gdje su početni uvjeti zadani

$$y = y_0 \text{ za } x = x_0, \quad \text{tj. } y(x_0) = y_0.$$

Problem iznalaženja rješenja diferencijalne jednadžbe koje zadovoljava dane početne uvjete zove se **Cauchyjev problem** ili **problem s početnim uvjetima**. Sa stanovišta egzistencije rješenja Cauchyjeva problema za diferencijalnu jednadžbu (1.2) iskazujemo bez dokaza ovaj teorem.

Teorem B.1 *(Peano) Ako je u diferencijalnoj jednadžbi*

$$y' = f(x, y)$$

zadana funkcija f neprekidna na pravokutniku P danom sa

$$|x - x_0| \le a, \quad |y - y_0| \le b,$$

onda postoji barem jedno rješenje diferencijalne jednadžbe koje zadovoljava početne uvjete

$$y = y_0 \quad \text{za} \quad x = x_0.$$

U vezi s problemom jedinstvenosti rješenja Cauchyjeva problema navodimo bez dokaza sljedeći teorem.

Teorem B.2 *(Picard) Ako je u diferencijalnoj jednadžbi*

$$y' = f(x, y)$$

zadana funkcija f neprekidna na pravokutniku P danom sa

$$|x - x_0| \le a, \quad |y - y_0| \le b,$$

i ako ima ograđenu parcijalnu derivaciju $\frac{\partial f}{\partial y}$, tj. $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le K$ za svaki $(x, y) \le P$, onda diferencijalna jednadžba ima jedinstveno rješenje koje zadovoljava početne uvjete

$$y = y_0 \quad \text{za} \quad x = x_0.$$

U prethodnim teoremima može se ocijeniti duljina intervala oko x_0 na kojem postoji rješenje. Naime, zbog neprekidnosti od f na P, zaključujemo da je f ograđena na P. Ako je M ograda, tj. $|f(x, y)| \le M$ za $(x, y) \in P$, onda rješenje postoji na intervalu $|x - x_0| < h$, gdje je $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Primjer 1.4 $y' = 2\sqrt{|y|}$ *ima prema Peanovom teoremu rješenje za proizvoljne početne uvjete. Međutim, rješenje nije uvijek jedinstveno. Kroz točku $(0, 0)$ očito*

prolaze ova rješenja

$$y = \begin{cases} -x^2 & \text{za } x \le 0 \\ x^2 & \text{za } x > 0, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} 0 & \text{za } x \le 0 \\ x^2 & \text{za } x > 0. \end{cases}$$

Razlog ovoj pojavi je da $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ nema ograđenu parcijalnu derivaciju $\frac{\partial f}{\partial y}$ u okolini točke $(0, 0)$.

Zadaci

1. $2yy'^3 - (4xy + 2y + 1)y'^2 + (4xy + 2x + 1)y' - 2x = 0.$
2. $y'^3 - (2\sqrt{y} + y^2)y'^2 + 2y^2\sqrt{y}y' = 0.$
3. $y'^2 - 2y' + 1 - y + x = 0.$
4. $y'^3 + y'^2 - y' + 1 = 0.$
5. $x = e^{2y'} - y'^2.$
6. $y'(x - \ln y') = 1.$
7. $y = \sqrt{y'^2 + 1}.$
8. $y = \ln(1 + y'^2).$
9. $y = \frac{2}{3}y'x + \frac{1}{3}y'^2.$
10. $xy' - y = \ln y'.$
11. Odredite krivulju čija tangenta s koordinatnim osima zatvara trokut površine $2a^2$.

Rješenja

1. $(y - x - C)(y - x^2 - C)(y^2 - x - C) = 0.$
2. $(y - C)[y - (x + C)^2]\left(\frac{1}{2} + x - C\right) = 0$; $y = 0$ je singularno rješenje.
3. $y = x + \frac{(x+C)^2}{4}$; $y = x$ je singularno rješenje.
4. $\left(\frac{y-C}{x}\right)^3 + \left(\frac{y-C}{x}\right)^2 - \frac{y-C}{x} + 1 = 0.$
5. $x = e^{2t} - t^2$, $y = e^{2t}\left(t - \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}t^3 + C.$
6. $x = \ln p + \frac{1}{p}$, $y = p - \ln p + C.$
7. $x = t + C$, $y = \text{ch}t$, ili $y = \text{ch}(x - C)$; $y = 1$ je singularno rješenje.
8. $x = 2\text{arctg}p + C$, $y = \ln(1 + p^2)$; $y = 0$ je singularno rješenje.
9. $x = p^2C - 2p$, $y = \frac{2}{3}p^3C - p^3.$
10. $y = Cx - \ln C$; $y = \ln x + 1$ je singularno rješenje.
11. $xy = \pm a^2.$

