,1%. Tolerancije transkonduktansi aktivnih komponenti mogu biti oko 30%.

Zbog toga što je naponsko pojačanje negativno, izlazni napon će imati suprotan znak u odnosu na ulazni napon, što je razlog da se ovo kolo naziva invertorski pojačavač. Kada je pobuda sinusoidalni napon, izlazni napon je takođe sinusoidalan napon, ali fazno pomeren za 180^{o} u odnosu na ulazni napon.

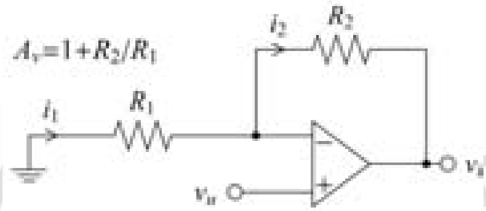
Treba uočiti da je ulazna otpornost invertorskog pojačavača jednaka otpornosti R_1. Zato što se otpornost izvora i ulazna otpornost R_1 ponašaju kao razdelnik napona, dobija se manje pojačanje za slučaj realnog generatora promenljivog ulaznog napona. Da bi se umanjio uticaj otpornosti izvora na pojačanje, potrebno je da je R_1 znatno veče od otpornost izvora.

Iako se kolo sa slike 10.7 naziva pojačavač, treba zapaziti da je amplituda izlaznog napona manja od amplitude ulaznog napona ako je R_1 veće od R_2. Kada su obe otpornosti iste, $R_1=R_2$, pojačanje ima vrednost 1.

Za integrisanu tehnologiju je važno napomenuti da apsolutne vrednosti mogu imati velike tolerancije, na primer reda 30%. Međutim, relativna greška može biti manja od 0,1%, što znači da je pojačanje veoma precizno ako se otpornici realizuju i integrisanoj tehnologiji (na primer ako je vrednost jedne otpornosti veća za 20%, tada je i vrednost druge otpornosti veća za 20%, ali je količnik sa greškom manjom od 0,1%).

10.5.2 Neinvertorski pojačavač

Pojačavač koji realizuje pozitivno pojačanje naziva se neinvertorski pojačavač. Realizacija sa jednim operacionim pojačavačem i dva otpornika prikazana je na slici 10.8.



Slika 10.8. Neinvertorski pojačavač.

Ulazni napon, koji treba da se pojača, dovodi se na pozitivan priključak operacionog pojačavača. Obzirom da ulazni priključak ima beskonačnu ulaznu otpornost, struja ulaznog izvora je jednaka nuli, a napon na priključku je isti kao i onaj koji daje naponski izvor.

Da bi operacioni pojačavač radio u linearnom režimu rada, napon između njegovih ulaznih priključaka mora da bude jednak nuli. U ovom slučaju na oba priključka postoji napon jednak pobudnom izvoru, zbog čega ulazni priključci nisu na takozvanoj virtuelnoj masi.

Otpornik čija je otpornost R_1 jednim krajem je povezan na masu, a na drugom priključku je napon ulaznog izvora. Struja se dobija Omovim zakonom (za usvojene smerove struja i polaritet napona dobija se da je struja negativna):

$$i_1 = -\frac{v_u}{R_1} \tag{406}$$

Struja i_1 po prvom Kirhofovom zakonu mora da bude jednaka struji i_2, zato što je struja koja ulazi u – ulazni kraj pojačavača jednaka nuli (zbog beskonačne ulazne otpornosti)

$$i_2 = -\frac{v_u}{R_1} \tag{407}$$

Po drugom Kirhofovom zakonu se dobija relacija koja sadrži izlazni napon:

$$v_i = -R_2 i_2 + v_u = R_2 \frac{v_u}{R_1} + v_u = v_u \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \tag{408}$$

Naponsko pojačanje se dobija kao količnik izlaznog i ulaznog napona:

$$A_v = \frac{v_i}{v_u} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \qquad (409)$$

Naponsko pojačanje je pozitivno i veće od jedinice. Ako treba da se ostvari pojačanje manje od 1, tada se na pozitivan priključak dovede ulazni napon preko razdelnika napona.

U slučaju sinusoidalne pobude, neinvertujući pojačavač ne obrće fazu, što je razlog za naziv ovog kola.

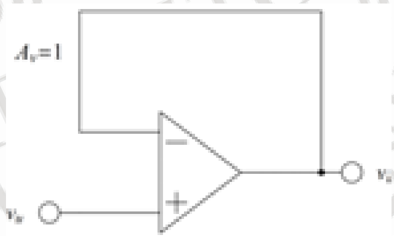
Važna karakteristika ovog pojačavača jeste da je ulazna otpornost ovog kola veoma velika.

10.5.3 Jedinični pojačavač

Najjednostavniji pojačavač je jedinični pojačavač koji ne zahteva ni jednu drugu komponentu osim operacionog pojačavača.

Jedinični pojačavač je specijalni slučaj neinvertorskog pojačavača. Ako se raskine kolo gde je R_1, tada je pojačanje jednako jedinici. Obzirom da kroz R_2 ne teče struja, ova otpornost može da bude jednaka nuli, R_2=0, odnosno otpornik R_2 može da bude kratko spojen.

Jedinični pojačavač je prikazan na slici 10.9. Jedinični pojačavač ima najveću primenu kao razdvojni stepen (bafer). Osim što ima jedinično pojačanje, jedinični pojačavač ima veliku ulaznu otpornost i malu izlaznu otpornost. Time se potpuno eliminiše uticaj prethodnog kola na naredno, i narednog kola na prethodno.

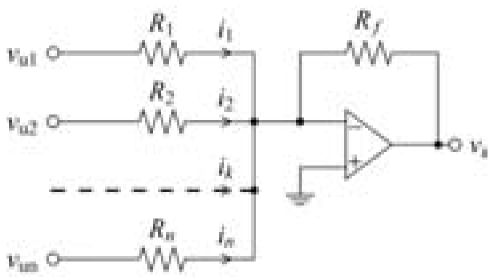


Slika 10.9. Jedinični pojačavač.

Iako se – ulaz pojačavača može kratko spojiti sa izlazom, ništa se neće promeniti, ako je umesto kratkog spoja ipak neka otpornost. Obzirom da je struja jednaka nuli, napon između izlaza i – ulaza je takođe jednak nuli čak i kada je povezan neki otpornik.

10.5.4 Kolo za sabiranje

Kolo za sabiranje koje se najčešće koristi bazirano je na invertorskom pojačavaču i prikazano je na slici 10.10.



Slika 10.10. Kolo za sabiranje.

Kolo za sabiranje mora da ima veći broj ulaznih priključaka, po jedan za svaki napon koji treba da se pojavi u zbiru na izlazu. Kako je kod invertorskog pojačavača jedan kraj otpornika preko koga se vrši sabiranje povezan na virtuelnu masu, to znači da veći broj priključaka neće imati uticaja na rad drugih ulaznih signala.

Za kolo sa slike 10.10 mogu da se napišu struje kroz otpornike na ulaznoj strani:

$$\begin{aligned} i_1 &= -\frac{v_{u1}}{R_1} \\ i_2 &= -\frac{v_{u2}}{R_2} \\ &\cdots \\ i_n &= -\frac{v_{un}}{R_n} \end{aligned} \tag{410}$$

Svaka od ulaznih struja određena je isključivo naponom koji je doveden na priključni kraj otpornika i vrednošću otpornika.

Na osnovu prvog Kirhofovog zakona za čvor kod – priključka operacionog pojačavača, dobija se da struja koja kroz otpornik R_f ide do izlaza operacionog pojačavača mora da bude jednaka zbiru svih ovih struja:

$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_n = -\frac{v_{u1}}{R_1} - \frac{v_{u2}}{R_2} - \cdots - \frac{v_{un}}{R_n} \tag{411}$$

Na osnovu drugog Kirhofovog zakona, napon na izlazu je jednak naponu na otporniku R_f jer je drugi kraj ovog otpornika na masi:

$$v_i = R_f\,(i_1 + i_2 + \cdots + i_n) = -\frac{R_f}{R_1} v_{u1} - \frac{R_f}{R_2} v_{u2} - \cdots - \frac{R_f}{R_n} v_{un} \tag{412}$$

Ako svi ulazni otpornici imaju istu vrednost, na primer R, tada se svi naponi sabiraju i množe sa konstantom:

$$v_i = -\frac{R_f}{R}\left(v_{u1} + v_{u2} + \cdots + v_{un}\right) \tag{413}$$

Kada i otpornik koji je povezan na izlaz operacionog pojačavača ima istu vrednost kao ulazni otpornici, tada je izlazni napon jednak zbiru ulaznih napona, ali sa negativnim predznakom:

$$v_i = -\left(v_{u1} + v_{u2} + \cdots + v_{un}\right) \tag{414}$$

Matematički zapisan izraz preko sume daje kompaktniju formu:

$$v_i = -\sum_{k=1}^{n} v_{uik} \tag{415}$$

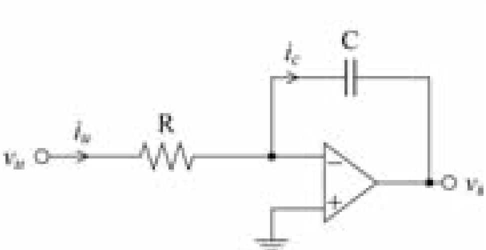
Analiza kola može da se uradi i bez postavljanja jednačina. Struje kroz ulazne grane su određene isključivo ulaznim naponima i otpornošću otpornika kroz koji teku, jer su drugi krajevi povezani na virtuelnu masu. Struje ne mogu da idu od virtuelne mase ka nekom drugom ulaznom izvoru zato što su sve struje određene svojim ulaznim naponima. Stoga struje mogu da idu samo kroz otpornik koji je povezan na izlaz operacionog pojačavača.

Iako je najjednostavnije kolo sa identičnim otpornicima, u praksi se često koriste i različite vrednosti otpornosti, gde količnik otpornosti R_f i ulaznih otpornosti ima zadatak da realizuje različite težinske faktore (na primer kod analogno-digitalnog konvertora).

10.5.5 Kolo za integraljenje

Kola sa operacionim pojačavačima mogu da sadrže i druge elemente a ne samo otpornike, na primer mogu da sadrže i kondenzatore i kalemove. Umesto jednostavnih elemenata, mogu da se koriste i složenija kola sastavljena od različitih kombinacija pasivnih elemenata. U integrisanoj tehnologiji, kondenzatori mogu jednostavno da se realizuju na silicijumskoj pločici, ali je realizacija kalemova toliko komplikovana da se praktično ne koriste u uređajima koji rade na niskim učestanostima (učestanosti govornog područja).

Jedan primer čestog korišćenja jeste kolo za integraljenje, a koje je ilustrovano na slici 10.11.



Slika 10.11. Kolo za integraljenje.

Kolo je identično kao i kod invertujućeg pojačavača. Kondenzator se ponaša kao otvoreno kolo za jednosmerni signal. Zbog toga, za malu vrednost ulaznog signala, izlaz operacionog pojačavača veoma brzo može da dođe u zasićenje, i na izlazu operacionog pojačavača bi bila vrednost pozitivnog ili negativnog napajanja. Zbog toga, srednja vrednost ulaznog signala mora da bude jednaka nuli, da tranzistor ne bi ušao u režim zasićenja.

Ulazna struja je određena ulaznim naponom i otpornošću ulaznog otpornika:

$$i_u(t) = \frac{v_u(t)}{R} \tag{416}$$

U ovim izrazima se označava da su naponi i struje promenljive, jer za jednosmernu komponentu ulaznog napona ovo kolo ne bi radilo u linearnom režimu.

Ulazna struja protiče kroz kondenzator zato što je ulazna otpornost operacionog pojačavača veoma velika. Struja ide kroz kondenzator i zatvara se ka masi preko izlaznog priključka operacionog pojačavača:

$$i_C(t) = i_u(t) = \frac{v_u(t)}{R} \tag{417}$$

Napon na kondenzatoru je određen diferencijalnom relacijom koja povezuje struju kroz kondenzator i napon na kondenzatoru:

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} \tag{418}$$

Izjednačavanjem desnih strana prethodna dva izraza, i integraljenjem obe strane, dobija se:

$$v_C(t) = \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} v_u(t)\,\mathrm{d}t \tag{419}$$

Prethodni izraz tačno opisuje napon na krajevima kondenzatora, ako se posmatra striktno matematički, ali praktično nije moguće integraliti signale jer vrednosti pre veoma dugo vremena nisu poznate. Kod analize promenljivih struja, pretpostavi se da je poznata vrednost napona na kondenzatoru u jednom trenutku, tako da se integraljenje vrši od tog trenutka. Sada se izraz za napon može napisati u sledećem obliku:

$$v_C(t) = v_C(t_0) + \frac{1}{RC}\int_{t=t_0}^{t} v_u(t)\,\mathrm{d}t \tag{420}$$

Trenutak t_0 možemo da izaberemo kako je najprikladnije da se mogu izračunati vrednosti napona u kolu.

Polaritet napona na kondenzatoru je usvojen tako da je viši potencijal na virtuelnoj masi, zbog čega je izlazni napon jednak negativnoj vrednosti napona na kondenzatoru:

$$v_i(t) = -v_C(t) = -v_C(t_0) - \frac{1}{RC}\int_{t=t_0}^{t} v_u(t)\,\mathrm{d}t \tag{421}$$

Iz prethodnog izraza proizilazi da je izlazni napon srazmeran integralu ulaznog napona. Zato se ovo kolo naziva kolo za integraljenje, a zbog znaka minus se naziva invertujući integrator. U stručnoj literaturi se koristi i naziv Milerov integrator.

U praksi se sa ovakvim integratorom povezuju prekidači koji u jednom vremenskom intervalu kratko spajaju krajeve kondenzatora preko kojih se on isprazni. Nakon raskidanja kratkog spoja, akumulirani napon na kondenzatoru je jedna nuli, tako da je izlazni napon srazmeran samo integralu ulaznog napona. Takođe, prekidačima se periodično kratko spajaju krajevi kondenzatora, čime se sprečava da izlazni napon dostigne vrednost napona napajanja, i uđe u zasićenje.

Kada se analiziraju naizmenični naponi i struje, gde se pretpostavlja da svi naponi i struje imaju istu učestanost, tada je jednostavnije da se koristi fazorski račun. U ovim slučajevima se kaže da se analiza radi u frekvencijskom domenu, a radi opštosti se koristi simbolička vrednost za učestanost *f*, ili kružna učestanost ω. Stvarne vrednosti se dobijaju kada se zamene brojne vrednosti, a na osnovu fazorskog predstavljanja, uvek se može preći u vremenski domen i tada se mogu napisati izrazu preko sinusoidalnih funkcija.

Svi izrazi koji slede identični su sa izrazima kao sa promenljivim strujama u vremenskom domenu, osim što se sada koristi fazorsko predstavljanje, koje sadrži informaciju o amplitudi (ili o efektivnoj vrednosti) i fazi, a sve veličine (naponi, struje) se predstavljaju kompleksnim brojevima. Ulazna struja zavisi od ulaznog napona i ulazne otpornosti:

$$\mathbf{I}_u = \frac{\mathbf{V}_u}{R} \tag{422}$$

U ovoj analizi ne treba da se vodi računa o jednosmernoj komponenti, zato što se pretpostavlja da kolo radi u linearnom režimu rada (inače ova analiza ne važi ako postoje nelinearni efekti).

Ulazna struja protiče kroz kondenzator, zato što je ulazna impedansa operacionog pojačavača veoma velika. Struja ide kroz kondenzator i zatvara se ka masi preko izlaznog priključka operacionog pojačavača:

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_u = \frac{\mathbf{V}_u}{R} \tag{423}$$

Da bi se odredio napon na kondenzatoru, koristi se izraz za impedansu kondenzatora:

$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} \tag{424}$$

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{Z}_C\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{Z}_C}{R}\mathbf{V}_u = \frac{1}{j\omega RC}\mathbf{V}_u = -j\frac{1}{\omega RC}\mathbf{V}_u \tag{425}$$

Treba se podsetiti da su naponi i struje fazori i da se uvek mogu predstaviti u vremenskom domenu preko sinusoidalnih funkcija, gde se amplituda i faza sinusoide određuju iz fazorske predstave. Impedanse i admitanse su konstante (posmatrajući po vremenu) i to su kompleksni brojevi koji utiču na amplitude i faze napona i struja, ali se ne mogu predstaviti u vremenskom domenu preko sinusoidalnih funkcija.

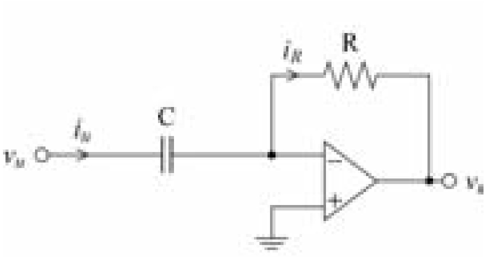
Polaritet napona na kondenzatoru je usvojen tako da je viši potencijal na virtuelnoj masi, i zbog toga je izlazni napon jednak negativnoj vrednosti napona na kondenzatoru:

$$\mathbf{V}_i = -\mathbf{V}_C = j\frac{1}{\omega RC}\mathbf{V}_u \tag{426}$$

Na osnovu prethodnog izraza se može zaključiti da idealni integrator unosi fazni pomeraj od 90^o.

