PRIPREME ZA PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

# TRIGONOMETRIJSKEJEDNAČINE INEJEDNAČINE

11. vikend

TEORIJSKI UVOD

Trigonometrijske i inverzne trigonometrijske funkcije.

Za oštre uglove trigonometrijske funkcije moemo definisati iz pravouglog trougla. Koristei ”trigonometrijski krug” trigonometrijske funkcije moemo definisati i za ostale vrednosti iz segmenta [0*,*2*π*]. Ako još uzmemo u obzir i da su sin i cos 2*π* periodične funkcije, a tg i ctg *π* periodične, mi imamo definisane ove funkcije na celom skupu R, izuzev tačaka odnosno *kπ* za ctg.

Da bismo definisali inverzne trigonometrijske funkcije, moramo prvo videti gde je uopšte to mogue. Naime, inverznu funkciju nekoj moemo definisati samo u slučaju bijekcija, a nijedna trigonometrijska funkcija to nije.

Posmatrajmo prvo funkciju sin. Ova funkcija je rastua na segmentu , pa je na tom segmentu 1 − 1.

Slika tog segmenta je segment [−1*,*1], pa je sada funkcija  bijekcija, pa postoji ǌoj inverzna funkcija koja se zove *arkussinus*, u oznaci arcsin. Domen ove funkcije je, dakle, segment [−1*,*1].

Slično definišemo i funkciju inverznu kosinusu, samo emo cos posmatrati tamo gde je on injekcija. Dogovorno se posmatra segment [0*,π*]. Na isti način se onda definiše funkcija *arkuskosinus*, u oznaci arccos.

Funkcije *arkustangens* i *arkuskotangens* se definišu kao inverzne funkcije tangensu i kotangensu na intervalima , redom. Domeni ovih funkcija su ceo skup realnih brojeva. ǋihove oznake su arctg i arcctg.

Trigonometrijske jednačine.

Iako se ugao moe meriti i u stepenima i u radijanima, jednačine i nejednačine se uvek rešavaju u radijanima, to jest u ”*π*-ovima”. Jednačina sin*x* = *a* nema rešenja ukoliko je *a >* 1 ili je *a <* −1. Ako je −1 ≤ *a* ≤ 1 onda emo obeleiti broj *a* na *y* osi i nacrtati pravu koja prolazi kroz tu (obeleenu) tačku i pronai ǌene preseke sa krugom *x*2 + *y*2 = 1. Uglavno e ih biti dva (osim ako je *a* = ±1), jedan u desnoj, i drugi u levoj poluravni. Ugao koji odgovara preseku u desnoj poluravni je arcsin*a*. Tako naša jednačina ima dva rešenja u osnovnom intervalu. To su arcsin*a* i *π*−arcsin*a*, a zbog 2*π*-periodičnosti sva rešeǌa su arcsin*a*+2*kπ* i *π* − arcsin*a* + 2*kπ*, gde je *k* proizvoǉan ceo broj. Sličo razmatraǌe moemo ponoviti i u slučaju jednačine cos*x* = *a* s tim što je sada jedno rešeǌe u gorǌoj poluravni, (arccos*a*), a drugo u doǌoj. Iz specifičnih razloga sva rešeǌa jednačine cos*x* = *a* lakše zapisujemo, to su brojevi ±arccos*a* + 2*kπ*, *k* ∈ Z.

Neki put je korisno znati rešeǌe jednačine tg*x* = *a*. Ova jednačina uvek ima tačno jedno rešeǌe u intervalu (−*π/*2*,π/*2) i to je *x* = arctg*a*. Meutim, tangens je *π*-periodična funkcija, pa su sva rešeǌa jednačine tg*x* = *a* data sa *x* = arctg*a* + *kπ*, *k* ∈ Z. Obratite paǌu: *π*, a nikako 2*π* periodična!

Ostale jednačine raznim transformacijama, smenama, itd. treba svesti na neku od ovih osnovnih.

Posmatraemo i jednu specifičnu jednačinu, koja se u nekoj formi pojavǉuje često na prijemnim ispitima. To je jednačina *a*sin*x* + *b*cos*x* = *c*. Postupak za rešavaǌe ove jednačine je sledei. Prvo podelimo celu

√ jednačinu sa *a*2 + *b*2. Dobijamo jednačinu. Koeficijenti uz sin*x* i cos*x* su takvi da je zbir ǌihovih kvdrata jednak 1, pa je prvi od ǌih sin*α*, a drugi cos*α*, za neki broj *α* ∈ [0*,π*], pa jednačina postaje . Ova jednačina ima rešeǌe kada je broj sa leve strane iz segmenta

[−1*,*1], odnosno kada je *c*2 6 *a*2 + *b*2.