B.8 Dokaz Picardova teorema

U točki B.1 citirali smo Peanov i Picardov teorem. Ti su teoremi tamo navedeni kao teoremi B.1 i B.2, a odnose se na diferencijalnu jednadžbu $y' = f(x, y)$ u kojoj je f zadana i neprekidna na pravokutniku $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$. Prvi teorem kaže da tada postoji rješenje koje zadovoljava početne uvjete $y = y_0$ za $x = x_0$, a drugi, uz dodatni uvjet da je parcijalna derivacija $\frac{\partial f}{\partial y}$ ograđena na P, da je rješenje jedinstveno. Svakako je izreka o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja Cauchyjeva problema važnija, pa ovdje želimo dokazati Picardov teorem i to pod općenitijim uvjetima od onih u teoremu B.2. Tamo smo namjerno izostavili općenitiju formulaciju kako bi jače istakli tvrdnje teorema, a pretpostavke imali izrečene pomoću poznatih pojmova. Ostale teoreme Picardova tipa, kao npr. teorem B.5 i kasnije ovdje nećemo dokazivati.

Definicija B.7 *Za funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kažemo da zadovoljava* **Lipschitzov uvjet** *na $[a, b]$ ako postoji broj $L > 0$ takav da za svake dvije vrijednosti $x_1, x_2 \in [a, b]$, vrijedi*

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|.$$

Za funkciju dviju varijabli $f : P \to \mathbb{R}$ definiranu na pravokutniku $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ kažemo da zadovoljava **Lipschitzov uvjet na P s obzirom na varijablu** *y, ako postoji $L > 0$ takav da za svaki x, $|x - x_0| \leq a$ i za svake dvije vrijednosti y_1 i y_2, $|y_1 - y_0| \leq b$, $|y_2 - y_0| \leq b$, vrijedi*

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L|y_2 - y_1|.$$

Nadalje, kaže se da $f : P \to \mathbb{R}$ zadovoljava **Lipschitzov uvjet na** *P, ako postoji $L > 0$ takav da za svake dvije točke (x_1, y_1) i (x_2, y_2) iz P vrijedi*

$$|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| \leq L\{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|\}.$$

Oba ova pojma proširuju se na funkcije više od dvije varijable.

Jasno je sada ovo: ako f ima ograničenu parcijalnu derivaciju $\frac{\partial f}{\partial y}$ na P, onda f zadovoljava Lipschitzov uvjet na P s obzirom na varijablu y. To slijedi odmah iz Lagrangeova teorema srednje vrijednosti. Formulirajmo sada Picardov teorem kao

Teorem B.6 *(Picard). Ako je u diferencijalnoj jednadžbi*

$$y' = f(x,y) \tag{8.1}$$

zadana funkcija f neprekidna na pravokutniku P definiranom sa

$$|x - x_0| \leq a; \quad |y - y_0| \leq b,$$

i ako f zadovoljava Lipschitzov uvjet na P s obzirom na varijablu y, onda diferencijalna jednadžba (8.1) ima jedinstveno rješenje $x \mapsto y(x)$ koje zadovoljava početne uvjete

$$y = y_0 \quad za \quad x = x_0.$$

Nadalje, rješenje je definirano i ima neprekidnu derivaciju na

$$|x - x_0| \leq h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\},$$

gdje je M ograda funkcije f na pravokutniku P.

Dokaz. Dokaz se provodi tako da se konstruira niz aproksimacija traženog rješenja $y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ čiji je limes traženo rješenje za koje se potom dokaže da je jedinstveno [1].

Neka je $x \mapsto y(x)$ rješenje od (8.1) definirano na $|x - x_0| \leq h$, i neka vrijedi $y(x_0) = y_0$. Tada imamo

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad |x - x_0| \leq h,$$

pa integracijom obiju strana od dobivamo

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx$$

ili

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx, \quad |x - x_0| \leq h. \tag{8.2}$$

[1] Čitatelj može i izostaviti dokaz ako želi, jer je nešto poduži. Međutim, želimo istaći da je dokaz, unatoč duljini, jednostavan i instruktivan. U dokazu se koristi matematički aparat koji nam je obično poznat s prve godine studija. Istaknimo još i to da sam dokaz daje više, ne samo istinitost Picardovog teorema nego i postupak iznalaženja aproksimativnih rješenja Cauchyjeva problema, što zovemo **metoda sukcesivnih aproksimacija**.