10.5.6 Kolo za diferenciranje

Još jedan primer jednostavnog kola sa operacionim pojačavačima dat je na slici 10.12. Ovakvo kolo se naziva kolo za diferenciranje.



Slika 10.12. Kolo za diferenciranje.

Osnova ovog kola je invertorski pojačavač.

Ulazna struja ide kroz kondenzator od ulaznog napona do virtuelne mase. Napon na kondenzatoru je određen diferencijalnom relacijom koja povezuje struju kroz kondenzator i napon na kondenzatoru (u ovom slučaju napon na kondenzatoru je jednak ulaznom naponu, a struja kroz kondenzator je istovremeno i ulazna struja):

$$i_u(t) = C\frac{\mathrm{d}v_u(t)}{\mathrm{d}t} \tag{427}$$

Ulazna struja dolazi do čvora koji je na virtuelnoj masi, a zatim teče kroz otpornik *R* (zato što je ulazna otpornost idealnog operacionog pojačavača beskonačno velika).

$$i_R(t) = i_u(t) = C\frac{\mathrm{d}v_u(t)}{\mathrm{d}t} \tag{428}$$

Ovde treba uočiti da kroz kondenzator ne može da teče jednosmerna struja, što znači da ako je ulazni napon jednosmeran, tada se kondenzator ponaša kao otvorena veza. Ostatak kola se ponaša kao jedinični pojačavač kod koga je na + ulazu dovedena masa (0 V), zbog čega je i izlazni napon jednak nuli. Kod ovakvog kola ne može doći do zasićenja operacionog pojačavača, ako je promenljiv ulazni napon jednak nuli.

Napon na otporniku *R* se dobija korišćenjem Omovog zakona kao proizvod struje kroz otpornik i otpornost *R*:

$$u_R(t) = Ri_R(t) = RC\frac{\mathrm{d}v_u(t)}{\mathrm{d}t} \tag{429}$$

Izlazni napon je jednak negativnoj vrednosti napona na otporniku, zato što je usvojen smer struje kroz otpornik *R* od virtuelne mase ka izlazu operacionog pojačavača:

$$u_i(t) = -u_R(t) = -RC\frac{\mathrm{d}v_u(t)}{\mathrm{d}t} \tag{430}$$

Izlazni napon srazmeran je prvom izvodu ulaznog napona. Zbog toga se ovo kolo naziva kolo za diferenciranje, a zbog znaka minus naziva se invertujući diferencijator.

Isto kolo može se posmatrati i u frekvencijskom domenu, ako je pobuda sinusoidalna. Fazor ulazne struje dat je količnikom napona i impedanse kondenzatora:

$$\mathbf{I}_u = \frac{\mathbf{V}_u}{\mathbf{Z}_C} \tag{431}$$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} \tag{432}$$

Iz prethodna dva izraza se dobija fazor ulazne struje:

$$\mathbf{I}_u = j\omega C\mathbf{V}_u \tag{433}$$

Struja kroz otpornik ista je kao i ulazna struja (prvi Kirhofov zakon):

$$\mathbf{I}_R = \mathbf{I}_C = j\omega C\mathbf{V}_u \tag{434}$$

Fazor izlaznog napona dobija se kao napon na otporniku *R*, koji je po Omovom zakonu jednak proizvodu struje kroz otpornik i otpornosti *R*. Znak minus je posledica toga da je pozitivan napon na otporniku na virtuelnoj masi, a pozitivan polaritet izlaznog napona je na izlazu iz operacionog pojačavača:

$$\mathbf{V}_i = -\mathbf{V}_R = R\mathbf{I}_R = -j\omega CR\mathbf{V}_u \tag{435}$$

Na osnovu prethodnog izraza se može zaključiti da idealni diferencijator unosi fazni pomeraj od -90^o.

Rešavanje kola, a to znači nalaženje izlaznog napona i struje aktivnog kola, za naizmenične signale, jednostavnije je primenom fazora, jer nije potrebno da se rešavaju diferencijalne jednačine da bi se dobio izraz u vremenskom domenu. Nakon dobijanja izraza u kompleksnom domenu, prelaskom u vremenski domen se dobija odziv ustaljenog režima rada linearnih kola.

11 Digitalna elektronska kola

Digitalna elektronska kola su najčešće korišćena kola koja se koriste u računarstvu, uređajima za komunikacije, upravljanja i instrumentaciju, kao i u uređajima za domaćinstvo. Razlozi masovne primene su pre svega zbog mogućnosti realizacije vrlo složenih algoritama u integrisanoj tehnologiji, pri čemu je cena značajno niža u odnosu na analogna elektronska kola. Iako danas postoje i analogna programabilna kola, digitalna programabilna kola, mikroprocesori, mikrokontroleri i procesori signala su stvorili takvo tržište da se i školovanje kadrova u oblasti elektrotehnike uglavnom usmerilo na softversko inženjerstvo.

Suština ovog poglavlja jeste da obezbedi osnovne pojmove iz oblasti digitalne elektronike, iako će se studenti sa mnogim terminima i srodnim znanjima sresti i u drugim predmetima, kao što su osnovi računarske tehnike.

Da bi se mogao pratiti brzi razvoj elektrotehnike, gde sve više postoje usmerenja iz oblasti programiranja, potrebno je imati osnovno razumevanje funkcionisanja električnih kola koja se koriste u digitalnoj elektronici. U ovom poglavlju su date osnovne karakteristike digitalnih kola i njihovu primenu.

11.1 Analogni i digitalni signali i kola

Analogni signal je signal koji se kontinualno menja u vremenu i koji ima kontinualno promenljivu amplitudu (amplituda je trenutna vrednost signala i u tom smislu se razlikuje od amplitude sinusoidalnog signala). Svi signali koji postoje u prirodi su analogni signali. Sva kola na čiji se ulaz dovodi analogni signal i na izlazu se takođe dobija analogni signal, nazivaju se analogna kola (na primer to su operacioni pojačavači, sinusoidalni oscilatori i aktivni filtri).

U teoriji koja se bavi analizom električnih kola, koristi se matematički aparat koji često koristi signale koji imaju naglu promenu vrednosti u nekom trenutku. Iako se to ne dešava sa realnim signalima, svaka nagla promena je u stvari brza ali kontinualna promena amplitude. Korišćenje matematičkih funkcija koje imaju naglu promenu vrednosti u pojedinim vremenskim trenucima značajno olakšavaju izračunavanje ali ne utiče na suštinu i razumevanje pojava. Precizno izračunavanje nema praktičnu svrhu zato što su sve komponente koje se koriste sa tolerancijama oko nominalnih, a često i greška koja se akumulira pri izračunavanjima može da bude značajno veća od aproksimacija modela koji se koriste u analizi. Signali koji mogu da imaju skokovite promene vrednosti, ali su definisani u svakom trenutku, nazivaju se kontinualni signali (misli se kontinualni po vremenu).

Osnovni nedostatak analognog signala je taj da kada se neželjene pojave ugrade u korisni signal, kao na primer šum, tada je praktično nemoguće odstraniti njihov neželjeni uticaj. Računarski i telekomunikacioni sistemi treba da budu robusni i da imaju mogućnost regenerisanja originalne informacije, čak i kada signal sadrži značajne neželjene komponente.

Digitalizacija signala po vremenu (vremenski diskretni sistemi) podrazumeva da znamo vrednosti signala samo u nekim trenucima, ali tako da te vrednosti sadrže sve informacije koje signal u sebi sadrži. Ako se dozvoli da i amplituda signala ima samo diskretne vrednosti iz određenog skupa vrednosti, tada se takav signal naziva digitalni. Svi signali koje čuvamo u računarima ili ih prenosimo preko Interneta su digitalni signali.

Diskretizacijom signala po vremenu i amplitudi unete su greške u odnosu na originalan signal. Kako ne postoji način da se signal prenese ili čuva, a da se korisnom signalu ne doda greška (na primer šum kod analognih signala ili šum usled diskretizacije), ostaje da se kod projektovanja vodi računa da diskretizacija ne unese veću grešku nego što bi to bilo sa analognim signalom. Na primer, digitalizacija televizije obezbeđuje mnogo bolji signal i verniju reprodukciju slike i tona nego klasični analogni sistemi.

Ovde treba skrenuti pažnju da se sinusoidalni signali mogu prenositi i kao diskretni, tako što bi se prenosila informacija o amplitudi, fazi u nekom trenutku (kao u fazorskom predstavljanju kod naizmeničnih struja) i kada je bio trenutak određivanja početne faze. Na mestu prijema informacije, ova tri diskretna podataka (amplituda, faza i referentni trenutak) mogu se iskoristiti da se ponovo generiše analogni signal. Međutim, informacija ima smisla samo ako sadrži nešto što nije poznato na mestu prijema, nešto što se menja (promena amplitude ili faze nekog sinusoidalnog signala). Signali sa poznatim osobinama u svakom trenutku (deterministički signali, na primer sinusoidalan signal) koji se koristi u ovom i mnogim drugim stručnim knjigama, služe samo da bi razumeli kako rade električna kola, ili kakav signal možemo da očekujemo na mestu prijema.

Ako znamo kako rade električna kola, razumećemo bolje kada je vrednost signala takva da sa velikom verovatnoćom izdvojimo informaciju koja se prenosi. Na primer, iako se za binarne signale kaže da imaju dve vrednosti, jedan ili nula, tokom prenosa signala, pri prelasku sa jedne vrednosti na drugu, postoji period vrednosti kada digitalna kola mogu da donesu pogrešnu odluku koja je vrednost primljena. Stoga postoje dve pojave koje su važne u digitalnoj elektronici, a to je koji nivoi se sigurno mogu prepoznati kada se prime u nekom uređaju i koji je trenutak najbolji da se donosi odluka o vrednosti primljenog signala.

U analizi koja sledi, najpre će biti analizirane idealne funkcije, a zatim i rad u realnim uslovima.

11.2 Logičke funkcije, Bulova algebra i logička kola

Binarni digitalni signali se predstavljaju sa dva naponska nivoa u električnim kolima, odnosno dva logička stanja ako se posmatra matematički. Ako električna kola rade sa napajanjem 0 i +5V, tada je uobičajeno da naponu 0V odgovara logičko stanje 0, a da je napon +5V logička vrednost 1. Ako je napajanje 3,3V, tada logička jedinica odgovara ovom naponu od 3,3V. Naravno, naponi koji dolaze na logička digitalna kola mogu da odstupaju od ovih vrednosti, a proizvođači elektronskih komponenti daju koje su to vrednosti kada ova kola još uvek ispravno rade. U telekomunikacijama, logička nula i jedinica mogu da se predstavljaju sa dve različite učestanosti sinusoidalnog signala.

Operacije koje se izvode sa logičkim kolima nazivaju se logičke operacije ili logičke funkcije. Umesto logičke nule i logičke jedinice, često se koriste termini kao što je pogrešno za (0) i tačno za (1). Matematičar Džordž Bul dao je veliki doprinos u formulisanju zakona logičkog rasuđivanja a uveo je i prekidačku algebru (koja se po njemu naziva Bulova algebru). Iskazi tačno i pogrešno u Bulovoj algebri se predstavljaju ciframa 0 i 1, koje se još nazivaju i logička nula i logička jedinica.

Tri osnovne operacije u Bulovoj algebri označavaju se posebnim simbolima:

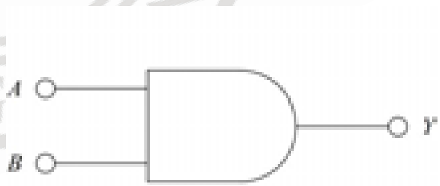
- I operacija (engl. AND) označava se simbolima ”•”, ”▯ ”, ”And”, ”&”, ”&&”.
- ILI operacija (engl. OR), označava se simbolom ”+”, ”▯ ”, ”Or”, ”|”, ”||”.
- NE operacija (engl. NOT) ili komplementiranje, označava se crticom iznad simbola promenljive, ili simbolima ”+”, ”¬”, ”!” .

I i ILI operacije zahtevaju dve promenljive. NE operacija je unarna i zahteva samo jednu promenljivu.

11.2.1 I kolo za realizaciju logičkog množenja

Posmatrajmo dve logičke promenljive *A* i *B*. Na slici 11.1. prikazan je rezultat I operacije kombinacionom tablicom (gde su dve promenljive *A* i *B* argument logičke I funkcije). Na istoj slici je ilustrovan najčešće korišćeni grafički simbol koji predstavlja logičko kolo za realizaciju I operacije (promenljive *A* i *B* su ulazi u logičko kolo, a *Y* je izlaz logičkog kola).

2 ulaza		1 izlaz
A	*B*	*Y=A•B*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



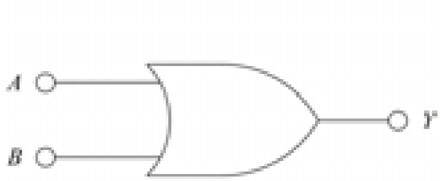
Slika 11.1. Kombinaciona tablica i grafički simbol za I operaciju.

Kolo koje realizuje I operaciju naziva se I ili AND kolo. Izlaz I logičkog kola je jednak logičkoj jedinici samo ako su oba ulaza takođe logičke jedinice. I operacija se naziva još i logičko množenje ili konjunkcija.

11.2.2 ILI kolo za realizaciju logičkog sabiranja

Posmatrajmo ponovo dve logičke promenljive *A* i *B*. Na slici 11.2. prikazan je rezultat ILI operacije kombinacionom tablicom (gde su dve promenljive *A* i *B* argument logičke ILI funkcije). Na istoj slici je ilustrovan najčešće korišćeni grafički simbol koji predstavlja logičko kolo za realizaciju ILI operacije (promenljive *A* i *B* su ulazi u logičko kolo, a *Y* je izlaz logičkog kola).

2 ulaza		1 izlaz
A	*B*	*Y*=*A*+*B*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



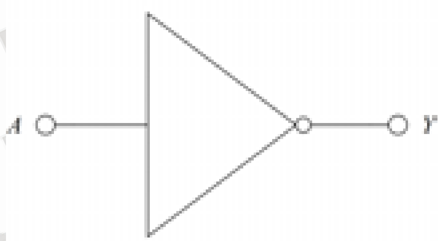
Slika 11.2. Kombinaciona tablica i grafički simbol za ILI operaciju.

Kolo koje realizuje ILI operaciju naziva se ILI ili OR kolo. Izlaz ILI logičkog kola je jednak logičkoj nuli samo ako su oba ulaza takođe logičke nule. ILI operacija naziva se još i logičko sabiranje ili disjunkcija.

11.2.3 NE kolo za realizaciju komplementiranja

Na slici 11.3. prikazan je rezultat NE operacije kombinacionom tablicom (gde je jedina promenljiva *A* argument logičke NE funkcije). Na istoj slici je ilustrovan najčešće korišćeni grafički simbol za predstavljanje NE logičkog kola (gde je promenljiva *A* ulaz u logičko kolo, a promenljiva *Y* izlaz logičkog kolo). Kružić na izlazu pokazuje da je vrednost invertovana u odnosu na kolo koje ne bi imalo kružić.

1 ulaz	1 izlaz
A	*Y*=¬*A*
0	1
1	0



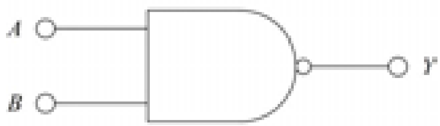
Slika 11.3. Kombinaciona tablica i grafički simbol za NE operaciju.

Kolo koje realizuje NE operaciju naziva se NE kolo, NOT kolo ili invertor. Izlaz NE logičkog kola jeste suprotna logička vrednost od one koja je na ulazu u logičko kolo. Zato se NE operacija naziva i komplementiranje ili negacija.

11.2.4 NI kolo

NI operacija se dobija kombinacijom I i NE operacije. Za dve logičke promenljive *A* i *B*, na slici 11.4. prikazan je rezultat NI operacije kombinacionom tablicom (gde su dve promenljive *A* i *B* argument logičke NI funkcije). Na istoj slici je ilustrovan najčešće korišćeni grafički simbol za predstavljanje NI logičkog kola (promenljive *A* i *B* su ulazi u logičko kolo, a *Y* je izlaz logičkog kola). Kružić na izlazu pokazuje da je vrednost invertovana u odnosu na kolo koje ne bi imalo ovaj kružić.

2 ulaza		1 izlaz
A	*B*	*Y*=¬(*A*•*B*)
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Slika 11.4. Kombinaciona tablica i grafički simbol za NI operaciju.

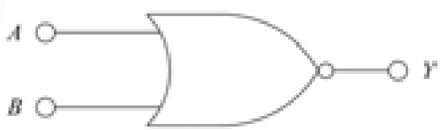
Kolo koje realizuje NI operaciju naziva se NI ili NAND kolo. Kolo koje realizuje NI operaciju na izlazu daje logičku nulu samo kada su na oba ulaza logičke jedinice.