Trigonometrijske nejednačine

Rešimo jednu od osnovnih nejednačina, sin*x > a*. Razlikujemo tri slučaja. Prvi: ako je *a* ≥ 1 tada jednačina nema rešeǌa. Drugi: ako je *a <* −1 tada jednačinu zadovoǉavaju svi brojevi (uglovi). Trei i najzanimǉiviji je slučaj kada je −1 6 *a <* 1. Tada se tačka *M* koja odgovara uglu *x* mora nalaziti iznad prave *y* = *a*, a to e rei da se ugao *ϕ* mora nalaziti izmeu dva rešeǌa odgovarajue jednačine, odnosno *x* ∈ (arcsin*a,π* − arcsin*a*). Doduše samo kada je *x* u osnovnom intervalu. Kada na sve to dodamo po 2*kπ*, rešeǌe e biti *x* ∈ ∪*k*∈Z(arcsin*a* + 2*kπ,π* − arcsin*a* + 2*lπ*). Kod slične, ali ne i iste nejednačine sin*x < a* treba biti posebno oprezan. Tada tačka *M* mora biti ispod prave *y* = *a*, ali nema smisla zapisati *π*−arcsin*a < x <* arcsin*a* jer je prvi broj vei od drugog! Spasonosno rešeǌe se satoji u tome što uglovi ”ne pamte koliko su se puta obrnuli oko koordinatnog početka”, to jest levoj tački sasvim komotno odgovara i ugao −*π* − arcsin*a*, pa korektno zapisana sva rešeǌa glase: *x* ∈ ∪*k*∈Z(−*π* − arcsin*a,*arcsin*a*). Slična razmatraǌa mogu se upotrebiti i ako je u pitaǌu kosinus umesto sinusa.

Nejednačina *a*sin*x*+*b*cos*x < c* se rešava slično kao odogvarajua jednačina. Umesto znaka *<* moe biti bilo koji znak nejednakosti.

ZADACI

Trigonometrijske jednačine.

1. Rešeǌe jednačine  koje pripada intervalu (0*,*3) iznosi: *x* =
2. Rešeǌe jednačine koje pripada intervalu (2*,*6), iznosi: *x* =
3. Rešeǌe jednačine koje pripada intervalu (4*π,*5*π*), iznosi: *x* =

2 *x* + (2 − √2)sin*x* − √2 = 0 su, za *k* ∈ Z, data uslovom:

1. Rešenja jednačine 2sin
	1.  B)  V) G)
2. Rešenja jednačine 2cos*x*sin2 *x* = cos*x* su data uslovom: *kπ*

A)

 V) G)

1. Rešenja jednačine (2sin*x* − 3)sin*x* = −1 su data uslovom:

|  |  |
| --- | --- |
| **607.** Koliko rešenja u intervalu [0*,*2*π*] ima jednačina sin2*x* = 0. |  |
|  A) maǌe od 3; B) 3; V) 4; G) 5;**608.** Koliko rešenja u intervalu [0*,*2*π*] ima jednačina cos(3*x/*2) = 0. | D) više od 5. |
|  A) maǌe od 3; B) 3; V) 4; G) 5;**609.** Koliko rešenja u intervalu [0*,*2*π*] ima jednačina tg*x* = sin2*x*. | D) više od 5. |
|  A) maǌe od 3; B) 3; V) 4; G) 5;**610.** Koliko rešenja u intervalu [0*,*2*π*] ima jednačina tg(2*x* − 5) = ctg(*x* + 1). | D) više od 5. |
|  A) maǌe od 3; B) 3; V) 4; G) 5; √ √**611.** Koliko rešenja u intervalu [0*,*2*π*] ima jednačina sin4*x* + 3cos4*x* = 2. | D) više od 5. |
|  A) maǌe od 3; B) 3; V) 4; G) 5;**612.** Koliko rešenja u intervalu [0*,*2*π*] ima jednačina sin*x* − cos*x* = 1. | D) više od 5. |
|  A) maǌe od 3; B) 3; V) 4; G) 5;**613.** Koliko rešenja ima jednačina sin*x* + cos*x* = 3*/*2 na segmentu [0*,π*]? | D) više od 5. |
|  A) 0; B) 1; V) 2; G) 3;**614.** Koliko rešenja ima jednačina 2sin*x*(cos*x* + sin*x*) = 1, u intervalu [0*,π/*2]. | D) više od 3. |
|  A) 0; B) 1; V) 2; G) 3; | D) više od 3. |

* 1. *x* ∈ ∅ B) V)  G)
1. Odrediti ukupan broj rešenja trigonometrijske jednačine  na segmentu [0*,*2*π*].