Promatrajmo sada integralnu jednadžbu

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx. \tag{8.3}$$

U (8.3) y je nepoznata funkcija, a kako se nalazi pod znakom integrala, takva se jednadžba zove integralna jednadžba. Jasno je da je svako rješenje našeg Cauchyjeva problema ujedno rješenje integralne jednadžbe (8.3). Uočimo da svako rješenje integralne jednadžbe (8.3) zadovoljava $y(x_0) = y_0$, tj. naše početne uvjete.

Pokažimo obrnuto, da je svako rješenje integralne jednadžbe (8.3), koje je neprekidno na $|x - x_0| \leq h$, za čije vrijednosti vrijedi $|y - y_0| \leq b$, (tj. graf od y ne izlazi iz pravokutnika P, kako bi $f(x, y(x))$ bilo definirano), ujedno rješenje našeg Cauchyjeva problema. Naime, ako je y neprekidna na $|x - x_0| \leq h$, a f po pretpostavci neprekidna na P, onda je funkcija $x \mapsto f(x, y(x))$ neprekidna na $|x - x_0| \leq h$ (kao kompozicija dviju neprekidnih funkcija). Time je desna strana od (8.2) diferencijabilna funkcija (integral možemo derivirati po gornjoj granici), a kako je to upravo y, dobili smo da je y diferencijabilna na $|x - x_0| \leq h$. Deriviranjem (8.2) po x dobivamo da y zadovoljava (8.1).

Treba znači pronaći neprekidno rješenje od (8.3) na $|x - x_0| \leq h$ čiji graf ne izlazi iz P, tj. čije su vrijednosti u segmentu $|y - y_0| \leq b$. Neka je nulta aproksimacija konstantna funkcija

$$y_0(x) = y_0,$$

tj. svugdje jednaka početnoj vrijednosti y_0. Geometrijski to znači da smo traženu integralnu krivulju aproksimirali pravcem paralelnim sa x-osi. Kako y_0 pripada segmentu $|y - y_0| \leq b$, to je za svaki x iz $|x - x_0| \leq a$ definirano $f(x, y_0)$, pa je time s

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx$$

definirana na $|x - x_0| \leq a$ funkcija y_1 koju odabiremo za prvu aproksimaciju rješenja od y. Treba ocijeniti vrijednosti od y_1, da slučajno "ne izlaze" iz P. Zbog neprekidnosti funkcije f na pravokutniku P funkcija f je ograđena na P, tj. postoji $M > 0$ takav da bude $|f(x, y)| \leq M$ za sve $(x, y) \in P$. Zato imamo

$$|y_1(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx\right| \leq M \cdot \left|\int_{x_0}^{x} dx\right| = M \cdot |x - x_0|. \tag{8.4}$$

Svakako će biti $|y_1(x) - y_0| \leq b$, ako je $M|x - x_0| \leq b$, što daje

$$|x - x_0| \leq \frac{b}{M}$$

čime je eventualno sužen segment na kome se nalazi graf od y_1 u P. Dakle, ako za x vrijedi $|x - x_0| \leq a$ i $|x - x_0| \leq \frac{b}{M}$, onda smo sigurni da točka $(x, y_1(x))$ pripada u P. Time je obrazložena ocjena dana u tekstu teorema

$$|x - x_0| \leq h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Sada je na $|x - x_0| \leq h$ definirano $f(x, y_1(x))$, pa možemo promatrati funkciju y_2 definiranu s

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))\, dx$$

za koju istom procjenom kao za y_1 vidimo da na $|x - x_0| \leq h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ "ne izlazi" iz P. Sada možemo nastaviti postupak uz istu ocjenu segmenta $|x - x_0| \leq h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, pa na tom segmentu dobivamo niz funkcija, $y_0, y_1, \ldots$, gdje je y_n definirana na $|x - x_0| \leq h$ s

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\, dx. \tag{8.5}$$

Time su sve funkcije niza $\{y_n\}$ definirane na istom segmentu $|x - x_0| \leq h$ i s vrijednostima u segmentu $|y_n - y_0| \leq b$, pa ako postoji $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, onda su vrijednosti te funkcije također u $|y - y_0| \leq b$. Uočimo još da su sve funkcije y_n neprekidne (čak i diferencijabilne) na $|x - x_0| \leq h$.