Ako se ulazi NI kola kratko spoje, tada NI kolo realizuje NE operaciju. Pomoću NI kola može da se realizuje NE operacija (kratkim spajanjem ulaza), ali i I operacija tako što se posle NI kola poveže još jedno NI kolo koje ima kratko spojene ulaze. Pomoću ovog kola može da se realizuje i ILI operacija tako što se jedna promenljiva dovede da NI ulaz sa kratko spojenim ulazima, to se isto uradi i sa drugom promenljivom, a zatim se izlazi ova dva kola dovedu na ulaze NI kola. Zahvaljujući ovakvom pristupu, realizacija sve tri osnovne logičke operacije (I, ILI i NE) mogu da se realizuju sa samo jednom vrstom logičkih kola (sa NI kolima).

11.2.5 NILI kolo

NILI operacija se dobija kombinacijom ILI i NE operacija. Za dve logičke promenljive *A* i *B*, na slici 11.5. prikazan je rezultat NILI operacije kombinacionom tablicom (gde su dve promenljive *A* i *B* argument logičke NILI funkcije). Na istoj slici je ilustrovan najčešće korišćeni grafički simbol za predstavljanje NILI kola (promenljive *A* i *B* su ulazi u logičko kolo, a *Y* je izlaz logičkog kola). Kružić na izlazu pokazuje da je vrednost invertovana u odnosu na kolo koje ne bi imalo ovaj kružić.

2 ulaza		1 izlaz
A	*B*	*Y*=¬(*A*+*B*)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



Slika 11.5. Kombinaciona tablica i grafički simbol za NILI operaciju.

Kolo koje realizuje NILI operaciju naziva se NILI ili NOR kolo. Kolo koje realizuje NILI operaciju na izlazu daje logičku jedinicu samo kada su na oba ulaza logičke nule.

Ako se ulazi NILI kola kratko spoje, tada NILI kolo realizuje NE operaciju. Pomoću NILI kola može da se realizuje NE operacija (kratkim spajanjem ulaza), ali i ILI operacija na sličan način kao sa NI kolom. Pomoću tri NILI kola može da se realizuje i I operacija, na sličan način kao sa NI kolom. I sa ovim kolom mogu da se realizuju sve tri osnovne logičke operacije (I, ILI i NE).

11.2.6 Isključivo-ILI (EX-OR) kolo

Isključivo-ILI operacija (Exclusive-OR, EX-OR) daje kao rezultat logičku nulu samo onda kada obe ulazne promenljive imaju istu logičku vrednost. Ova operacija se naziva operacija koincidencije zato što daje kao rezultat logičku jedinicu samo ako su obe promenljive identične.

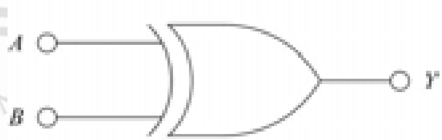
Na slici 11.6. prikazan je rezultat EX-OR operacije kombinacionom tablicom (gde su dve promenljive *A* i *B* argument logičke EX-OR funkcije). Na istoj slici je ilustrovan najčešće korišćeni grafički simbol koji predstavlja logičko kolo za realizaciju EX-OR operacije (promenljive *A* i *B* su ulazi u logičko kolo, a *Y* je izlaz logičkog kola).

Logička jednačina koja definiše operaciju koincidencije ima sledeću notaciju:

$$Y = A \bullet \overline{B} + \overline{A} \bullet B = A \oplus B \tag{436}$$

U jednačinama se za označavanje isključivo-ILI operacije najčešće koristi simbol $\oplus$.

2 ulaza		1 izlaz
A	*B*	$Y = A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Slika 11.6. Kombinaciona tablica i grafički simbol za EX-OR operaciju.

Kolo koje realizuje isključivo-ILI operaciju naziva se isključivo-ILI kolo, Exclusive-OR ili EX-OR kolo.

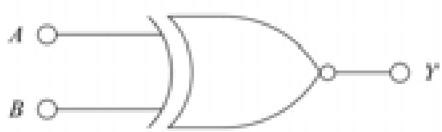
11.2.7 Isključivo-NILI kolo za realizaciju operacije koincidencije

Isključivo-NILI kolo (Exclusive-NOR, EX-NOR) daje kao rezultat logičku jedinicu ako su obe promenljive identične. Odnosno ovo kolo realizuje operaciju koincidencije:

$$Y = A \bullet B + \overline{A} \bullet \overline{B} = \overline{A \oplus B} \tag{437}$$

Kombinaciona tablica i grafički simbol za isključivo-NILI operaciju prikazani su na slici 11.7. Kružić na izlazu pokazuje da je vrednost invertovana u odnosu na kolo koje ne bi imalo kružić.

2 ulaza		1 izlaz
A	*B*	$Y = \neg(A \oplus B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Slika 11.7. Kombinaciona tablica i grafički simbol za EX-NOR operaciju.

Isključivo-ILI kolo i isključivo-NILI kolo imaju veliku primenu u praktičnim realizacijama.

11.3 Identiteti Bulove algebre

Polazeći od tri osnovne operacije u Bulovoj algebri može se izvesti veliki broj identiteta, zakona i teorema. Primena identiteta može se iskoristiti za uprošćavanje složenih logičkih izraza i formiranja kola željene strukture i sastavnih elemenata. Neki od identiteta kada se koristi samo jedna ulazna promenljiva:

Operacije sa logičkom nulom:

$$y = 0 \bullet u = 0 \tag{438}$$

$$y = 0 + u = u \tag{439}$$

Operacije sa logičkom jedinicom:

$$y = 1 \bullet u = u \tag{440}$$

$$y = 1 + u = 1 \tag{441}$$

Operacije sa istovetnim vrednostima:

$$y = u \bullet u = u \tag{442}$$

$$y = u + u = u \tag{443}$$

Operacije sa komplementarnim vrednostima:

$$y = u \bullet \bar{u} = 0 \tag{444}$$

$$y = u + \bar{u} = 1 \tag{445}$$

Neki od važnijih zakona Bulove algebre koji se koriste u realizaciji logičkim kolima:

Zakon komutacije:

$$u + y = y + u \tag{446}$$

$$u \bullet y = y \bullet u \tag{447}$$

Zakon asocijacije:

$$u + (y + z) = (u + y) + z \tag{448}$$

$$y \bullet (u \bullet z) = (y \bullet u) \bullet z \tag{449}$$

Zakon distribucije:

$$u \bullet (y + z) = u \bullet y + u \bullet z \tag{450}$$

$$u + (y \bullet z) = (u + y) \bullet (u + z) \tag{451}$$

Zakon absorpcije:

$$u + u \bullet y = u \tag{452}$$

$$u \bullet (u + y) = u \tag{453}$$

$$u + \overline{u} \bullet y = u + y \tag{454}$$

$$u \bullet (\overline{u} + y) = u \bullet y \tag{455}$$

$$(u \bullet y) + (u \bullet \overline{y}) = u \tag{456}$$

$$(u + y) \bullet (u + \overline{y}) = u \tag{457}$$

Za uprošćavanje izraza, a posebno kada je potrebno da se sve operacije izvedu sa jednom vrstom logičkih kola, koriste se De Morganova pravila:

$$\overline{u + y} = \overline{u} \bullet \overline{y} \tag{458}$$

$$\overline{u \bullet y} = \overline{u} + \overline{y} \tag{459}$$

Za pojednostavljenje logičkih izraza mogu da se koriste matematički alati za simboličko računanje, kao što je Mathematica. Ako je potrebno dokazati neki identitet, ili primeniti neki zakon Bulove algebre, na primer, $(u + y) \bullet (u + \overline{y}) = u$, tada se ovaj izraz napiše komandama za odgovarajuće operacije, In[1]

```
In[1]= LogicalExpand[(u && y) || (u && ! y)]
```

Rezultat koji program vrati nakon simplifikacije prikazuje se odmah u narednoj ćeliji programa:

```
Out[1]= u
```

Naravno, ako su izrazi veoma složeni, program Mathematica će pronaći najjednostavniji oblik (najjednostavniji oblik je onaj koji ima najmanje članova za prikaz rezultata).

Evo nekoliko primera kada je potrebno da se sve operacije realizuju sa samo jednom vrstom logičkih kola, na primer sa NOR kolima:

```
BooleanConvert[! (u && y), "NOR"]
```

Rezultat koji se dobija je:

```
! (! u \[Nor] ! y)
```

Za drugi primer,

```
BooleanConvert[! (u || y), "NOR"]
```

Dobija se:

```
u \[Nor] y
```

U drugom izrazu se koristi samo jedno dvoulazno NOR kolo koje je opisano sa **`\[Nor]`**. U prvom primeru su potrebna četiri NOR kola, gde se tri NOR kola koriste kao invertori. Radi preglednosti, sve dvoulazne operacije su grupisane u obične zagrade.

Proizvođači programabilnih kola nude sopstvene programe za simplifikaciju, i praktično nema svrhe da se i iskusni programer takmiči sa računarima ko će brži doći do optimalnog rešenja.

11.4 Karakteristike realnih logičkih kola

Kada se analiziraju složena logička kola mogu da se koriste modeli idealnih logičkih kola tako da je na izlazu logičkog kola, logička nula jednaka naponu nula volti, a logička jedinica je jednaka naponu napajanja u voltima. Podrazumeva se da je izlazna impedansa idealnog logičkog elementa jednaka nuli, a da je ulazna impedansa logičkog kola beskonačno velika. Prelaz izlaznog napona sa jednog nivoa na drugi nivo izvodi se gotovo trenutno tako da se ovi nivoi koriste dalje kao ulazi drugih logičkih kola.

U oba logička stanja, kolo praktično nema potrošnju. Idealni logički element nema potrošnju ni kada dolazi do promene logičkog stanja ako je ta promena trenutna. Kada je logičko kolo na izlazu u logičkoj nuli, tada je napon na izlazu nula, zbog čega je i proizvod izlaznog napona i izlazne struje takođe jednak nuli, što odgovara režimu zasićenja kod tranzistora. Kada je logičko kolo na izlazu u logičkoj jedinici, tada je izlazna struja jednaka nuli (da ne bi postojao pad napona na kolektorskom otporniku), zbog čega je i proizvod izlaznog napona i izlazne struje takođe jednak nuli. Takođe, ulazna impedansa logičkog kola je teorijski beskonačna, što znači da je struja logičke jedinice koja ulazi u naredno kolo jednaka nuli.

Kako svi realni signali imaju kontinualnu promenu, ni realna logička kola ne mogu da ostvare skokovitu promenu, već će se izlazni napon menjati od jednog do drugog nivoa. Pri tome, ako podrazumevamo da se radna tačka kreće po pravoj iz jednog logičkog nivoa do drugog, najveća potrošnja će biti kada je napon na izlazu na polovini napona napajanja, kada je i struja na polovini maksimalne struje. U prelaznom režimu logičko kolo najviše troši energije. Na primer, često se dešava kada radi računar da se uključi ventilator ako se izvršavaju intenzivna izračunavanja, ili ako se koristi mobilni telefon za razgovor ili prikaz filma, tada se može osetiti zagrevanje telefona i nagli pad napunjenosti baterije.

Za rad sa logičkim kolima od velike je važnosti da prelazne pojave traju što kraće, jer se time smanjuje potrošnja uređaja ali i kašnjenja zbog obrade signala. To zahteva pažljivo projektovanje da se ne preopterećuju logička kola sa previše ulaza narednih kola, da su linije veza što kraće (i time smanji induktivnost veza, a time i kašnjenje signala), da je kapacitivnost veza veoma mala (jer velika kapacitivnost produžava vreme promene logičkog stanja), da su promene logičkih stanja minimalne (bez nepotrebnih promena stanja i gličeva).

Iako se podrazumeva da je promena od jednog do drugog logičkog stanja na izlazu logičkog kola kontinualna, ne može se uvek utvrditi tačna vrednost kada će naredno kolo ispravno detektovati ulazni napon i na svom izlazu dati ispravnu logičku vrednost. Zbog toga se za sva kola usvaja kašnjenje kao vremenski period od trenutka nastanka promene do trenutka kada ta promena izaziva novo logičko stanje na izlazu. Na trenutak promene utiče i šum.

Pod pojmom šuma kod digitalnih kola podrazumeva se neželjena promena napona na ulazu u logička kola. Kada je amplituda šuma na ulazu u logičko kola mala, izlaz će biti ispravan i šum se neće prostirati kroz digitalni sistem. Međutim, ako je amplituda neželjene promene na ulazu nekog logičkog kola velika, ona može izazvati logičku grešku i pogrešni logički nivoi se dalje prostiru kroz sistem. Zato je potrebno da se utvrdi koji je to nivo šuma pri kome neće doći do logičke greške. Pod pojmom margine šuma podrazumeva se dozvoljen opseg vrednosti naponskog nivoa na ulazu logičkog kola koji neće biti protumačena kao suprotna logička vrednost. Margine šuma ne moraju da budu iste za oba logička stanja, što je razlog da se često daju dve margine šuma, jedna za logičku jedinicu i druga za logičku nulu.

Da bi se izbegao neželjeni rad logičkih kola zbog postojanja šuma na ulazima logičkih kola, ali i zbog neizbežnih tolerancija u proizvodnji integrisanih kola, proizvođači daju četiri karakteristična napona za najgori slučaj: V_{OH}, V_{IH}, V_{OL} i V_{IL}:

- V_{OH} - minimalni izlazni napon koji daje logičko kolo kada je izlaz u stanju logičke jedinice,
- V_{IH} - minimalni ulazni napon koji će logičko kolo prepoznati kao da je na ulazu logička jedinica,
- V_{OL} - maksimalni izlazni napon koji daje logičko kolo kada je izlaz u stanju logičke nule,
- V_{IL} - maksimalni ulazni napon koji će logičko kolo ispravno prepoznati kao logičku nulu.

Ulazna impedansa realnog logičkog kola nije beskonačno velika (u analizi tranzistora pokazano je da impedansa nije beskonačna čak i kada se koriste dinamička opterećenja). Takođe, izlazna impedansa nikada nije jednaka nuli. Pri povezivanju većeg broja ulaza na jedan izlaz logičkog kola, da bi se realizovala neka složenija digitalna mreža, može da se pojavi problem sa opterećivanjem izlaza, zato što se svaka ulazna impedansa narednog logičkog kola pojavljuje kao ulazno opterećenje prethodnog kola. Ovome treba dodati i kapacitivnosti između elektroda poluprovodničkih komponenti, kao i induktivnosti veza koje spajaju izlaze i ulaze logičkih kola.

Potrebno je znati koji broj ulaznih priključaka sme da se priključi na jedan izlaz logičkog kola, a da se ne naruše ispravno funkcionisanje logičkih kola. Zato se računa faktor grananja na izlazu logičkog kola da bi se odredilo koliko ulaza previše ne opterećuje prethodno kolo. Za svaku familiju logičkih kola definiše se standardno opterećenje na osnovu čega može da se odredi uticaj svakog narednog ulaza na izlaz prethodnog kola. Kod nekih logičkih kola treba da se ograniči broj ulaza da ne bi došlo do degradacije električnih karakteristika.

Već je rečeno da se kod realnog logičkog kola promena logičkog stanja na izlazu ne može desiti trenutno nakon što se promene logička stanja na ulazu u kolo. Najvažniji razlog je postojanje parazitnih kapaciteta, a napon na kondenzatoru se ne može trenutno promeniti, već se takve promene dešavaju po eksponencijalnom zakonu.

Da bi se kondenzator brže napunio treba obezbediti veću struju, ali to onda povećava potrošnju energije. Ovakvi oprečni zahtevi se rešavaju kompromisnim rešenjima. Zbog konačnog vremena potrebnog da se napon na kondenzatoru promeni do nivoa kada ga logičko kolo ispravno detektuje, dolazi do kašnjenja promene napona na izlazu.

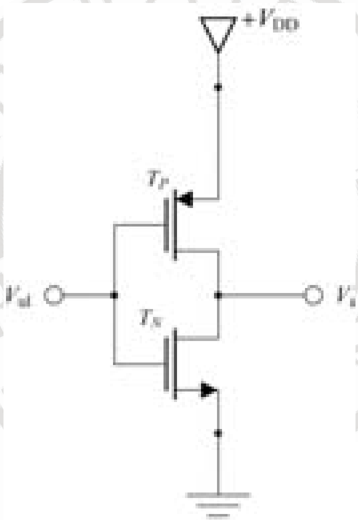
Neki od pojmova koji se mogu naći o karakteristikama logičkih kola, a koji su važni za ispravno korišćenje su razna vremena kašnjenja.

Vreme kašnjenja definiše se kao vreme između trenutka promene ulaznog signala i trenutka kada se izlazni signal promeni. Vreme kašnjenja se posebno definiše za rastuću ivicu (prelazak iz logičke nule u logičku jedinicu), a posebno za opadajuću ivicu (prelazak iz logičke jedinice u logičku nulu). Trenutak odluke se definiše na 50% amplitude. Za brza približna izračunavanja koristi se aritmetička sredina vremena kašnjenja rastuće i opadajuće ivice.

