Ako su svi vremenski intervali istog trajanja ravnopravni, odnosno u vremenskim intervalima istog trajanja koka snese isti broj jaja i pritom ni u jednom vremenskom intervalu ne može biti snesen negativan broj jaja, onda je to funkcija direktne proporcionalnosti.

Izaberimo neki trenutak t_0 kao početni. Ako je $f(t)$ broj jaja koji jedna koka snese u vremenskom intervalu $[t_0, t_0 + t)$, onda se za ma koje $x, y > 0$ u intervalu $[t_0, x + y)$ snese onoliko jaja koliko se snese u intervalima $[t_0, x)$ i $t_0 + x, t_0 + x + y)$, koji su disjunkjtni. Pritom se u intervalu $[t_0 + x, t_0 + x + y)$ snese isto onoliko jaja koliko i u intervalu $[t_0, t_0 + y)$, pa je

$$f(x + y) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

Pritom se ni za jedno $x > 0$ u intervalu $[t_0, t_0 + x)$ ne moče sneti negativan broj jaja, pa je

$$f(x) \geqslant 0. \tag{2}$$

Iz jednačine (1) se indukcijom dokazuje da za svaki prirodan broj m i realan broj $x > 0$ važi

$$f(mx) = m\, f(x). \tag{3}$$

Dokažimo to.

Baza indukcije:

$$f(1 \cdot x) = f(x) = 1 \cdot f(x).$$

Induktivni korak: Induktivna pretpostavka nam je (3).

$$f((m + 1)x) = f(mx + x) = f(mx) + f(x) = m\, f(x) + f(x) = (m + 1)f(x).$$

Pritom je drugi prelaz izvršen na osnovu (1), a treći na osnovu induktivne pretpostavke. Iz (3) sledi da za svaki prirodan broj n važi

$$f(x/n) = f(x)/n. \tag{4}$$

Dokažimo to.

$$f(x)/n = f(n(x/n))/n = (n\, f(x/n))/n = f(x/n).$$

Iz (3) i (4) sledi da za ma koje prirodne brojeve m i n važi

$$f((m/n)x) = (m/n)f(x). \tag{5}$$

Dokažimo to.

$$f((m/n)x) = f(m(x/n)) = m\, f(x/n) = m(f(x)/n) = (m/n)f(x).$$

Iz (5) sledi da za ma koji racionalan broj $q > 0$ važi

$$f(qx) = q\, f(x)$$

i posebno za $x = 1$

$$f(q) = q\, f(1).$$

Dokažimo da je funkcija f monotono neopadajuća. Neka su x i y realni brojevi takvi da je $0 < x < y$. Iz $x < y$ sledi da je $y - x > 0$. Važi

$$f(y) = f(x + (y - x)) = f(x) + f(y - x) \geqslant f(x). \tag{6}$$

Drugi prelaz sledi iz (1), a treći iz (2). Iz (6) sledi da je

$$f(y) \geqslant f(x),$$

odnosno

$$f(x) \leqslant f(y).$$

Dakle, funkcija f je monotono neopadajuća. Neka je a bilo koji pozitivan realan broj. Za ma koje racionalne brojeve u i v takve da je $0 < u < a < v$ važi

$$f(u) \leqslant f(a) = f(v),$$

odnosno

$$u\, f(1) \leqslant f(a) \leqslant v\, f(1).$$

Pošto je skup racionalnih brojeva svuda gust u skupu realnih brojeva, postoje nizovi pozitivnih racionalnih brojeva $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ takvi da prvi teži broju a sa leve strane, a drugi sa desne. Iz

$$u_n < a < v_n$$

sledi

$$f(u_n) \leqslant f(a) \leqslant f(v_n),$$

odnosno

$$u_n\, f(1) \leqslant f(a) \leqslant v_n\, f(1).$$

Puštajući u poslednjoj formuli da [tex]n[/tex] teži beskonačnosti, zaključujemo da je

$$a\, f(1) \leqslant f(a) = a\, f(1),$$

odnosno

$$f(a) = a\, f(1),$$

odnosno

$$f(x) = kx \quad \text{za } k = f(1).$$

Pretpostavili smo da se u svim vremenskim intervalima jednakog trajanja snese jednak broj jaja. Neka su t_1 i t_2 realni brojevi takvi da je $t_1 < t_2$. Iz $t_1 < t_2$ sledi da je $t_2 - t_1 > 0$. U intervalu $[t_1, t_2)$ se snese isto onoliko jaja, koliko i u intervalu $[t_0, t_0 + (t_2 - t_1))$, odnosno $f(t_2 - t_1) = k(t_2 - t_1)$.

Dakle, broj snesenih jaja u bilo kom intervalu je srazmeran trajanju tog vremenskog intervala.