Dokažimo sada da je niz $\{y_n\}$ uniformno konvergentan na $|x - x_0| \leq h$, pa je prema tome limes neprekidna funkcija s vrijednostima u $|y - y_0| \leq b$, dakle dobar kandidat za rješenje integralne jednadžbe (8.3). Uočimo da je konvergencija niza funkcija

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

ekvivalentna konvergenciji reda

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1}) + \cdots. \tag{8.6}$$

Naime, njegova parcijalna suma iznosi $s_n = y_n$. Prema tome, dovoljno je dokazati uniformnu konvergenciju reda (8.6) na segmentu $|x - x_0| \leq h$. Po Weierstrassovom kriteriju dovoljno je naći konvergentan red pozitivnih brojeva koji je majoranta reda $\sum |y_n - y_{n-1}|$. U tome će nam pomoći činjenica da funkcija f zadovoljava Lipschitzov uvjet. Treba dakle ocijeniti apsolutne vrijednosti članova reda (8.6). Iz izraza za y_1 i y_2 imamo

$$y_2(x) - y_1(x) = \int_{x_0}^{x} \left(f(x, y_1(x)) - f(x, y_0(x))\right) dx,$$

pa za $|x - x_0| < h$ vrijedi

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_1) - f(x, y_0)|\, dx\right|.$$

Primijenimo li Lipschitzov uvjet na f i točke (x, y_0) i (x, y_1) dobivamo $|f(x, y_1) - f(x, y_0)| \leq L|y_1 - y_0|$, odnosno

$$|y_2 - y_1| \leq L\left|\int_{x_0}^{x} |y_1 - y_0|\, dx\right|.$$

Kako smo već prije u (8.4) postigli ocjenu $|y_1 - y_0| \leq M|x - x_0|$, dobivamo

$$|y_2 - y_1| \leq ML\left|\int_{x_0}^{x} |x - x_0|\, dx\right| = ML\frac{|x - x_0|^2}{2!}.$$

Analogna ocjena daje

$$|y_3 - y_2| \leq ML^2\frac{|x - x_0|^3}{3!},$$

odnosno, indukcijom dobivamo

$$|y_n - y_{n-1}| \leq ML^{n-1}\frac{|x - x_0|^n}{n!}. \tag{8.7}$$

Kako (8.7) vrijedi za svaki x za koji je $|x - x_0| \leq h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, slijedi

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq ML^{n-1}\frac{h^n}{n!}.$$

Prema D'Alamberetovom kriteriju red

$$|y_0| + Mh + ML\frac{h^2}{2} + \cdots + ML^{n-1}\frac{h^n}{n!} + \cdots \tag{8.8}$$

je konvergentan i predstavlja traženu konvergentnu majorantu reda (8.6). Dakle, red (8.6) konvergira uniformno i ima za sumu neprekidnu funkciju. Označimo s y sumu reda (8.6). Imamo dakle

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim y_n(x), \tag{8.9}$$

na $|x - x_0| \leq h$. Pokažimo da je ta funkcija rješenje integralne jednadžbe (8.3). U tu svrhu dokažimo najprije da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(x, y_n)\, dx = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx. \tag{8.10}$$

Naime, iz uniformne konvergencije $y_n \to y$ na $|x - x_0| \leq h$ slijedi da za svaki $\epsilon > 0$ postoji N_ϵ takav da $n > N_\epsilon$ povlači

$$|y_n(x) - y(x)| < \epsilon$$

za sve x iz segmenta $|x - x_0| \le h$. Time za $n > N_\epsilon$ imamo ocjenu

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_n)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_n) - f(x, y)|\,dx\right|$$
$$\le L\left|\int_{x_0}^{x} |y_n - y|\,dx\right| \le L\epsilon|x - x_0| \le Lh\epsilon$$

što teži k 0 za $\epsilon \to 0$, pa je (8.10) dokazano. Da je (8.9) rješenje od (8.3) slijedi iz (8.5) i (8.10),