11.5 Realizacija invertora sa MOS tranzistorima

Najjednostavnije logičko kolo je invertor. Invertora predstavlja osnovu za formiranje složenijih logičkih kola. U ovoj knjizi biće prikazan invertor sa komplementarnim MOS tranzistorima, takozvani CMOS invertor.

CMOS invertor koji je prikazan na slici 11.8. ima samo jedan NMOS i jedan PMOS tranzistor. Kod oba tranzistora osnova je spojena na sors da bi se izbegao uticaja efekta podloge.



Slika 11.8. CMOS invertor.

Kada je ulazni napon V_{ul} nizak, blizu 0V, tada NMOS tranzistor ne može da provodi zato što je manji od napona praga, $V_{ul}=V_{GSN}<V_{tN}$. Isti ulazni napon je prisutan na gejtu PMOS tranzistor i on provodi u linearnom režimu zato što je njegov napon na gejtu takav da je veći od napona praga, $|V_{GSP}|=|V_{ul}-V_{DD}|> V_{tp}$. Struja PMOS tranzistora može da bude velika ali nema gde da se zatvori. Struja se vezuje na gejt narednog stepena, ali struja ne može da bude velika jer je struja gejta praktično jednaka nuli. Ostaje da se struja zatvori preko NMOS tranzistora, ali tu postoji samo mala struja curenja zakočenog NMOS tranzistora. Zbog toga je struja tranzistora T_P veoma mala. Međutim, bez obzira što je struja mala, izlazni napon je praktično jednak naponu napajanja. To znači da je napon logičke jedinice na izlazu CMOS invertora $V_{OH}=V_{DD}$, za slučaj kada je logička nula (napon blizu 0 V na ulazu). Struja potrošnje ovog tranzistorskog kola je veoma mala, što znači i d je snaga disipacije mala.

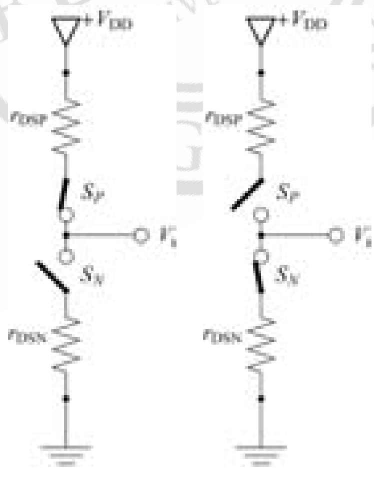
Kada je ulazni napon V_{ul} visok, blizak naponu napajanja V_{DD}, NMOS tranzistor provodi u linearnom režimu, jer je $V_{ul}=V_{GSN}>V_{tN}$, dok je PMOS tranzistor zakočen, jer je napon između gejta i sorsa nedovoljno mali da bi PMOS tranzistor provodio. Struja kroz invertor je mala zato što je PMOS tranzistor zakočen; struja drejna NMOS tranzistora nema gde da se zatvori osim preko PMOS tranzistora do napajanja. Pošto je gornji tranzistor zakočen, a donji provodi, izlazni napon je praktično nula (tipično manji od 10 mV). Dakle, napon logičke nule na izlazu CMOS invertora je V_{OL}=0V.

U oba slučaja, kada je na ulazu invertora logička jedinica, a to je napon napajanja V_{DD}, ili logička nula, 0V, jedan od tranzistora je zakočen, zbog čega je struja, koju jednosmerni naponski izvor V_{DD} daje ovom kolu u stabilnim logičkim stanjima, veoma mala i jednaka struji curenja zakočenog tranzistora. Dobija se da je statička disipacija CMOS invertora reda nekoliko nW.

Kada je tranzistor u zasićenju, pad napona između drejna i sorsa je približno nula, te je stoga i disipacija na njemu izuzetno mala, Tranzistor koji je u zakočenju, ima ceo napon napajanja između drejna i sorsa ali je struja izuzetno mala jer postoji samo struja curenja. U oba slučaja je disipacija na tranzistorima mala.

Iako je izuzetno mala struja kroz tranzistor, CMOS invertor bi mogao da obezbedi veliku struju potrošaču koji je vezan na 0V ili na napon napajanja, zato što tranzistor koji je u zasićenju može da obezbedi takvu struju. Verovatnije je da će opterećenje na izlazu invertora biti kapacitivno, i invertor mora da obezbedi veliku struju da bi se kondenzator napunio čim pre i time smanjilo kašnjenje. Zbog toga je faktor grananja na izlazu invertora veliki i dinamičke karakteristike su dobre.

Rad invertora može da se modeluje kao kolo sa dva prekidača od kojih je jedan prekidač uključen, a drugi isključen, kao što je ilustrovano na slici 11.9.



Slika 11.9. Modelovanje CMOS invertora sa dva komplementarna prekidača.

Iako možemo da smatramo da je izlazna otpornost tranzistora jednaka nuli, u ovom modelu svaki tranzistor ima malu ali konačnu otpornost ka masi ili napajanju. Ova otpornost jednaka otpornosti sors-drejn odgovarajućeg tranzistora.

U prvom slučaju kada je dovedena logička nula na ulaz invertora, i kada je napon na ulazu invertora mali, donji tranzistor se ponaša kao otvoren prekidač, a gornji tranzistor kao zatvoren prekidač, pri čemu je od prekidača do napajanja mala otpornost provodnog tranzistora. Ako naredni logički stepen ima veliku ulaznu otpornost, tada se izlazni napon može izračunati kao napon na razdelniku napona. Kako je otpornost prema V_{DD} mala, čak i kada ima više logičkih kola vezanih na ovaj izlaz (sve ulazne otpornosti logičkih kola su paralelno vezane) razdelnik napona će još uvek dati dovoljno visok napon da odgovara logičkoj jedinici.

U drugom slučaju kada je dovedena logička jedinica na ulaz invertora, i kada je napon na ulazu invertora približno jednak naponu napajanja V_{DD}, donji tranzistor se ponaša kao zatvoren prekidač, a gornji tranzistor kao otvoren prekidač, pri čemu je od prekidača do mase mala otpornost provodnog tranzistora. Ako naredni logički stepen ima veliku ulaznu otpornost, tada se izlazni napon može izračunati kao napon na razdelniku napona. Kako je otpornost prema masi mala, i kako su sve ulazne otpornosti logičkih kola paralelno vezane) razdelnik napona će još uvek dati dovoljno nizak napon da odgovara logičkoj nuli.

11.6 Disipacija CMOS kola

Postoje četiri razloga za disipaciju CMOS kola,. Disipacija nastaje zbog struje curenja, kapacitivnost opterećenja, parazitne kapacitivnosti i prelaznih stanja. Disipacija usled struje curenja nastaje kod zakočenog tranzistora kod koga je napon napajanja između drejna i sorsa; snaga disipacije se dobija kao proizvod napona napajanja i struje curenja. Ovo je statička disipacija CMOS kola, zato što postoji i kada tranzistor ne menja izlazna stanja, a približno je reda μW.

Ostali uzroci disipacije nazivaju se dinamičke disipacije jer nastaju samo onda kada tranzistor menja logička stanja. Ako pretpostavimo da je opterećenje izlaza kapacitivno, na primer C_{p}, a da se logičke jedinice i nule smenjuju sa učestanošću f, energija koja se predaje kondenzatoru u toku jedne poluperiode, a zatim disipira na tranzistoru iznosi $C_{\mathrm{p}}(V_{\mathrm{DD}})^2/2$. Srednja disipacija CMOS invertora za kapacitivno opterećenje je:

$$P_{D1} = fC_p V_{\mathrm{DD}}^2 \tag{460}$$

Parazitne kapacitivnosti tranzistora su takođe uzrok potrošnje energije tokom promene logičkih stanja. Primenom sličnog postupka za kapacitivno opterećenje, dobija se da je disipacija zbog parazitne kapacitivnosti C_{T}:

$$P_{D2} = fC_T V_{\mathrm{DD}}^2 \tag{461}$$

Treća disipacija nastaje kada CMOS kolo prelazi iz jednog logičkog stanja u drugo, što znači da radna tačka prolazi kroz oblast u kojoj su oba tranzistora provodna. Napon između drejna i sorsa više nije nula kao kada je tranzistor u zasićenju, niti je struja drejna mala. Disipacija CMOS kola zbog promene napona sa jednog na drugi logički nivo može da se izračuna po sledećoj formuli:

$$P_{D3} = \frac{1}{2} f\left(V_{\mathrm{DD}} - 2V_T\right) I_{\mathrm{DD\,max}}(t_{LH} + t_{HL}) \tag{462}$$

Struja I_{DDmax} je maksimalna struja tokom promene radnog režima tranzistora.

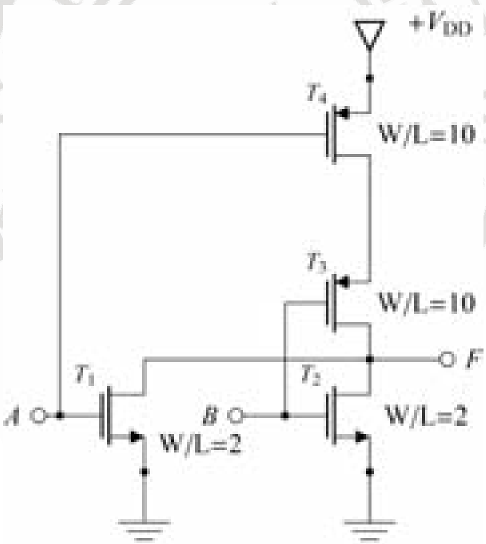
Sva tri izraza za dinamičku disipaciju pokazuju linearnu zavisnost od učestanosti f i kapacitivnosti, a u velikoj meri ima kvadratnu zavisnost od napona napajanja V_{DD}.

Kapacitivnost zavisi i od veza kojima su povezana logička kola.

Ova analiza pokazuje da se disipacija može smanjiti pravilnim projektovanjem integrisanog kola, tako da su sve kapacitivnosti što je moguće manje. Promena logičkih stanja ne mora da se odvija sa najvišom učestanošću, o čemu projektanti treba da vode računa. Nepotrebne promene logičkih stanja treba eliminisati, jer one povećavaju disipaciju a nemaju korisne efekte. U slučaju da se očekuje intenzivan rad logičkih kola u pojedinim intervalima, treba obezbediti hlađenje čipova u tom intervalu, na primer korišćenjem ventilatora. Savremene elektronske komponente se prave tako da rade i sa napajanjem od 3,3V, za razliku od ranijih rešenja kada je napajanje bilo 5V.

11.7 Logička kola sa MOS tranzistorima

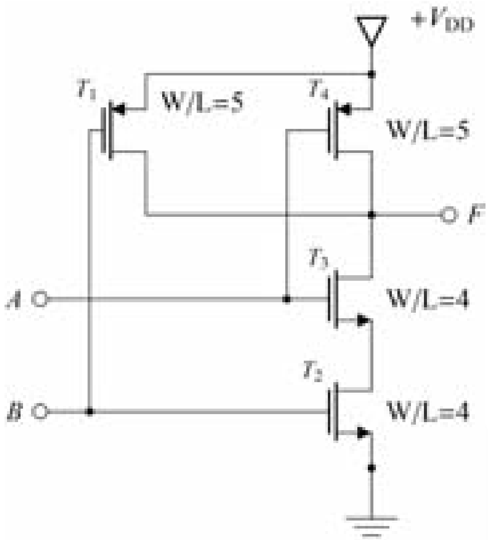
Dvoulazna CMOS logička kola dobijaju se dodavanjem tranzistora u osnovni model invertorskog kola sa slike 11.8. koje je imalo samo jedan ulazni signal. Na slikama 11.10. i 11.11. prikazana su dvoulazna CMOS NILI i NI kola.



Slika 11.10. CMOS logičko NILI kolo.

Sa slike 11.10. vidi se da će izlaz NILI kola (spoj drejnova tranzistora T_2 i T_3) biti na visokom nivou samo ako su oba ulaza na niskom nivou (tranzistori T_1 i T_2 ne provode – kao otvoreni prekidači, a tranzistori T_3 i T_4 su u aktivnom režimu – kao prekidači u kratkom spoju).

Izlaz NILI kola biće na niskom nivou ako je bar jedan od ulaza na visokom nivou (bar jedan od tranzistora T_1 i T_2 provodi – kao zatvoren prekidači, dok u serijskoj vezi tranzistori T_3 i T_4 bar jedan tranzistor ne provodi – kao otvoren prekidač).



Slika 11.11. CMOS logičko NI kolo.

Sa slike 11.11. vidi se da će izlaz NI kola (spoj drejnova tranzistora T_3 i T_4) biti na niskom nivou samo ako su oba ulaza na visokom nivou (oba tranzistora T_2 i T_3 provode – kao zatvoreni prekidači, a tranzistori T_3 i T_4 su u prekidu – kao otvoreni prekidači).

Izlaz NI kola biće na visokom nivou ako je bar jedan od ulaza na niskom nivou (bar jedan od tranzistora T_1 i T_4 provodi – kao zatvoren prekidač, dok u serijskoj vezi tranzistori T_2 i T_3 bar jedan tranzistor ne provodi – kao otvoren prekidač).

Statičke karakteristike CMOS logičkih kola zavise od odnosa dimenzija tranzistora, kao što je ilustrovano na prethodne dve slike.

11.8 Bistabilna kola

Postoje dve vrste logičkih kola koja se koriste u digitalnim sistemima, a koja se obrađuju u ovom udžbeniku. Kod jedne vrte kola izlazi kola zavise samo od trenutnih vrednosti na ulazima u ta kola. Takva kola se nazivaju kombinacionih kola. Uzimajući u obzir disipaciju kola, kod ovih kola može doći do promene izlaznih logičkih stanja kada se dogode promene na njihovim ulazima, a te promene često zavise i od kašnjenja. Da bi se sprečile nekontrolisane promene na izlazu kola, poželjno je da se te promene odvijaju samo onda kada to želimo, u određenom trenutku, i po redosledu kako je planirano. Druga vrsta kola upravo obezbeđuje sekvencijalno procesiranje (po nekom redosledu).

Sekvencijalna kola sadrže elemente koji imaju sposobnost pamćenja (memorisanja) stanja. Kako se radi sa binarnim brojevima koji imaju dve vrednosti, to ovi elementi imaju najmanje dva stabilna stanja. Iz stabilnog stanja kolo može da izađe samo pod dejstvom ulaznih signala. Elementi sa samo dva stabilna stanja nazivaju se bistabilna kola.

Rad bistabilnih kola zasnovan je na korišćenju povratne sprege, tako da tranzistori ostanu u stabilnom stanju nakon promene koje se desila na ulazu. Trenutno stanje u kolu ne dozvoljava promenu stanja dok se ne pojavi spoljašnja pobuda, koja tada može kolo da prebaci u drugo stabilno stanje.

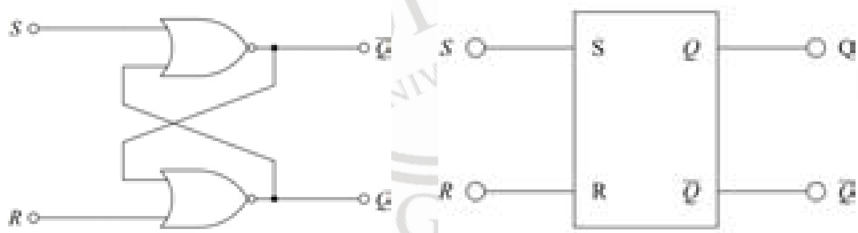
Postoje dve vrste bistabilnih kola. Kod jedne vrste kola izlaz stalno prati promene na ulazima dok se ne dovedu takvi ulazni nivoi koji sprečavaju dalje promene stanje na izlazu (reaguje na vrednost neke pobude). Ovakva kola se nazivaju leč kola (engl. latch).

Kod druge vrste kola, stanje na izlazu se može promeniti samo u trenutku nagle promene stanja (pri promeni od logičke jedinice na logičku nulu, ili pri promeni od logičke nule na logičku jedinicu), odnosno na opadajuću ili rastuću ivicu napona. Nakon promene logičkih stanja, ne može doći do nove promene na izlazu logičkog kola. Ovakva kola se nazivaju flipflopovi.

11.8.1 SR leč

SR leč kolo koje je realizovano sa NILI logičkim kolima prikazano je na slici 11.12. Ovo bistabilno kolo ima dva ulaza koji su označeni sa S i R. Izlazi su označeni sa Q i komplement od Q, odnosno sa (¬Q).

Kaže se da je leč kolo setovano kada su izlazni nivoi Q=1 i ¬Q=0. Kaže se da je leč kolo resetovano u slučaju da je Q=0 i ¬Q=1. Na istoj slici na kojoj je prikazana realizacija sa NILI kolima, prikazan je grafički simbol za SR leč kolo.



Slika 11.12. SR leč kolo sa NILI kolima i grafički simbol SR leča.