 A) maǌe od 3; B) 3; V) 4;G) 5; D) više od 5.

1. Odrediti broj rešenja trigonometrijske jednačine cos*x* + cos2*x* + cos3*x* + cos4*x* = 0 na segmentu [0*,*2*π*].

|  |  |
| --- | --- |
|  A) maǌe od 3; B) 3; V) 4; G) 5;**617.** Nai zbir svih rešenja jednačine cos4*x* + 6 = 7cos2*x* na intervalu (0*,*20). | D) više od 5. |
|  A) 14*π*; B) 0; V) 21*π*; G) 15*π*;**618.** Koliko rešenja u intervalu (0*,*2*π*) ima jednačina sin2 *x* + cos*x* + 1 = 0? | D) 28*π*. |
|  A) 0; B) 1; V) 2; G) 3; | D) više od 3. |

1. Odrediti koliko rešenja ima jednačina , u intervalu (−*π/*2*,π/*2),
	1. 0; B) 1; V) 2; G) 3; D) više od 3.

p

1. Odrediti koliko rešenja ima jednačina 2sin(*x* + *π/*3) = 1*/*2 + cos(*π/*6 − *x*) na segmentu [0*,*2*π*].
	1. 0; B) 1; V) 2; G) 3; D) više od 3. **621.** Izračunati zbir rešenja jednačine sin*x* + cos*x* + |sin*x* − cos*x*| = 1 u intervalu [0*,*2*π*].

 A) 0; B) 5*π/*6; V) 5*π/*3; G) 5*π/*2; D) 3*π*.

1. Odrediti za koje vrednosti realnog parametra *m* jednačina sin4 *x* − 2cos2 *x* + *m*2 = 0 ima

 bar jedno rešenje. √ √ √ √ √ √

* 1. *m* ∈ R; B) *m* ∈ (−∞*,*− 3]; V) *m* ∈ (−∞*,* 3]; G) *m* ∈ [− 3*,* 3]; D) *m* ∈ [− 2*,* 2].
1. Odrediti koliko rešenja ima jednačina cos2(*x* + *α*) − cos2(*x* − *α*) = sin2*α* u intervalu (0*,*2*π*), ako je *α* oxtar ugao.
	1. 0; B) 1; V) 2; G) 3; D) više od 3.
2. Odrediti koliko rešenja ima jednačina 21+2cos6*x* + 16sin2 3*x* = 9, na segmentu [0*,*2*π*].
	1. maǌe od 3; B) 3; V) 4; G) 5; D) više od 5.
3. Koliko rešenja ima jednačina (cos2*x*)2cos3*x*+4cos*x*−1 = (cos2*x*)−1 u [0*,π/*4]?
	1. 0; B) 1; V) 2; G) 3; D) više od 3.
4. Koliko rešenja ima jednačina ?
	1. 0; B) 1; V) 2; G) 3; D) više od 3.
5. Koliko je brojeva *α* ∈ [0*,*2*π*), tako da su cos*α* i sin*α* rešenja jednačine *x*2 + *mx* + 2*n*2 = 0, gde su *m* i *n* celi brojevi?
	1. maǌe od 3; B) 3; V) 4; G) 5; D) više od 5.
6. Za koje vrednosti realnog parametra *a* jednačina sin8 *x* + cos8 *x* = *a* ima realnih rešenja?
	1. *a* ∈ [0*,*1]; B) *a* ∈ [−1*,*1]; V) *a* = 1; G) *a* ∈ [1*/*4*,*1]; D) *a* ∈ [1*/*8*,*1].
7. Kakav odnos izmeu brojeva *a*, *b* i *c* treba da vai da bi jednačina *a*sin*x* + *b*cos*x* = *c* imala realnih rešenja?
	1. *a < b < c*; B) *a* 6 *b < c*; V) *a* + *b* 6 *c*; G) *a*2 + *b*2 6 *c*2; D) *a*2 + *b*2 ≥ *c*2.
8. Ukupan broj rešenja jednačine sin2 *x* + sin2 2*x* = 1 na intervalu (0*,*2*π*) jednak je:
	1. 2; B) 3; V) 4; G) 5; D) 6.
9. Ukupan broj rešenja jednačine  na intervalu  je:
	1. 0; B) 1; V) 2;G) 3; D) 4.
10. Rešenja jednačine  koja zadovoǉavaju uslov |*x*| *< π* ima:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  A) 1; B) 2; V) 3;**633.** Broj rešenja jednačine cos2*x* = sin*x* u intervalu [0*,*2*π*] je: | G) 4; | D) 5. |
|  A) 0; B) 1; V) 2; | G) 3; | D) 4. |