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,dx,$$

odnosno

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx.$$

Ovog trenutka dokazali smo egzistenciju rješenja promatranog Cauchyjeva problema, jer funkcija y zadovoljava diferencijalnu jednadžbu (8.1) i početne uvjete $y = y_0$ za $x = x_0$. Da bismo kompletirali dokaz Picardova teorema treba još dokazati jedinstvenost rješenja. Pretpostavimo da je y^* neko rješenje polaznog Cauchyjevog problema koje neka je definirano na segmentu $|x - x_0| \le h' \le h$. Tada y^* zadovoljava integralnu jednadžbu (8.3), tj. vrijedi

$$y^*(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y^*(x))\,dx.$$

Da dokažemo da je $y^*(x) = y(x)$ za svaki x iz $|x - x_0| \le h'$ dovoljno je (zbog jedinstvenosti limesa) dokazati da je $y^* = \lim_{n\to\infty} y_n$. Treba dakle ocijeniti $|y_n - y^*|$. Tu ocjenu dobivamo analognim zaključivanjem kao kod iznalaženja ocjene (8.7). Naime, zbog $|f(x, y^*)| \le M$, iz

$$|y_0 - y^*| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y^*)|\,dx\right|$$

dobivamo

$$|y_0 - y^*| \le M|x - x_0|.$$

Za ocjenu $|y_1 - y^*|$ imamo

$$|y_1 - y^*| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_0) - f(x, y^*)|\,dx\right|$$
$$\le L\left|\int_{x_0}^{x} |y_0 - y^*|\,dx\right| \le ML\left|\int_{x_0}^{x} |x - x_0|\,dx\right| = ML\tfrac{|x-x_0|^2}{2!}.$$

Analognom ocjenom dobivamo

$$|y_2 - y^*| \le ML^2\frac{|x - x_0|^3}{3!},$$

i indukcijom

$$|y_n - y^*| \le ML^n\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

za svaki x iz $|x - x_0| \le h'$. Imamo dakle opću ocjenu

$$|y_n - y^*| \le ML^n\frac{h'^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{8.11}$$

Kako

$$ML^n\frac{h'^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{L}\cdot\frac{(Lh')^{n+1}}{(n+1)!} \to 0,$$

za $n \to \infty$[2] to slijedi da je

$$y^*(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x),$$

za svaki x iz $|x - x_0| \le h' \le h$. Time je dokazana jedinstvenost Cauchyjeva problema i u potpunosti dokazan Picardov teorem. □

Istaknimo da je dokaz dao niz diferencijabilnih funkcija $\{y_n\}$ od kojih svaku možemo uzeti za aproksimaciju rješenja Cauchyjeva problema. Ovdje ćemo još dati ocjenu greške takve aproksimacije. Naime, ako u (8.11) zamijenimo h' s h i y^* s y, dobivamo traženu ocjenu, koja glasi

$$|y_n(x) - y(x)| \le ML^n\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{za} \quad |x - x_0| \le h. \tag{8.12}$$

Nadalje možemo ocijeniti i samo rješenje y. Iz

$$y = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1}) + \cdots$$

i ocjene (8.7) dobivamo[3]

$$|y(x)| \le |y_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n(x) - y_{n-1}(x)|$$
$$\le |y_0| + M\sum_{n=1}^{\infty} L^{n-1}\tfrac{|x-x_0|^n}{n!} = |y_0| + \tfrac{M}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{(L|x-x_0|)^n}{n!} = |y_0| + \tfrac{M}{L}\left(e^{L|x-x_0|} - 1\right),$$

[2] Općenito za $a > 0$ vrijedi $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$ (vidi primjerice [10]).

[3] Ovdje koristimo da je $e^a = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$.

odnosno
$$|y(x)| \le |y_0| + \frac{M}{L}\left(e^{L|x-x_0|}-1\right).$$
q.e.d.

Primjer 8.1 *Promatrajmo jednostavni Cauchyjev problem*
$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$
Pronađimo rješenje prethodno navedenom metodom "sukcesivnih" aproksimacija.