Na osnovu kombinacione tabele, proizilazi da se kolo se setuje dovođenjem kombinacije S=1, R=0 na ulaze kola, jer tada se izlazi kola postavljaju u stanje $Q=1$ i $\overline{Q}=0$. Dovođenjem kombinacije S=0, R=1, kolo se resetuje zato što se izlazi postavljaju u stanje $Q=0$, $\overline{Q}=1$. Kolo ne može da promeni izlazna stanja kada je na ulazu S=0 i R=0. Ako se na ulaze dovede S=1 i R=1, izlazi se postavljaju u stanje $Q=0$, $\overline{Q}=0$, i izlazi nisu komplementarni. Zato se ova kombinacija naziva zabranjeno ili nedozvoljeno stanje na ulazu.

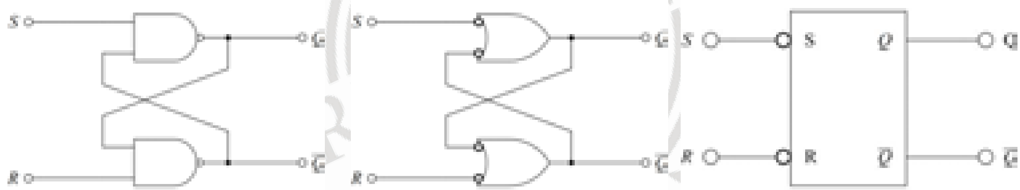
Eksitaciona tabela se izvodi iz funkcionalne tabele i pokazuje kakvi treba da budu ulazni signali da bi se ostvarila promena. Ako kod nekog ulaznog signala stoji simbol ×, to znači da vrednost tog signala nije bitna i da može imati proizvoljnu vrednost.

Funkcionalna i eksitaciona tabela SR leč kola sa NILI kolima

Stanje na ulazu		Promena na izlazu	
S	R	Q_{n+1}	$\overline{Q}_{n+1}$
0	0	Q_n	$\overline{Q}_n$
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

Stanje na izlazu		Potrebna promena	
Q_n	Q_{n+1}	S	R
0	0	0	×
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	×	0

SR leč kolo može da se napraviti i korišćenjem NI kola, kao i drugim vrstama dvoulaznih kola, a kao što je ilustrovani na slici 11.13. Funkcionalna i eksitaciona tabela mogu da se razlikuju, zavisno od toga da li se setovanje vrši visokim ili niskim nivoom napona. Da li se setovanje ili resetovanje vrši visokim ili niskim nivoom, može da se promeni ako se ulazni signali invertuju odmah na ulazu.

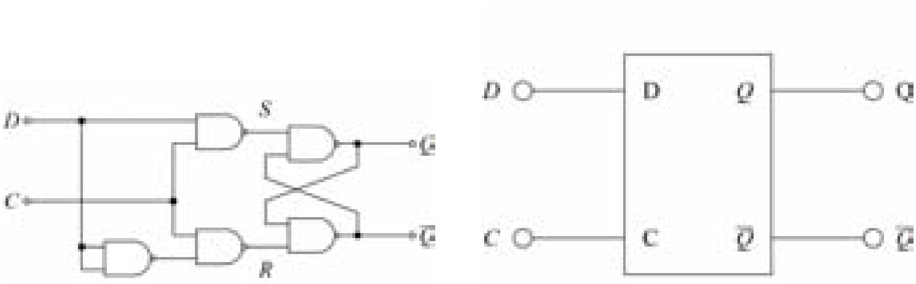


Slika 11.13. Dve vrste realizacija SR leč kola i grafički simbol SR leča.

11.8.2 D leč

U mnogim sistemima je potrebno da se privremeno sačuva neka vrednost. Neka je to logička vrednost. Logičku vrednost koju treba sačuvati treba dovesti na jedan ulaz u leč kolo, koji će onda tu vrednost sačuvati u leć kolu. Ovu funkciju realizuje D leč kolo.

Konstrukcija i i grafički simbol D leč kola dati su na slici 11.14. Osnovu D leč kola čini SR leč kolo, kome je dodat invertor na ulazu radi eliminisanja mogućnost pojavljivanja nedozvoljene kombinacije signala na ulaz SR leča. Ulazni signal dozvole *C*, koji se naziva još i CLK (klok, taktni signal), EN ili ENABLE (dozvoljavanje rada komponente) može biti aktivan kada je na visokom nivou. U nekim slučajevima se koriste invertori na ulazu, tako da se kolo aktivira niskim naponom.



Slika 11.14. D leč kolo realizovano sa NI kolima i grafički simbol.

Kolo prenosi ulazni podatak u kolo samo kada je C=1. Na izlazu kola uvek se pojavljuje onaj signal koji je bio na ulazu. Zbog propagacije signala kroz logička kola od kojih je napravljen ovaj leč, postoji kašnjenje do pojave signala na izlazu. Kada se C postavi na nivo logičke nule, stanje na izlazu se ne menja. Ovo je princip rada jednobitnog registra.

Funkcionalna i eksitaciona tabela D leč kola

Stanje na ulazu		Promena na izlazu	
D	C	Q_{n+1}	$\overline{Q}_{n+1}$
0	1	0	1
1	1	1	0
×	0	Q_n	$\overline{Q}_n$

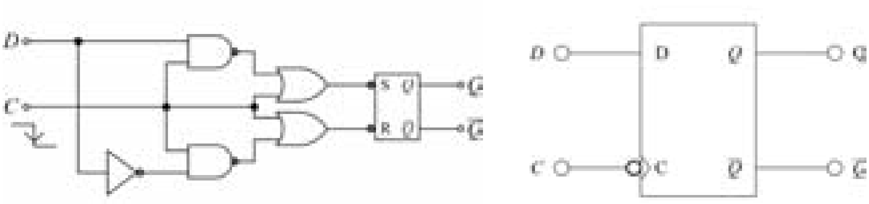
Stanje na izlazu		Potrebna promena	
Q_n	Q_{n+1}	D	C
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Na prvi pogled rešen je problem koji je postojao kod RS leča. Međutim postoji opasnost da se pri promeni ulaznog signala na D ulazu i promene na C ulazu sa visokog nivoa na nizak nivo, zapamti neka neželjena vrednost. Za pouzdan rada D leč kola, u praksi se zahteva da signal na ulazu D bude stabilan za vreme pre nego što se dozvoli da C promeni vrednost sa jedinice na nulu.

11.8.3 D flipflop

Da se ne bi vodilo računa o tome da li je visok nivo na C ulazu D leča, koriste se flipflopovi koji menjaju vrednost sa nekim taktom, na uzlaznu ili silaznu ivicu takt signala.

Na slici 11.15. prikazana je realizacija D flipflopa sa okidanjem (promenom stanja) u trenutku kada se dešava silazna ivica takta. Grafički simbol je prikazan na istoj slici.



Slika 11.15. D flipflop sa okidanjem na opadajuću ivicu i grafički simbol.

Kada je takt ulaz kola na visokom nivou, stanje na izlazima NI kola iz prvog stepena određeno je stanjem na *D* ulazu. Drugi nivo logičkih kola blokiran je visokim nivoom takt signala, zato što su izlazi ILI kola na logičkoj jedinici, što znači da su na ulazima SR leč kola takođe logičke jedinice; invertovani ulazi SR leča ne dozvoljavaju promenu stanja na izlazima ovog kola. Kada takt signal prelazi sa logičke jedinice na logičku nulu, blokiraju se ulazi NI kola, ali se stanje na izlazima NI kola ne menja sve dok ne prođe vreme propagacije signala kroz NI kola. Istovremeno sa blokiranjem NI kola, na ulaze ILI kola na koje dolazi takt *C*, postavlja se logička nula; zbog toga je na izlazima ILI kola stanje koje je ranije odredio *D* ulaz. U zavisnosti od toga kakav je *D* ulaz, pojaviće se na jednom od ulaza S ili R leča kratak negativan impuls koji će postaviti SR leč u željeno stanje. Nakon toga, zbog niskog nivoa takt signala, NI kola ostaju blokirana i stanje flipflopa se ne može promeniti. Funkcionalna i eksitaciona tabela ivičnog D flipflopa sa okidanjem na opadajuću ivicu date su u sledećoj tabeli:

Funkcionalna i eksitaciona tabela D flipflopa

Stanje na ulazu		Promena na izlazu	
D	C	Q_{n+1}	$\overline{Q}_{n+1}$
0	¯|_	0	1
1	¯|_	1	0
×	0	Q_n	$\overline{Q}_n$
×	1	Q_n	$\overline{Q}_n$

Stanje na izlazu		Potrebna promena	
Q_n	Q_{n+1}	D	C
0	0	0	¯|_
0	1	1	¯|_
1	0	0	¯|_
1	1	1	¯|_

11.8.4 Multivibratorska kola

U prethodnom primeru postojala je potreba da se generiše takt signal, kao signal kratkotrajnog impulsa da bi flipflop preneo stanje sa ulaza na izlaz kola. Naravno, ovakva kola treba da se realizuju sa logičkim kolima, kako bi njihov rad bio kompatibilan sa ostatkom nekog složenog kola.

Multivibratorska kola imaju jedno ili dva stanja u kojima se zadržavaju samo određeno vreme. Takva privremena stanja se nazivaju kvazistabilna stanja. Za rad ovih kola se koriste otpornici i kondenzatori, kao i prekidačka logika i zaštitne diode. Kako napon na kondenzatoru u prekidačkim kolima može da promeni vrednost tako da je napon bude veći od napona napajanja, kao i zbog mogućnosti da se spolja u kolo dovede napon koji nije u granicama rada kola, to se koriste diode koje treba da spreče pojavu neželjenih nivoa napona.

Monostabilni multivibratori imaju jedno stabilno stanje u kome ostaju sve dok neka spoljašnja pobuda ne prouzrokuje prelazak u kvazistabilno stanje. Nakon nekog vremena, monostabilno kolo se vraća u stabilno stanje. Tipična primena monostabilnih multivibratora je generisanje impulsa tačno definisanog trajanja.

Astabilni multivibratori (koji se jš nazivaju i relaksacioni oscilatori) nemaju ni jedno stabilno stanje. Oni imaju dva kvazistabilna stanja koja se naizmenično smenjuju. Tipična primena astabilnih multivibratora je generisanje periodične povorke impulsa čiji su parametri određeni izborom elemenata kola (na primer kapacitivnošću i otpornošću). Takva periodična povorka impulsa se u sinhronim digitalnim sistemima koristi kao takt signal, kako bi se sve promene stanja odvijale u tačno određenim trenucima, na uzlaznu ili silaznu ivicu impulsa.

12 Magnetizam

12.1 Magnetsko polje

Magnetsko polje je specijalno stanje u prostoru u kome se zapažaju određene osobine, kao što je to slučaj sa drugim fizičkim poljima (gravitaciono polje, elektrostatičko polje):

- Magnetska igla se postavlja u određen položaj u magnetnom polju.
- U magnetskom polju može da se uoči dejstvo sile na gvozdene ili feromagnetne predmete kao i na stalne magnete.
- U magnetskom polju, na provodnik kroz koji protiče struja, deluje sila.
- Ako se provodnici kreću kroz prostor gde postoji magnetsko polje u njima se indukuje elektromotorna sila.

Gravitaciono polje se definiše kao odnos gravitacione sile i mase

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}_g}{m} \tag{463}$$

Elektrostatičko polje se definiše kao odnos elektrostatičke sile i količine elektriciteta

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q} \tag{464}$$

U oba slučaja polje predstavlja količnik sile i veličine na koju sila deluje.

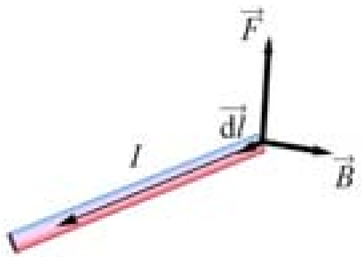
U slučaju magnetskog polja potrebno je odrediti silu i veličinu na koju deluje polje. Vektor magnetske indukcije $\vec{B}$ predstavlja elektromagnetsku silu koja deluje u magnetskom polju na provodnik dužine dl a kroz koji protiče struja jačine I, odakle se dobija da je intenzitet vektora magnetske indukcije

$$B = \frac{F}{I\,\mathrm{d}l} \tag{465}$$

Jedinica za vektor magnetske indukcije je tesla (T=N/Am, jedan tesla je jednako jedan njutn po amper metru).

12.2 Elektromagnetska sila

Definicioni izraz za magnetska indukcija kao karakteristike magnetskog polja izveden je iz empirijskog izraza za silu koja deluje na deo provodnika dužine d*l* kroz koji protiče stalna struja *I* a koji se nalazi u magnetskom polju indukcije *B*. Na slici 12.1. ilustrovan je provodnik kroz koji teče stalna struja *I*, pri čemu se provodnik nalazi u polju koje je označeno sa *B*.



Slika 12.1. Provodnik kroz koji teče struja *I*, a koji se nalazi u magnetskom polju $\vec{B}$.

Sila koja deluje na provodnik je označena sa $\vec{F}$ i naziva se elektromagnetska sila. Smerovi vektora su takođe prikazani na slici, a sila je određena vektorskim proizvodom (sa $\mathrm{d}\vec{F}$ se označava sila koja deluje na mali deo provodnika kroz koji teče struja *I*):

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} \qquad (466)$$

Vektorski proizvod znači da je sila normalna na ravan koja je određena provodnikom i magnetskom indukcijom, u tački u kojoj deluje sila, a smer sile je kao na slici 12.1.

U prethodnom izrazu sa $\mathrm{d}\vec{l}$ je označen vektor dužine strujnog elementa koji ima pravac provodnika kroz koji teče struja, a smer je isti kao i smer stalne struje *I*. Struja nije vektor, zbog čega mora da se uvede vektor $\mathrm{d}\vec{l}$ koji ima pravac (pravac provodnika kroz koji teče struja) i smer (smer se određuje smerom struje *I*), kako bi se odredio pravac i smer vektorskog proizvoda.

U prethodnim izrazima struja *I* može da se iskaže preko gustine struje *J* i površine poprečnog preseka provodnika *S*:

$$I = JS \qquad (467)$$

Zapremina $\mathrm{d}V$ elementarnog dela provodnika kroz koji protiče struja može da se iskaže preko poprečnog preseka i dela provodnika $\mathrm{d}\,l$:

$$\mathrm{d}V = S\,\mathrm{d}l \qquad (468)$$

Sila koja deluje na deo provodnika kroz koji protiče struja *I* može da se napiše preko elementarne zapremine i gustine struje (gustina struje je sada definisana kao vektor da bi elementarnu dužinu uključili u elementarnu zapreminu; kako zapremina ne može da bude vektor, to jedino možemo da pridružimo vektor uz gustinu struje koja je definisana na poprečnom preseku provodnika i ima smer struje):

$$\mathrm{d}\,\vec{F} = \vec{J}\;S\;\mathrm{d}\,l \times \vec{B} = \vec{J} \times \vec{B}\;\mathrm{d}V \tag{469}$$

U prethodnom izrazu su konstante (sve što nije vektor) izdvojene u zapreminu, zato što konstante utiču samo na intenzitet sile, a ne utiču na smer sile.

Cilj ovog izvođenja jeste da se sila $\mathrm{d}\vec{F}$ izrazi preko naelektrisanja koja se kreću, kako bi se gustina struje $\vec{J}$ iskazala preko prostorne gustine naelektrisanja (ρ), koncentracije naelektrisanja (N') i srednje brzine kretanja naelektrisanja (v); pri ovome brzina se definiše kao vektor, jer se naelektrisanja kreće u istom smeru kao i struja i smer brzine je isti kao i smer naelektrisanja koja se kreću (struje):

$$\vec{J} = \rho\vec{v} = N'q\,\vec{v} \tag{470}$$

Ukupan broj naelektrisanja u zapremini $\mathrm{d}V$ može da se izrazi preko koncentracije naelektrisanja (N') i zapremine:

$$N = N'\,\mathrm{d}V \tag{471}$$

Posle svih smena, elektromagnetska sila koja deluje na strujni element može da se predstavi sledećom relacijom:

$$\mathrm{d}\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}N'\,\mathrm{d}V = q\vec{v} \times \vec{B}N \tag{472}$$

Pošto je $\mathrm{d}\vec{F}$ sila koja deluje na N naelektrisanja, na jedno naelektrisanje delovaće sila $\vec{F_1}$:

$$\vec{F_1} = \frac{d\vec{F}}{N} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{473}$$

U prethodnom izrazu $\vec{F_1}$ se naziva Lorencova sila (sila koja u magnetskom polju indukcije $\vec{B}$ deluje na tačkasto naelektrisanje q, pri čemu se tačkasto naelektrisanje kreće brzinom $\vec{v}$):

$$\vec{F_1} = \frac{d\vec{F}}{N} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{474}$$

12.3 Fluks vektora magnetske indukcije

Fluks vektora magnetske indukcije, ili kraće magnetski fluks, kroz neku površinu S koja se oslanja na konturu C, definiše se kao površinski integral:

$$\phi = \int_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_S B\,\mathrm{d}S\cos\alpha \tag{475}$$

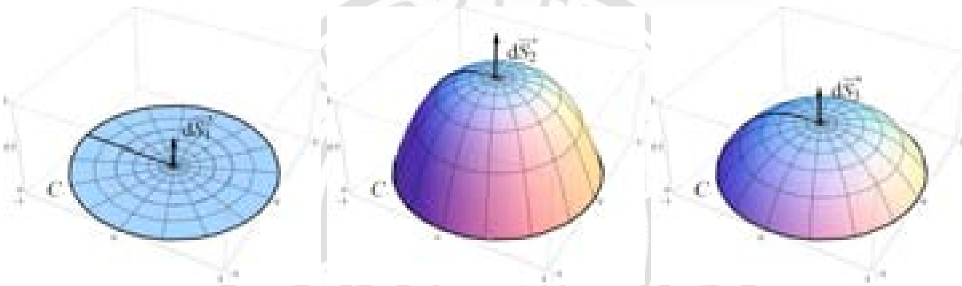
Vektor elementa površine $\mathrm{d}\vec{S}$ ima pravac normale na površinu, a α je ugao između vektora $\vec{B}$ i $\mathrm{d}\vec{S}$.