1. Broj rešenja jednačine  koja zadovoǉavaju uslov |*x*| *<* 2*π* je:
	1. 1; B) 2; V) 3; G) 4; D) 5.
2. Zbir svih rešenja jednačine 6sin*x* + 6cos2*x* = sin2*x*cos*x* + 6cos2 *x* koja pripadaju odsečku  je:
	1. −*π*; B) 0; V) ; D) 2*π*.
3. Koliko rešenja ima jednačina ?
	1. Vixe od 3; B) 3; V) 0; G) 1; D) 2.
4. Broj rešenja jednačine  u intervalu (−100*,*101) je:
	1. 127; B) 63; V) 126; G) 128; D) 64.
5. Broj rešenja jednačine  na segmentu [0*,*2*π*] je:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  A) 0; B) 1; V) 2;**639.** Broj rešenja jednačine *x*2 + *x* + 1 = cos*x* je: | G) 3; | D) Vei od 3. |
|  A) 0; B) 1; V) 2; | G) 3; | D) Vixe od 3. |

Inverzne trigonometrijske funkcije. Trigonometrijske nejednačine.

1. Na intervalu [0*,*2*π*], skup rešenja nejednačine sin2 *x* − 4sin*x* + 3 *<* 0 je:
	1. ∅ B) (0*,π*) V)  G)
2. Skup rešenja nejednačine  je opisan uslovom:
	1.  B)

 V) G)

1. Skup rešenja nejednačine  je:
	1. ∅ B) unija skupova ((6*k* − 1)*π,*(6*k* + 1)*π*)*, k* ∈ Z V) (*π,*2*π*) G)

√√

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  A) −1; B) 3*/*2;**644.** Izračunati cos(arctg1 + arcctg1). | V) 1*/*2; | G) 1; | D) 0. |
|  A) 0; B) 1;**645.** Izračunati sin(arcsin(3*/*5) + arcsin(8*/*17)). | V) −1; | G) 1*/*2; | D) 2. |
|  A) 17*/*5; B) 77*/*85;**646.** Izračunati arctg(1*/*7) + 2arctg(1*/*3). | V) 48*/*85; | G) ±3*/*5; | D) 13*/*85. |
|  A) *π/*4 + 2*kπ*; B) *π/*4; | V) *π/*2; | G) 1; | D) *π/*4 + *kπ*. |
| **647.** Izračuanti√ ctg(2arcsin(2*/*3))√. A) 2*/* 5; B) 4 5*/*9; | √ V) 5*/*20; | √ G) 4 5; | D) +∞. |

1. Koliko je sin(arccos( 3*/*2) +√arcsin( 3*/*2))?
2. Odrediti skup onih rešenja nejednačine cos2*x >* sin2*x* koja se nalaze u intervalu [0*,*2*π*].

 A) [0*,π/*4) ∪ (7*π/*4*,*2*π*]; B) [0*,π/*4) ∪ (5*π/*4*,*2*π*]; V) [0*,π/*8) ∪ (5*π/*8*,*9*π/*8) ∪ (15*π/*8*,*2*π*];

 G) (0*,π/*4) ∪ (5*π/*4*,*2*π*); D) [0*,π/*8) ∪ (5*π/*8*,*9*π/*8) ∪ (13*π/*8*,*2*π*].