Sada imamo
$$y_n = 1 + \int_{x_0}^{x} y_{n-1}\, dx,$$
ili redom
$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 1,\\
y_1(x) &= 1 + \int_0^x dx = 1 + x,\\
y_2(x) &= 1 + \int_0^x (1+x)\, dx = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2,\\
y_3(x) &= 1 + \int_0^x \left(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2\right) dx = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3,\\
&\vdots\\
y_n(x) &= 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \cdots + \tfrac{1}{n!}x^n,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Taj niz funkcija jednoliko konvergira k rješenju Cauchyjeva problema i kao što znamo rješenje glasi
$$y = e^x.$$

Dva osnovna uvjeta Picardova teorema pod kojima diferencijalna jednadžba (8.1)
$$y' = f(x,y)$$
ima jedinstveno rješenje Cauchyjeva problema jesu da je f neprekidna u okolini točke (x_0, y_0) i da u toj okolini zadovoljava Lipschitzov uvjet. Promotrimo sada slučaj kada $f(x,y) \to \infty$ (odnosno $-\infty$) za $(x,y) \to (x_0,y_0)$. Tada možemo promatrati funkciju $\varphi(x,y) = \frac{1}{f(x,y)}$ i definirati $\varphi(x_0,y_0) = 0$. Time je φ neprekidna u svim točkama okoline od (x_0,y_0). Ako φ osim toga zadovoljava Lipschitzov uvjet u varijabli x, onda diferencijalna jednadžba
$$x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{f(x,y)} \tag{8.13}$$
ima jedinstveno rješenje koje zadovoljava početni uvjet $x = x_0$ za $y = y_0$. To rješenje je neka funkcija $y \mapsto x(y)$, pa vidimo da se u takvoj točki integralne krivulje diferencijalne jednadžbe $y' = f(x,y)$ glatko nadovezuju i da u točki (x_0,y_0) imaju

vertikalnu tangentu. Zato svaku točku (x_0,y_0) za koju desna strana od (8.1), tj. funkcija f, zadovoljava na nekoj okolini od (x_0,y_0) oba uvjeta Picardova teorema, ili za koju desna strana od (8.13), tj. funkcija $\varphi = \frac{1}{f}$, zadovoljava na nekoj okolini od (x_0,y_0) oba uvjeta Picardova teorema zovemo **obična točka** diferencijalne jednadžbe (8.1). Svaku drugu točku zovemo **singularna točka** diferencijalne jednadžbe (8.1). Ako je točka (x_0,y_0) singularna, onda općenito ne možemo garantirati egzistenciju rješenja s početnim uvjetom $y = y_0$ za $x = x_0$, a još manje možemo govoriti o njegovoj jedinstvenosti. Obično se izučavaju tzv. **izolirane singularne točke**, tj. točke koje posjeduju okolinu u kojoj nema drugih singularnih točaka. Problemi kao što su raspored singularnih točaka i ponašanje integralnih krivulja u okolini singularne točke proučavaju se u tzv. **kvalitativnoj teoriji diferencijalnih jednadžbi**. Najvažniji tip singularnih točaka su točke "tipa $\frac{0}{0}$". Naime, ako je $f = \frac{g}{h}$, tj. imamo diferencijalnu jednadžbu oblika
$$y' = \frac{g(x,y)}{h(x,y)}, \tag{8.14}$$
onda su to točke u kojima brojnik i nazivnik poprimaju vrijednost nula. Kasnije ćemo kod proučavanja jednog drugog problema vezanog za sustave diferencijalnih jednadžbi dobiti ujedno i ponašanje integralnih krivulja diferencijalne jednadžbe
$$y' = \frac{ax+by}{cx+dy}, \quad ad - bc \ne 0 \tag{8.15}$$
u okolini njene singularne točke $(0,0)$. To će ujedno biti opis ponašanja integralnih krivulja oko singularne točke tipa $\frac{0}{0}$ diferencijalnih jednadžbi (8.14) kod kojih možemo $\frac{g}{h}$ aproksimirati racionalnom funkcijom $\frac{ax+by}{cx+dy}$, $ad - bc \ne 0$.

Primjer 8.2 *Promatrajmo diferencijalnu jednadžbu*
$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Točke x-osi, $x \ne 0$ nisu singularne točke. U tim točkama f ima za limes $-\infty$, odnosno ∞. Jedina singularna točka je ishodište. Opće rješenje glasi
$$x^2 + y^2 = C,$$
što je jednadžba familije koncentričnih kružnica sa središtem u ishodištu. Gornje i donje polukružnice predstavljaju integralne krivulje, koje se u točkama na x-osi glatko nadovezuju i imaju vertikalnu tangentu. Te se kružnice stežu na ishodište i kroz ishodište ne prolazi nijedna integralna krivulja.

Primjer 8.3 *Kod diferencijalne jednadžbe*
$$y' = 2yx,$$
ishodište je također singularna točka.

Opće rješenje glasi
$$y = Cx^2,$$
tj. familija parabola, pa vidimo da kroz ishodište prolazi beskonačno integralnih krivulja.