Magnetski fluks ima fizičku prirodu proizvoda magnetske indukcije i površine, zbog čega je jedinica veber, Wb=Tm^2.

Za fluks vektora magnetske indukcije važi zakon o konzervaciji fluksa. Po ovom zakonu, izlazni fluks vektora $\vec{B}$ kroz ma koju prostorno zatvorenu površinu jednak je nuli:

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0 \qquad (476)$$

Ako se radi o zatvorenoj površini, to se izražava kružićem na integralu. Ovaj zakon iskazuje princip neprekidnosti linija vektora magnetske indukcije koje se zatvaraju same u sebe. Za polje $\vec{B}$ kaže se da je bezizvorno polje. To znači da ne postoji izvor magnetske indukcije.



Slika 12.2. Površine S_1, S_2 i S_3 oslonjene na istu konturu C.

Ako postoji neka kontura označena sa C, kao na slici 12.2., na nju se može osloniti ravna površina S_1, ili neka ispupčena površina kao S_2, ili neka treća površina, na primer S_3.

Fluks je isti kroz sve ove površine koje su oslonjene na istu konturu C, kao na slici 12.2. Površine S_1 i S_2 obrazuju jednu prostorno zatvorenu površinu (S_1+S_2), a takođe su prostorno zatvorene površine one koju čine S_1 i S_3, ili S_2 i S_3, i sve se one oslanjaju na istu konturu C. U svim ovim slučajevima, fluks kroz prostorno zatvorenu površinu je jednak nuli, što se matematički zapisuje na sledeći način:

$$\oint_{S_1+S_2} \vec{B}d\vec{S} = \phi_1 - \phi_2 = 0 \qquad (477)$$

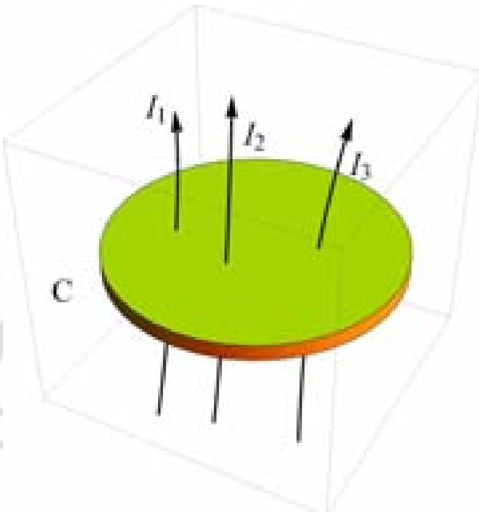
Iz prethodnog izraza proizilazi da su ϕ_1 i ϕ_2 suprotni, jer su normale orijentisane u odnosu na konturu C u istu stranu, ali u odnosu na zatvorenu površinu S_1+S_2 jedna normala je orijentisana ka njenoj unutrašnjosti ($d\vec{S}_1$), a druga ka spoljašnjosti ($d\vec{S}_2$). Iz ove jednačine se odmah dobija:

$$\phi_1 = \phi_2 \qquad (478)$$

12.4 Amperov zakon

Magnetsko polje je posledica kretanja naelektrisanja. To može da bude tok električne struje u provodnicima, ali i uopšteno bilo koje kretanje naelektrisanja. U slučajevima kada se radi o poljima u okolini provodnika u kojima teče struja, polja zavise od geometrijske konfiguracije strujnih provodnika i od jačine struje u njima.

Amperov zakon ustanovljava odnos između magnetskih polja u vakuumu i struja koje proizvode ta polja.



Slika 12.3. Kontura *C* koja obuhvata tri struje I_1, I_2 i I_3.

Po Amperovom zakonu, linijski integral vektora magnetske indukcije po proizvoljnoj konturi *C* proporcionalan je zbiru jednosmernih struja koje ta kontura obuhvata.

$$\oint_{S_1+S_2} \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k \tag{479}$$

Ilustracija konture *C* koja obuhvata tri struje I_1, I_2 i I_3 prikazana je na slici 12.3.

Koeficijent proporcionalnosti između integrala na levoj strani prethodnog izraza i sume na desnoj strani naziva se magnetski permeabilitet, i u vakuumu iznosi $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Tm/A. Koristi se i jedinica henri po metru, H/m.

Amperov zakon daje vezu između magnetske indukcije *B* i stacionarnih struja koje je proizvode. Amperov zakon se potvrđuje eksperimentalno i iz njega proizilaze tri posledice:

1. Vrednost linijskog integrala

$$\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} \tag{480}$$

zavisi samo od krajnjih tačaka putanje M i N, ali ne i od oblika putanje.

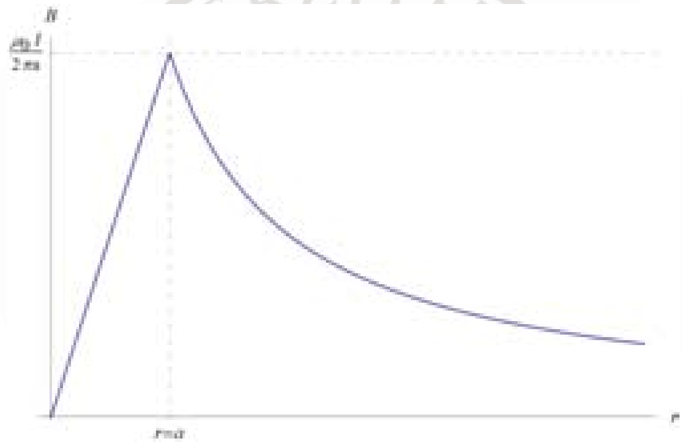
2. Kada se integracija vrši po zatvorenoj konturi *C* koja ne obuhvata jednosmerne struje, vrednost integrala je nula.

3. Kada kontura *C* obuhvata struje I_k, vrednost integrala je jednaka proizvodu permeabiliteta i struje I_k.

Amperov zakon omogućava da se lako odredi magnetska indukcija u slučajevima u kojima postoji visok stepen simetrije polja i da se zna kvalitativan oblik polja. Na sledećim primerima biće pokazana primena ovih relacija.

12.4.1 Magnetsko polje beskonačnog pravog provodnika kružnog preseka kroz koji protiče stalna struja

Magnetsko polje beskonačno dugog pravog provodnika, kružnog poprečnog preseka sa poluprečnikom *a*, kroz koji protiče jednosmerna struja *I*, tangencijalno je na krugove koji leže u ravni normalnoj na provodnik i koncentrični su sa provodnikom.



Slika 12.4. Magnetsko polje *B* koji pravi beskonačno dugačak provodnik (kroz koji teče struja *I*).

Koristeći Amperov zakon može da se odredi intenzitet vektora *B*. Unutar provodnika, kada je rastojanje od centra provodnika manje od poluprečnika, intenzitet polja linearno raste sa rastojanjem, tako što je obuhvaćen veći broj naelektrisanih čestica koje se kreću. Na rastojanjima većim od poluprečnika, vektor B ima manje vrednosti.

U oblasti gde je rastojanje od centra manje od poluprečnika, $r < a$, cirkulacija vektora *B* po kružnoj konturi koja je paralelna sa ravni preseka provodnika, daje sledeće vrednosti za integral:

$$\oint_{C_1} \vec{B}\mathrm{d}\vec{l} = B2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi a^2}\pi r^2 \tag{481}$$

Vektor $\vec{B}$ (u pravcu tangente na kružnu konturu) i vektor $\mathrm{d}\vec{l}$ (duž konture) su kolinearni vektori, što znači da je ugao između njih jednak nuli, a kako je kosinus ugla jednak jedinici, vektorski proizvod jednak je skalarnom proizvodu. Za struju koja je obuhvaćena konturom može da se odredi kao gustina struje ($I/\pi a^2$) puta površina konture (πr^2).

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r, \quad r \le a \tag{482}$$

Za kružne konture unutar provodnika koje su na rastojanju *r*, *B* linearno raste do vrednosti kada je rastojanje jednako poluprečniku provodnika, $r = a$, kada *B* postaje

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}, \qquad r = a \tag{483}$$

U oblasti izvan provodnika, kada je kružna kontura na rastojanju većem od poluprečnika kruga, $r > a$, dobija se da je integral konstantan:

$$\oint_{C_2} \vec{B} \mathrm{d}\vec{l} = B 2\pi r = \mu_0 I \tag{484}$$

Kontura obuhvata celokupnu struju *I*, tako da se dobija:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{485}$$

Prethodni izraz se naziva Bio-Savarov zakon. Ovaj zakon pokazuje da magnetska indukcija opada recipročno sa rastojanjem od provodnika.

Obe relacije za magnetsku indukciju, unutar provodnika i izvan njega, imaju istu vrednost na rastojanju jednakom poluprečniku provodnika kružnog preseka, za $r = a$, kao što je ilustrovano na slici 12.4.

12.4.2 Polje u torusnom namotaju i u neograničeno dugom solenoidu

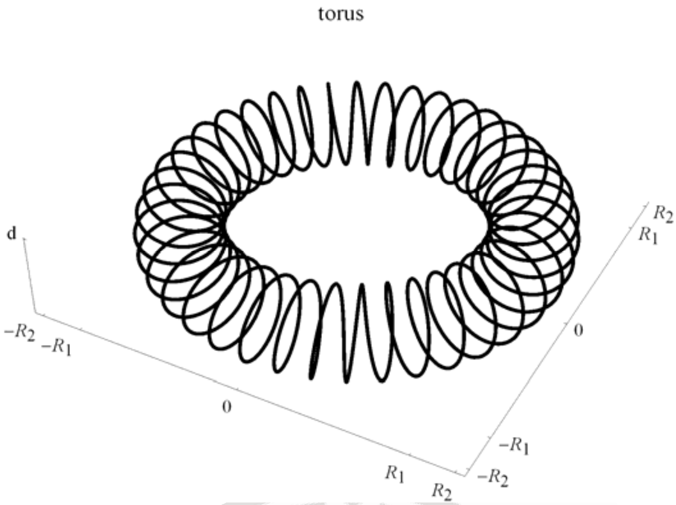
Posmatrajmo torus kružnog preseka prečnika *d*, koji ima unutrašnji poluprečnik R_1 i spoljašnji poluprečnik R_2, gusto i ravnomerno namotan sa *N* navojaka provodnika kroz koje teča stalna struja *I*, kao što je prikazano na slici 12.5.

Kroz namotaj protiče struja *I* koja stvara magnetsko polje po srednjoj liniji torusa poluprečnika *r* :

$$r = \frac{R_1 + R_2}{2} \tag{486}$$

Magnetsko polje je tangencijalno na kružnicu poluprečnika *r* koja je u sredini torusa. Primenom Amperovog zakona na konturu *C* dobija se

$$\oint_{C} \vec{B} \mathrm{d}\vec{l} = B 2\pi r = \mu_0 N I \tag{487}$$



Slika 12.5. Torus sa *N* provodnih navojaka i jednosmernom strujom *I* kroz navojke.

Kontura C obuhvata *N* struja (za svaki navojak). Konačno se za magnetsku indukciju dobija

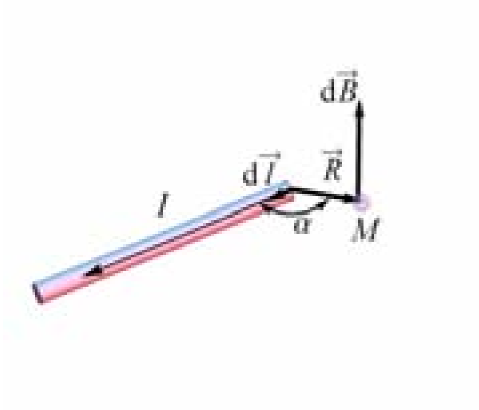
$$B = \mu_0 \frac{N}{2\pi r} I = \mu_0 \nu I \tag{488}$$

Uveden je novi pojam podužna gustina namotaja ($\nu = N / 2\pi r$). Jedinica za podužna gustina namotaja je broj navojaka po jedinici dužine srednje linije torusa.

Kada srednji poluprečnik neograničeno raste, torus se pretvara u neograničeno dug solenoid. Kada je dužina solenoida konačna i može se smatrati velikom u poređenju sa dimenzijama poprečnog preseka, što je ekvivalentno uslovu da je poluprečnik sredine torusa znatno veći od poprečnog prečnika torusa, $d = R_2 - R_1$, prečnika $r >> d$, magnetska indukcija u unutrašnjosti solenoida određena je izrazom $B = \mu_0 \nu I$.

12.5 Amper-Laplasova formula za polje strujnog elementa

Amper-Laplasova formula definiše magnetsku indukciju u okolini provodnika sa jednosmernom strujom. Ilustracija Amper-Laplasove formule data je na slici 12.6.



Slika 12.6. Magnetsku indukciju u okolini provodnika kroz koji teče jednosmerna struja *I*.

Element strujnog provodnika $\mathrm{d}\vec{l}$ orijentisan je u smeru struje *I*. Struja *I* stvara u tački *M* u blizini provodnika magnetsku indukciju $\mathrm{d}\vec{B}$. Prava na kojoj se nalazi $\mathrm{d}\vec{l}$ i tačka *M* određuju ravan u kojoj se nalazi vektor koji povezuje $\mathrm{d}\vec{l}$ i tačku *M*. Radijus-vektor položaja u odnosu na $\mathrm{d}\vec{l}$ označen je sa $\vec{R}$, i zaklapa ugao α sa vektorom $\mathrm{d}\vec{l}$. Normalno na ravan koja je određena sa $\mathrm{d}\vec{l}$ i tačkom *M*, nalazi se vektor $\mathrm{d}\vec{B}$ koji može da se odredi sledećom relacijom:

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\vec{l} \times \overrightarrow{R_0}}{R^2} \tag{489}$$

Uvedena je oznaka $\overrightarrow{R_0}$ za ort vektora $\vec{R}$. Modul vektora magnetske indukcije se određuje iz prethodne relacije:

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}l \sin\alpha}{R^2} \tag{490}$$

Pravac vektora magnetske indukcije je normalan na površinu koju definišu $\mathrm{d}\vec{l}$ i $\vec{R}$, a smer kao što to predviđa vektorski proizvod.

Amper-Laplasova formula je ustanovljena intuitivno, a potvrđena je u svim slučajevima kada se primenjuje za izračunavanje magnetskih polja konačnih strujnih kontura.

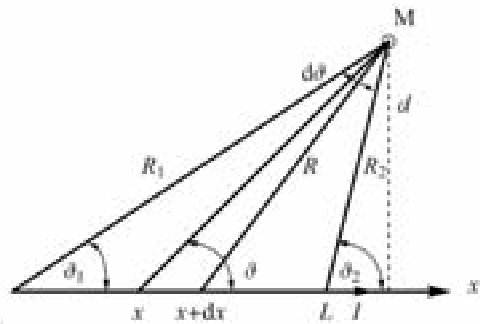
12.5.1 Polje pravog strujnog provodnika ograničene dužine

Posmatrajmo provodnik dužine *L*, postavljen duž *x*-ose, kroz koji protiče struja *I* u pravcu i smeru *x*-ose (kao što je ilustrovano na slici 12.7.). U tački M, na visini *d* iznad *x*-ose, element provodnika d*x* sa strujom *I* stvara, prema Amper-Laplasovoj formuli, elementarnu magnetsku indukciju koja je normalna na ravan koju čine *x* osa i tačka M, a na slici 12.7. ima smer ka nama (smer je ilustrovan u trodimenzionom prostoru na slici 12.6). Modul se dobija po sledećoj formuli:

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}x \sin\upsilon}{R^2} \tag{491}$$

Da bi se uprostio prethodni izraz koji sadrži tri promenljive (x, υ i R), uvode se sledeće smene:

$$\begin{aligned} R\mathrm{d}\upsilon &= \mathrm{d}x \sin\upsilon \\ \frac{d}{R} &= \sin\upsilon \end{aligned} \tag{492}$$



Slika 12.7. Pravi provodnik konačne dužine L kroz koji teče struja *I*.