1. Neka je *x* oxtar ugao. Odrediti skup rešenja nejednačine sin2*x >* cos*x*.

|  |  |
| --- | --- |
| A) (*π/*6*,*5*π/*6); B) (*π/*6*,π/*2) ∪ (5*π/*6*,π*); V) (*π/*6*,π/*2); **650.** Xta je rešenje nejednačine tg3 *x* + tg2 *x >* 1 + tg*x*? | G) (*π/*6*,π/*2]; D) (*π/*6*,π/*3). |
| A) *π/*4 + *kπ < x < π/*2 + *kπ*; B) *π/*4 + *kπ < x <* 5*π/*4 + *kπ*; G) *π/*4 + 2*kπ < x <* 5*π/*4 + 2*kπ*; D) *π/*4 + 2*kπ < x < π/*2 + 2*kπ*.**651.** Rešiti nejednačinu cos3 *x*cos3*x* − sin3 *x*sin3*x >* 5*/*8. | V) *π/*4 + *kπ < x <* 3*π/*4 + *kπ*; |
| A) (6*k* − 1)*π/*3 *< x <* (6*k* + 1)*π/*3; | B) (6*k* − 1)*π/*6 *< x <* (6*k* + 5)*π/*6; |
| V) (6*k* − 1)*π/*12 *< x <* (6*k* + 1)*π/*12; | G) (6*k* + 1)*π/*12 *< x <* (6*k* + 7)*π/*12; |

D) (6*k* + 1)*π/*6 *< x <* (6*k* − 1)*π/*6.

 √ √

1. Neka je *x* oštar ugao. Odrediti skup rešenja nejednačine sin*x* + 3cos*x >*√3. √ A) (0*,*1); B) (0*,π/*3); V) (*π/*3*,π*); G) (0*,*arccos 3); D) (0*,*arcsin 3).
2. Rešiti nejednačinu 5sin2 *x* + sin2 2*x >* 4cos2*x*.
	1. (6*k* + 1)*π/*6 *< x <* (6*k* + 5)*π/*6; B) (6*k* − 1)*π/*12 *< x <* (6*k* + 5)*π/*12; V) (6*k* − 1)*π/*6 *< x <* (6*k* + 5)*π/*6; G) (6*k* − 5)*π/*6 *< x <* (6*k* + 5)*π/*6;

D) (6*k* + 1)*π/*12 *< x <* (6*k* − 5)*π/*12.

1. Odrediti koliko rešenja ima nejednačina |sin*x*| + |cos*x*| 6 1 u segmentu [0*,π*].
	1. beskonačno mnogo; B) tri; V) dva; G) jedno; D) nijedno
2. Odrediti skup svih zajedničkih rešenja nejednačina .
	1. (0*,*1*/*2); B) (0*,*1*/*3); V) (0*,π/*3); G) (*π/*6*,*1*/*2); D) nema zajedničkih rešenja.

 √ √

1. Šta je rešenje nejednačine sin*x* + cos*x >* 1?
	1. *x* = *π/*4; B) *π/*6 + 2*kπ < x < π/*3 + 2*kπ*; V) nejednačina je uvek zadovoǉena; G) 2*kπ < x < π/*2 + 2*kπ*; D) −*π/*2 + 2*kπ < x < π* + 2*kπ* i *π* + 2*kπ < x <* 3*π/*2 + 2*kπ*. **657.** Rešiti nejednačinu (1 + 2cos*x*)0*,*5 6 sin*x*.

 A) *π/*2 + 2*kπ* 6 *x* 6 2*π/*3 + 2*kπ*; B) *π/*2 + 2*kπ* 6 *x* 6 2*π/*3 + 2*kπ* i 4*π/*3 + 2*kπ* 6 *x* 6 3*π/*2 + 2*kπ*;

 V) *π/*2 + 2*kπ* 6 *x* 6 3*π/*2 + 2*kπ*; G) *π/*2 + 2*kπ* 6 *x* 6 *π* + 2*kπ*;

D) *π/*2 + 2*kπ* 6 *x* 6 2*π/*3 + 2*kπ* i 3*π/*2 + 2*kπ* 6 *x* 6 5*π/*3 + 2*kπ*.

√

1. Šta je skup rešenja nejednačine√ 2sin2 *x* + 3sin*x* − 3 *>* 0 iz intervala [0*,*2*π*)?
	1. (−arcsin 3*,π/*3; B) [0*,π/*3) ∪ (2*π/*3*,*2*π*); V) (*π/*3*,*2*π/*3); G) [0*,π*);

D) .

1. Neka je *S* skup svih brojeva *x* za koje važi logtg*x* sin*x* − logctg*x* cos*x* > 3 i 0 6 *x* 6 2*π*. Tada je za neke brojeve *a,b,c* (*a < b < c*) skup *S* oblika:
	1. [*a,b*]; B) [*a,b*) ∪ (*b,c*]; V) [*a,b*); G) (*a,b*); D) (*a,b*) ∪ (*b,c*).
2. Skup rešenja nejednačine cos2*x >* cos*x* u intervalu [0*,*2*π*) je:
	1. ; B) ; V) ; G) ; D).