Kako se ovde radi o provodniku konačne dužine L, potrebno je izvršiti integraljenje po svim segmentima provodnika. Najjednostavnije je da se integracija predstavi po uglu υ u granicama $\upsilon_1 < \upsilon < \upsilon_2$ od početka do kraja provodnika L. Konstantan deo može da se izvuče ispred integrala, tako da ostaje da se integracija obavi samo po uglu koji tačka M zaklapa sa krajevima provodnika:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \sin\upsilon d\upsilon \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi d}(\cos\upsilon_1 - \cos\upsilon_2) \end{aligned} \tag{493}$$

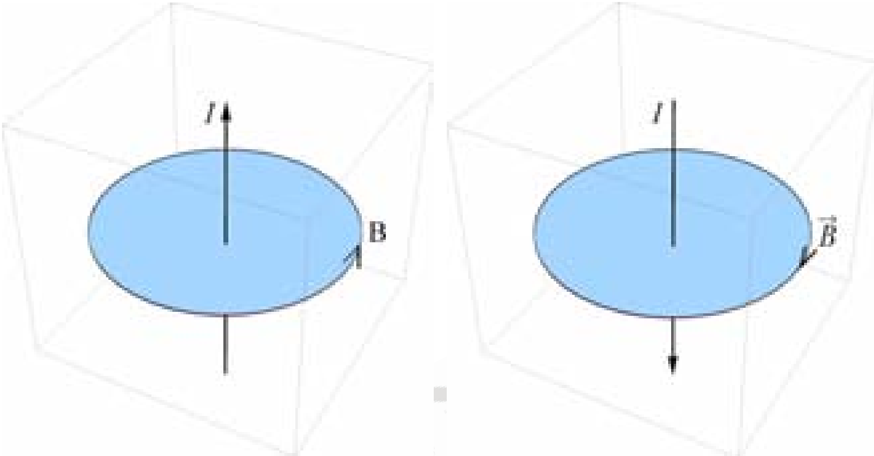
Prethodni izraz daje vrednost magnetske indukcije u tački M koja se nalazi na rastojanju d od x-ose (rastojanje od prave se računa tako što se posmatra pod uglom od 90^o u odnosu na pravu na kojoj se nalazi provodnik dužine L).

Pretpostavimo da je provodnik veoma dugačak, teorijski beskonačno dugačak, tako što se dužina provodnika L beskonačno produži, tada uglovi pod kojima se vidi tačka M sa krajeva beskonačno dugačkog provodnika teže ka $\upsilon_1 \to 0$ i $\upsilon_1 \to \pi$. Sada može da se odredi vrednost magnetske indukcije za polje u okolini beskonačno dugog pravog provodnika kroz koji teče jednosmerna struja I:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \tag{494}$$

Ukoliko se tačka nalazi na rastojanju u blizini provodnika tako da je rastojanje od provodnika značajno manje od dužine provodnika, tada se ova relacija može koristiti kao aproksimativna i za provodnike konačne dužine.

Prethodni izraz se naziva Bio-Savarov zakon i on određuje modul magnetske indukcije. Laplasova formula određuje pravac i smer polja, kao što je ilustrovano na slici 12.8.



Slika 12.8. Magnetsko polje beskonačnog provodnika kroz koji teče jednosmerna struja *I*.

Izgled magnetskog polja u okolini beskonačnog pravog provodnika sa jednosmernom strujom *I* prikazan je na slici 12.8. za dva smera struje.

Orijentacija polja zavisi od smera struje, a pravilo za određivanje smera struje naziva se pravilo desne zavojnice: ako se palac desne ruke postavi u smeru struje, tada ostali prsti desne ruke određuju smer polja.

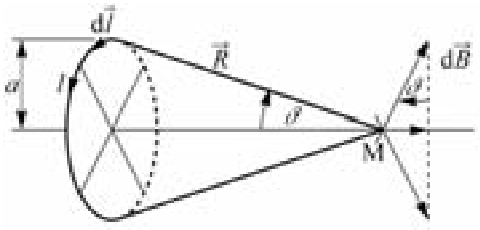
12.5.2 Polje kružne strujne konture

Posmatrajmo provodnu konturu koja se nalazi u nekoj ravni i kroz koju teče struja *I*. Ilustracija ovakve konture koja se zove strujna kotura prikazana je na slici 12.9. U tački M, koja se nalazi na osi normalnoj na ravan kružne konture sa jednosmernom strujom *I* i prolazi kroz njeno središte, magnetska indukcija predstavlja zbir indukcija $\mathrm{d}\vec{B}$ koje u tački M stvaraju elementi konture $\mathrm{d}\vec{l}$, simetrični u odnosu na centar konture i orijentisani u smeru proticanja struje. Parovi takvih elemenata stvaraju u tački M indukcije $\mathrm{d}\vec{B}$ čije se transverzalne komponente poništavaju, a aksijalne komponente sabiraju. Elementarna aksijalna komponenta takve magnetske indukcije određena je izrazom:

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}l}{4\pi R^2}\sin\nu = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}l}{R^2}\frac{a}{R} \tag{495}$$

Ukupna indukcija dobija se kao zbir svakog elementarnog dela konture $\mathrm{d}\vec{l}$, od kojih svaka ima simetričnu komponentu na delu konture koja je na suprotnoj strani konture. Ako su elementarni delovi konture veoma mali, zbir se pretvara u integral:

$$B = \frac{\mu_0 a I}{4\pi R^2}\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}l = \frac{\mu_0 a^2 I}{2R^3} \tag{496}$$



Slika 12.9. Kružna kontura poluprečnika *a* kroz koju teče jednosmerna struja *I*.

Kada se rastojanje elementarnog dela konture iskaže preko rastojanja tačke M od centra konture, ovaj izraz može da se napiše u sledećem obliku:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{\left(a^2 + d^2\right)^{3/2}} \tag{497}$$

12.5.3 Polje na osi solenoida

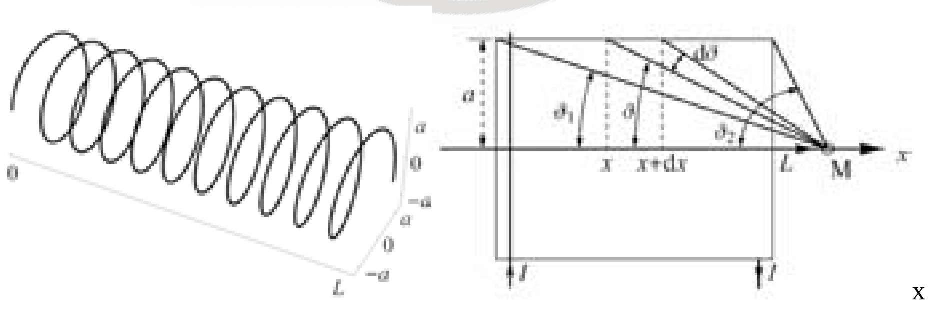
Solenoid je provodna žica koja je namotana oko zamišljenog valjka dužine L i poluprečnika a. Na krajeve solenoida se priključuje električno kolo koje proizvodi struju I, kao što je prikazano na slici 12.10. levo.

Provodna žica ima konačni poprečni presek, tako da gusto namotana provodna žica može da ima konačan broj navojaka oko valjka. Može da se uvede novi pojam, podužna gustina namotaja, koja pokazuje koliko je namotaja namotano na solenoidu dužine L. Podužna gustina namotaja se meri u jedinicama 1/m:

$$\nu = \frac{N}{L} \tag{498}$$

Kroz elemenat solenoida dužine dx teče struja:

$$\nu I \mathrm{d}x = \frac{NI}{L} \mathrm{d}x \tag{499}$$



Slika 12.10. Za solenoid dužine *L* i poluprečnika *a*, sa *N* navojaka (levo), skica za proračun magnetske indukcije kada kroz solenoid protiče jednosmerna struja *I* (desno).

Svaki strujni element solenoida stvara u tački M magnetsku indukciju:

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 a^2}{4R^3}\frac{NI}{L}\mathrm{d}x \tag{500}$$

Rezultantna magnetska indukcija u tački M može da se odredi integracijom, a najjednostavniji način je da se elementarna magnetska indukcija iskaže preko ugla:

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 a^2}{2}\frac{\sin^2\vartheta}{a^2}\frac{NI}{L}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sin\vartheta} = \frac{\mu_0 NI}{2L}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \tag{501}$$

Vrednost integrala zavisi od ugla koji tačka M zaklapa sa prvim i poslednjim navojem solenoida:

$$B = \frac{\mu_0 \nu I}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{\mu_0 \nu I}{2}(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2) \tag{502}$$

Ako se posmatra solenoid čija je dužina značajno veća od rastojanja tačke M od krajeva solenoida, i tačka se nalazi u solenoidu, što teorijski može da pretpostavi da je dužina solenoida beskonačna ($L \to \infty$), uglovi će težiti $\vartheta_1 \to 0$ i $\vartheta_2 \to \pi$, odakle se dobija:

$$B = \frac{\mu_0 \nu I}{2}(\cos 0 - \cos\pi) = \mu_0 \nu I \tag{503}$$

Ovaj izraz dobijen pomoću Amperovog zakona ima praktični značaj.

12.6 Strujna kontura u magnetskom polju

Neka se u homogenom magnetskom polju indukcije B_0 nalazi kruta kontura stranica *a* i *b* (koja ima površinu *S*=*ab*) a kroz koju protiče jednosmerna struja *I*. Površina konture $\vec{S}$ zaklapa ugao ϑ sa pravcem magnetskog polja $\overrightarrow{B_0}$, kao što je pokazano na slici 12.11.

Na stranice konture deluju Lorencove sile u naznačenim smerovima kao na slici. Sile koje deluju na paralelne strane jednake su po intenzitetu, ali su suprotnih smerova. Sile F_1 koje deluju na stranice *b* imaju istu napadnu liniju; ove sile se poništavaju (pošto je kontura kruta, ne može da dođe do pomeranja konture niti do raskidanja konture). Sile F koje deluju na stranice a nemaju istu napadnu liniju, čine spreg sila koji teži da okrene konturu u smeru kazaljke na satu (da je kontura učvršćena, ona ne bi mogla da se okreće; u ovom primeru pretpostavljamo da kontura može da se okreće oko ose koja je normalna na magnetskog polja $\overrightarrow{B_0}$). Moment sprega ovih sila je isti

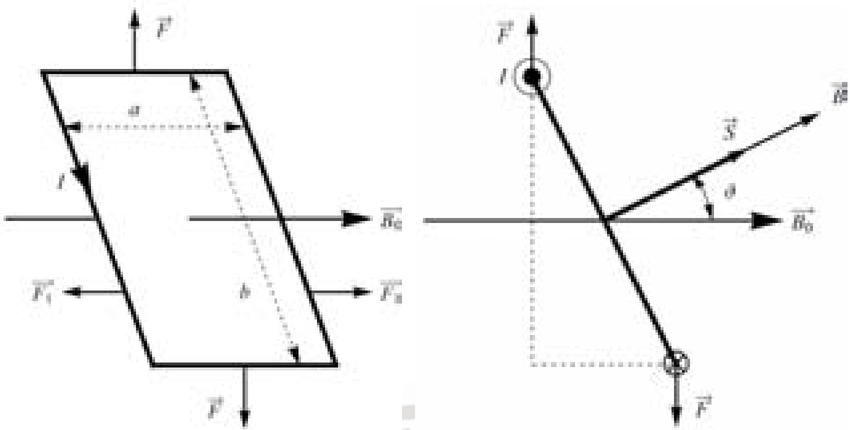
$$T = Fb\sin\vartheta \tag{504}$$

Sila F se može odrediti iz sledećeg izraza

$$\vec{F} = I\vec{a}\times\overrightarrow{B_0} \tag{505}$$

Ugao između $\vec{a}$ i $\overrightarrow{B_0}$ je π/2, tako da se može izračunati modul sile:

$$F = IaB_0 \tag{506}$$



Slika 12.11. Kruta strujna kontura u homogenom magnetskom polju (levo), (desno).

Za moment sprega sada se dobija

$$T = IabB_0 \sin\vartheta = ISB_0 \sin\vartheta \tag{507}$$

Površina $S = ab$ označava površinu konture. Prethodni izraz može da se napiše i u vektorskom obliku:

$$\vec{T} = I\vec{S} \times \vec{B_0} \tag{508}$$

Na slici 12.11. vektor površine $\vec{S}$ je orijentisan u smeru magnetske indukcije $\vec{B}$ koju stvara struja kroz konturu I (kada posmatramo sliku 12.11 desno, tačka u krugu poprečnog preseka provodnika • pokazuje da je smer struje ka nama, a znak × u krugu poprečnog preseka provodnika daje smer struje od nas). Spreg sila teži da postavi konturu u položaj maksimalnog fluksa magnetske indukcije B_0 kroz konturu, odnosno da postavi vektor $\vec{B}$ u pravac i smer vektora $\vec{B_0}$. Jedinica za moment sprega je Nm.

12.7 Magnetsko polje u prisustvu materije

Do sada je analizirano magnetsko polje u vakuumu, u odsustvu bilo kakve supstance. Kada se magnetsko polje primeni na materiju, onda se mora voditi računa o tome da se materija zamišlja kao skup atoma. U ovoj knjizi usvojićemo model atoma po Borovoj teoriji, koji se sastoji od pozitivnog nepokretnog jezgra i negativno naelektrisanih elektrona koji kruže oko jezgra.

Kruženje elektrona oko jezgra može se smatrati jednom kružnom strujom jačine I. Ova kružna struja stvara sopstveno magnetsko polje. Kada se na neku supstancu primeni spoljašnje magnetsko polje indukcije B_0, onda na svaku takvu strujnu konturu svakog atoma deluje spreg sila. Ako se sa *S* predstavi površina strujne konture, za atome se definiše veličina koja se naziva magnetski moment elektrona

$$\vec{m} = I\vec{S} \tag{509}$$

Magnetski moment elektrona se meri u jedinicama Am^2. Ako se prethodni izraz unese u izraz za moment sile koja deluje na atom u spoljašnjem magnetskom polju indukcije B_0 dobija se

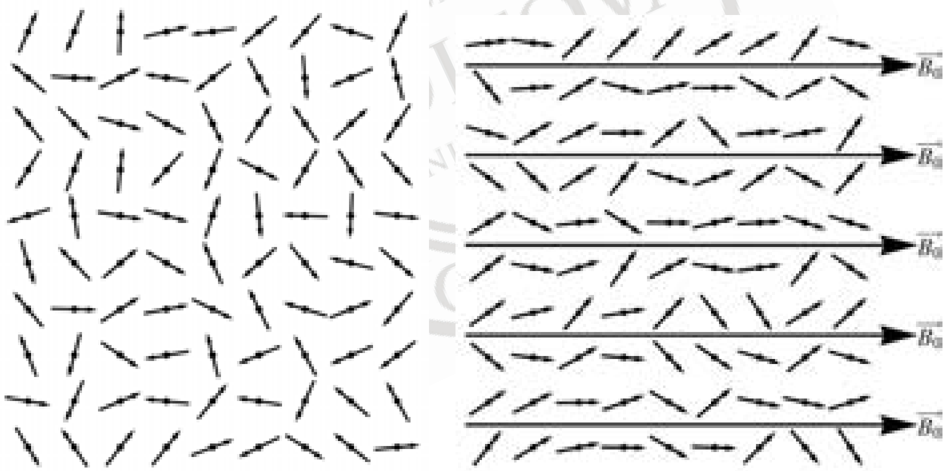
$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B_0} \tag{510}$$

Vektorski zbir magnetskih momenata elektrona po jedinici zapremine materije daje makroskopsku veličinu koja se naziva vektor magnetizacije;

$$\vec{M} = \frac{\sum \vec{m}}{\Delta V} \tag{511}$$

Jedinicama za vektor magnetizacije je A/m.

U odsustvu magnetskog polja magnetski momenti elektrona su slučajno orijentisani u prostoru, zbog čega je njihova rezultanta jednaka nuli, odnosno, vektor magnetizacije jednak je nuli, $\vec{M} = 0$, kao što je prikazano na slici 12.12. levo.



Slika 12.12. Orijentacije magnetskih momenata elektrona levo u odsustvu i desno u prisustvu magnetskog polja indukcije $\vec{B_0}$.

Kada se na neku supstancu primeni magnetsko polje indukcije B_0, na atome deluje moment koji orijentiše magnetske momente elektrona u smeru B_0, zbog čega vektor magnetske indukcije $\vec{M}$ više nije jednak nuli. Unutar supstance se dobija dodatna magnetska indukcija $\vec{B'}$, proporcionalna vektoru magnetizacije

$$\vec{B'} = \mu_0 \vec{M} \tag{512}$$

Koeficijent proporcionalnosti μ_0 odgovara elementarnim atomskim strujama koje se nalaze u vakuumu, zato što se u modelu atoma pretpostavlja da je međuatomski prostor prazan.

Rezultujuće magnetsko polje je jednako zbiru $\vec{B_0}$ i $\vec{B'}$

$$\vec{B} = \vec{B_0} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 \left(\frac{\vec{B_0}}{\mu_0} + \vec{M} \right) \tag{513}$$

Može da se uvede nova veličina, koja se naziva vektor jačine magnetskog polja $\vec{H} = \vec{B_0} / \mu_0$, tako da prethodni izraz postaje:

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right) \tag{514}$$

Jedinica za jačinu magnetskog polja je A/m. Iz prethodnog izraza se za jačinu magnetskog polja može izvesti sledeći izraz

$$\vec{H} = \frac{\vec{B_0}}{\mu_0} - \vec{M} \tag{515}$$

Sada može da se formuliše generalisani oblik Amperovog zakona:

$$\oint_C \vec{H}\, \mathrm{d}\vec{l} = \sum_{k=1}^{n} I_k \tag{516}$$

U odsustvu supstancije ($\vec{M} = 0$) prethodni izraz se svodi na izraz koji pokazuje da je linijski integral vektora magnetske indukcije po proizvoljnoj konturi *C* proporcionalan zbiru jednosmernih struja koje ta kontura obuhvata.

Vektor magnetske indukcije proporcionalan je jačini magnetskog polja

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \tag{517}$$

gde je χ magnetska susceptibilnost neimenovan broj.

Da bi eliminisali *M* iz prethodnog izvođenja, prethodni izraz se koristi da se svuda gde je *M* zameni sa *H*; stoga se dobija:

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \tag{518}$$

Uvodi se novi pojam magnetski permeabilitet supstancije, μ, što omogućava da se dobije jednostavniji izraz:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{519}$$

Relativni magnetski permeabilitet μ_r je neimenovan broj:

$$\mu_r = 1 + \chi = \frac{\mu}{\mu_0} \tag{520}$$

Relativan magnetski permeabilitet pokazuje koliko puta je veći magnetski permeabilitet određene supstance od magnetskog permeabiliteta vakuuma.

Postoje tri vrste supstanci u zavisnosti od veličine relativnog magnetskog permeabiliteta:

$$\mu_r \begin{cases} <1, & \text{dijamagnetski} \\ >1, & \text{paramagnetski} \\ >>1, & \text{feromagnetski} \end{cases} \tag{521}$$

Kod dijamagnetskih materijala magnetski momenat elektrona jednak je nuli u odsustvu spoljašnjeg magnetskog polja. Primena spoljašnjeg polja izaziva indukciju struje koja stvara, sa svoje strane, magnetsko polje koje je, prema Lorencovom pravilu, suprotne orijentacije od polja koje ga prouzrokuje. Zato se primenom polja na dijamagnetike dobija rezultujuće polje manje od primenjenog polja, $B = \mu_r B_0 < B_0$. Ovaj efekat se javlja kod svih materijala, ali je slabije izražen od paramagnetizma i zato se zapaža samo kod materijala koji nisu paramagnetski. U tabeli 12.1 prikazana je magnetska susceptibilnost za nekoliko dijamagnetskih materijala.

Tabela 12.1. Magnetska susceptibilnost nekih dijamagnetskih materijala pri sobnoj temperaturi

Vrsta materijala	$\chi = \mu_r - 1$
olovo	$-3{,}2\cdot10^{-5}$
srebro	$-2{,}6\cdot10^{-5}$
bizmut	$-1{,}7\cdot10^{-5}$
etil alkohol	$-1{,}3\cdot10^{-5}$
bakar	$-9{,}7\cdot10^{-6}$
ugljen-dioksid (1 atm)	$-1{,}1\cdot10^{-8}$
azot (1 atm)	$-5{,}4\cdot10^{-9}$

Kod paramagnetskih materijala magnetski momenat elektrona postoji i u odsustvu spoljašnjeg magnetskog polja. Za takve atome se kaže da su polarni. U odsustvu spoljašnjeg magnetskog polja magnetski momenti elektrona su slučajno orijentisani, a kada se primeni spoljašnje polje, onda dolazi do njihovog uređivanja i stoga do povećanja rezultujućeg polja, $B = \mu_r B_0 > B_0$. U tabeli 12.2 prikazana je magnetska susceptibilnost za neke paramagnetske materijale (ovaj primer je prikazan na slici 12.12.).

Kretanje atoma pod dejstvom toplote u supstancama remeti uređen raspored atoma u prisustvu spoljašnjeg magnetskog polja, što je razlog da se rezultujuća magnetska indukcija smanjuje na višim temperaturama. Vezu između vektora magnetizacije i temperature ustanovio je Pjer Kiri.

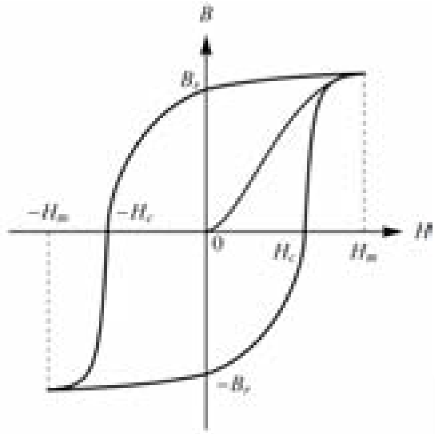
Tabela 12.2. Magnetska susceptibilnost nekih paramagnetskih materijala pri sobnoj temperaturi

Vrsta materijala	$\chi = \mu_r - 1$
Gd_2O_3	$1{,}2\cdot10^{-2}$
$CuCl_2$	$3{,}5\cdot10^{-4}$
hrom	$3{,}3\cdot10^{-4}$
volfram	$6{,}8\cdot10^{-5}$
aluminijum	$2{,}2\cdot10^{-5}$
magnezijum	$1{,}2\cdot10^{-5}$
kiseonik (1 atm)	$1{,}9\cdot10^{-6}$
vazduh (1 atm)	$3{,}6\cdot10^{-7}$

Feromagnetizam se javlja u materijalima koji imaju vektor magnetizacije različit od nule (polarni materijali) čak i u odsustvu spoljašnjeg magnetskog polja. Kod feromagnetskih materijala je jak uticaj između obližnjih atoma, tako da kada se jednom urede, održavaju poredak i po ukidanju spoljašnjeg magnetskog polja. Supstanca ostaje trajno namagnetisana. Primeri ovakvog materijala su gvožđe, kobalt, nikal i njihove legure. Uzajamno dejstvo među susednim atomima koje izaziva feromagnetizam može da se oslabi povišavanjem temperature supstancije. Temperatura pri kojoj feromagnetici postaju paramagnetici zove se Kirijeva temperatura.

Pojačanje rezultujućeg polja u feromagneticima pri promeni spoljašnjeg magnetskog polja može da bude značajno.

Rezultujuća magnetska indukcija može da postigne vrednosti 10^3 do 10^4 puta veće od vrednosti magnetske indukcije spoljašnjeg magnetskog polja. Magnetski permeabilitet μ feromagnetskih materijala nije konstanta, niti je ukupna magnetska indukcija B linearna funkcija jačine magnetskog polja H. Zavisnost $B = B(H)$ se zove kriva magnećenja i ima oblik prikazan na slici 12.13. Pri povećanju jačine primarnog magnetskog polja H ukupna magnetska indukcija nelinearno raste do vrednosti zasićenja, koja se postiže pri vrednosti polja H_m. Pri daljem povećanju polja, B ostaje nepromenjeno. Pri smanjenju polja na nultu vrednost, B pada na vrednost B_r remanentne indukcije i tu vrednost supstanca zadržava. Kaže se da je feromagnetik namagnetisan i da je postao permanentni (stalni) magnet. Može da se razmagnetiše primenom spoljašnjeg polja suprotne orijentacije do vrednosti $-H_c$ koercitivnog polja pri kojoj pada na nulu. Ako bi se nastavilo sa povećanjem spoljašnjeg polja do vrednosti $-H_m$, materija bi se opet namagnetisala i zadržala vrednost $-B_r$ posle ukidanja spoljašnjeg polja. Tako se dobija ciklična kriva magnećenja koja je ilustrovana na slici 12.13., a koja se naziva histerezisni ciklus.



Slika 12.13. Histerezisni ciklus i kriva magnetizacije.

12.8 Faradejev zakon elektromagnetske indukcije

Posmatrajmo prav provodnik koji se kreće brzinom *v* popreko na linije sila magnetskog polja indukcije *B* koji stvara stalni magnet. Zbog ovakvog kretanja, slobodni nosioci naelektrisanja u provodniku (elektroni) izloženi su dejstvu Lorencove sile:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = -e\vec{v} \times \vec{B} \tag{522}$$

Sila koja deluje na elektrone (koji se kreću zato što se kreće provodnik) potiskuje ih na jednu stranu provodnika, zbog čega postoji manjak elektrona na drugoj strani. Ako se elektroni kreću u provodniku, to može da se interpretira kao da postoji električno polje *E* na krajevima provodnika. To polje može da se izrazi na sledeći način:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}}{q} = \vec{v} \times \vec{B} \tag{523}$$

Može da se uvede novi pojam, elementarna indukovana elektromotorna sila dε na delu provodnika dužine d*l* koja iznosi

$$\mathrm{d}\varepsilon = \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\mathrm{d}\vec{l} \tag{524}$$

Ukupna elektromotorna sila koja se stvara na delu provodnika između dve tačke, na primer između tačke A i tačke B može da se odredi integraljenjem elementarnih elektromotornih sila:

$$\varepsilon = \int_A^B \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\mathrm{d}\vec{l} \tag{525}$$

Koristeći osobine mešovitog vektorskog proizvoda, prethodni izraz može da se napiše u sledećem obliku:

$$\varepsilon = -\int_{A}^{B} \vec{B}\left(\vec{v} \times \mathrm{d}\vec{l}\right) \tag{526}$$

Ako se radi o zatvorenoj konturi, tada se dobija:

$$\varepsilon = \oint_{C} \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\mathrm{d}\vec{l} \tag{527}$$

Prethodna relacija može da sa izrazi preko magnetskog fluksa koji odgovara površinu koju obuhvati provodnik:

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \tag{528}$$

Prethodni izraz predstavlja Faradejev zakon elektromagnetske indukcije.

Indukovana elektromotorna sila se stvara kada se menja fluks u vremenu kroz provodnu konturu. Jedna od mogućnosti je da se kontura kreće u stalnom magnetskom polju. Druga mogućnost jeste da se provodna kontura ne kreće, ali se menja magnetsko polje (na primer magnetsko polje se menja jer ga stvara kalem kroz koji teče promenljiva struja).

Razlog proticanja struje, pojava viška elektrona na jednom kraju provodnika i manjak elektrona na drugom kraju provodnika je indukovana elektromotorna sila.

12.9 Lencovo pravilo

Zamislimo kruti žičani ram po kome klizi pravi provodnik i neka se taj ram nalazi u homogenom magnetskom polju indukcije *B*'. Iako je kontura u homogenom polju, zatvorena kontura koju čini ram i pokretni provodnik menjaju površ zatvorene konture, što je ekvivalentno promeni fluksa kroz konturu. Na osnovu Faradejovog zakona, promena fluksa stvara elektromotornu silu. Postojanje indukovane elektromotorne sile je uzrok proticanja struje kroz žičani ram počev od jedne tačke dodira pokretnog provodnika preko rama do druge tačke pokretnog provodnika.

Struja koja se stvara u žičanom ramu, na osnovu Bio-Savarovog zakona, stvara magnetsko polje indukcije *B*''. Zavisno od toga u kom smeru se kreće pokretni provodnik i da li se povećava ili smanjuje površina konture koju čine ram i pokretni provodnik, magnetsko polje *B*'' se sabira ili oduzima od *B*'.

Lenc je formulisao pravilo po kome je indukovano magnetsko polje takve orijentacije da se suprotstavlja promeni koja ga izaziva.

U slučaju kada se površina konture smanjuje, zbog čega se smanjenje fluks, indukcija sekundarnog polja (*B*'') doprinosi fluksu kroz konturu, tako što se suprotstavlja njegovom smanjenju.

U slučaju da se povećava površina konture, zbog čega se povećava fluks, indukcija *B*'' je takva da se suprotstavlja povećanju fluksa.

12.10 Koeficijent induktivnosti

Neka postoje dve nezavisne kružne konture (C_1 i C_2) sa jednosmernim strujama (I_1 i I_2). Svaka od njih na svojoj osi stvara magnetsku indukciju. Indukcija jedne konture stvara kroz drugu konturu magnetski fluks, koji zavisi od geometrijskih parametara kontura i od struje kroz drugu konturu. Može da se definiše koeficijent proporcionalnosti L_{12} koji se naziva koeficijent međusobne induktivnosti (ili samo međusobna induktivnost):

$$\phi_{12} = L_{12} I_2 \tag{529}$$

Međusobna induktivnost zavisi samo od geometrijskih parametara kontura. Koeficijent međusobne induktivnosti ima fizičku prirodu količnika magnetskog fluksa i struje, zbog čega je jedinica henri (H=Wb/A).

Ako postoji više kontura kroz koje protiče jednosmerna struja, ukupan magnetski fluks kroz jednu konturu biće jednak zbiru svih flukseva, koji potiču od svih kontura (uključujući i konturu za koju se računa fluks, kao i fluks koji potiče od nekih drugih polja). Ako su struje u svim ostalim konturama jednake nuli, osim u onoj za koju se računa fluks, tada se on može izraziti preko koeficijenta sopstvene induktivnosti (skraćeno sopstvena induktivnost).

Induktivnost se može izračunati za različite konstrukciji, što zavisi od međusobnih uticaja namotaja i dimenzija (solenoid bez jezgra, solenoid sa feromagnetnim jezgrom, torusni kalem, koaksijalni kabl ili dvožični kabl). Za solenoid koji ima vazduh (permeabilnost μ_0) kao cilindar (površine poprečnog preseka S i dužine d) na koji se mota N navojaka provodne žice, induktivnost može da se izračuna po sledećoj formuli:

$$L = \mu_0 K N^2 \frac{S}{d} \tag{530}$$

Konstanta K može da bude 1, što zavisi od dimenzija kalema.

Induktivnost koja se određuje na ovaj način je jedan od tri elementarna pasivna elementa. Zavisnost napona na kalemu i struje kroz kalem već je opisan a ranijim poglavljima (kola sa promenljivim strujama, kola sa naizmeničnim strujama).

U stručnoj literaturi se mogu naći brojni primeri korišćenja kalema, ali i spregnutih kola, gde se koristi međusobna induktivnost da bi se realizovali različiti efekti, za koje bi inače bio potreban veliki broj električnih elemenata.

Pojava integrisane tehnologije omogućava da se efekti koje stvaraju kalemovi dobiju korišćenjem aktivnih komponenti i kondenzatora, što je neuporedivo jednostavnije za korišćenje u masovnoj proizvodnji električnih uređaja. Jedan od razloga da se kalemovi manje koriste u uređajima koji obrađuju govorni opseg učestanosti jeste taj da su tolerancije često previše široke da bi se osigurao ispravan rad u realnim uslovima (uticaj temperature, vlažnosti).

Sa druge strane, kada nije potrebna prevelika tačnost induktivnosti, tada su elementi praktično nezamenljivi, ka što je primer transformatora i prigušnica. Međutim, čak i u ovoj oblasti se pojavljuju efikasni uređaji kao što su DC-DC konvertori ili kola na bazi tranzistora i kondenzatora.

Literatura

1. Miodrag Popović, Osnovi elektronike za studente Odseka za softversko inženjerstvo, Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 2006.
2. Allan R. Hambley, Electrical Engineering – Principles and Applications, peto izdanje, Department of Electrical and Computer Engineering, Michigan Technological University, Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 2011.
3. Dragan Kandić, Elektrotehnika, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 2008.
4. Dragan Kandić, Elektrotehnika, skripta, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 2013.
5. Spasoje Tešića i Dragan Vasiljevića, Osnovi elektronike, Beograd, 2009.
6. Antonija Đorđevića, Osnovi elektrotehnike: Elektrostatika, Stalne struje, Elektromagnetizam i Kola promenljivih struja, Akademska misao, Beograd, 2010-2013.
7. Veljko Georgijević, Jovan Cvetić, Božidar Stanić i drugi, Predavanja iz fizike, Građevinski fakultet, Beograd, 2005.

Sadržaj

Na osnovu člana 23. stav 2. tačka 7. Zakona o porezu na dodatu vrednost („Službeni glasnik RS", br. 84/2004, 86/2004 (ispr.), 61/2005, 61/2007 i 93/2012), Odlukom Senata Univerziteta Singidunum, Beograd, broj 260/07 od 8. juna 2007. godine, ova knjiga je odobrena kao osnovni udžbenik na Univerzitetu.

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

621.3(075.8)
537.3(075.8)
537.8(075.8)

ЛУТОВАЦ, Мирослав, 1957-
Elektrotehnika / Miroslav Lutovac. - 1. izd. - Beograd : Univerzitet Singidunum, 2015 (Loznica : Mobid). - 223 str. : ilustr. ; 24 cm

Tiraž 300. - Bibliografija: str. 216.

ISBN 978-86-7912-611-5

a) Електротехника b) Електромагнетизам

COBISS.SR-ID 217436940