ИНТЕГРАЛ ПО КОМПАКТНОМ ИНТЕРВАЛУ

У овом одељку, све време биће $J = [a,b] \subseteq \mathbf{R}$, односно

$$h(\alpha) = \int_a^b f(\alpha, x)\,\mathrm{d}x.$$

14.3. Став [лимес, непрекидност]. а) Нека је A скуп на коме је дефинисана конвергенција. Ако је $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} f(\alpha,x) = g(x)$, равномерно по $x \in [a,b]$, тада је

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} h(\alpha) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x;$$

б) Нека је $A \subseteq \mathbf{R}^k$, и нека је $f : A \times [a,b] (\subseteq \mathbf{R}^{k+1}) \to \mathbf{R}$ непрекидна функција, тада је и h непрекидна.

Доказ. а) То је, заправо, Став 13.14 главе Раномерна конвергенција;

б) Фиксирамо $\alpha_0 \in A$. Постоји компактан скуп $K \subseteq A$ такав да $\alpha_0 \in \operatorname{int} K$; тада је и $K \times [a,b]$ такође компактан. Према Канторовој теореми, f је равномерно непрекидна на $K \times [a,b]$, то јест

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0\,\forall\alpha', \alpha'' \in K\,\forall x', x'' \in [a,b]\,||(\alpha', x') - (\alpha'', x'')|| < \delta \Rightarrow \\ |f(\alpha', x') - f(\alpha'', x'')| < \varepsilon.$$

Како $\alpha_0 \in \operatorname{int} K$, то је K нека околина тачке α_0 и за ту околину важи

$$\forall\alpha \in K\,\forall x \in [a,b]\,||(\alpha, x) - (\alpha_0, x)|| < \delta \Rightarrow |f(\alpha, x) - f(\alpha_0, x)| < \varepsilon,$$

то јест да $f(\alpha,x) \rightrightarrows f(\alpha_0,x)$ равномерно по $x \in [a,b]$, па $f(\alpha,x) \to f(\alpha_0,x)$ равномерно. Применимо тачку а). $\square$

14.4. Став [диференцирање]. Нека је $A \subseteq \mathbf{R}$, $f : A \times [a,b] \to \mathbf{R}$. Ако је f диференцијабилна по α за све x, и ако је функција $\dfrac{\partial f(\alpha,x)}{\partial\alpha}$ непрекидна на $A \times [a,b]$, тада је h диференцијабилна и важи

$$h'(\alpha) = \int_a^b \frac{\partial f(\alpha,x)}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

Доказ. Према Лагранжовој теореми о средњој вредности постоји $\theta \in (0,1)$ тако да важи

$$\begin{aligned}\frac{h(\alpha+\triangle\alpha) - h(\alpha)}{\triangle\alpha} &= \frac{1}{\triangle\alpha}\int_a^b \left(f(\alpha+\triangle\alpha, x) - f(\alpha,x)\right)\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\triangle\alpha}\int_a^b \triangle\alpha\frac{\partial f(\alpha+\theta\triangle\alpha, x)}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial f(\alpha+\theta\triangle\alpha, x)}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Међутим, последњи интеграл тежи ка $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial\alpha}(\alpha,x)\,\mathrm{d}x$, јер је функција $\frac{\partial f}{\partial\alpha}$ непрекидна. $\square$

У вежбању 28 може се видети шта се збива када $\frac{\partial f}{\partial\alpha}$ није непрекидна у α_0 макар за једно x.

14.5. Став [Лајбниц]. Нека су φ и ψ диференцијабилне функције реалне промењљиве, и нека је

$$h(\alpha)=\int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x,$$

и нека f задовољава услове претходног Става. Тада је h диференцијабилна функција, и важи

$$h'(\alpha)=\int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} \frac{\partial f(\alpha,x)}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}x+f(\alpha,\psi(\alpha))\psi'(\alpha)-f(\alpha,\varphi(\alpha))\varphi'(\alpha).$$

Прецизније, домен функције f је скуп $\{(\alpha,x)\,|\,\alpha\in A,\varphi(\alpha)\le x\le\psi(\alpha)\}$.

Доказ. Фиксирамо $\alpha_0\in A$, и за $\alpha\in(\alpha_0-\delta,\alpha_0+\delta)$ имамо

$$h(\alpha)=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\alpha_0)} f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x+\int_{\varphi(\alpha_0)}^{\psi(\alpha_0)} f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x+\int_{\psi(\alpha_0)}^{\psi(\alpha)} f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Извод средњег сабирка имамо у претходном Ставу. Потражимо за трећи. Нека је $g(\alpha)=\int_{\psi(\alpha_0)}^{\psi(\alpha)} f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x$, и имамо

$$\frac{g(\alpha+\triangle\alpha)-g(\alpha)}{\triangle\alpha}=\frac{1}{\triangle\alpha}\left[\int_{\psi(\alpha_0)}^{\psi(\alpha+\triangle\alpha)} f(\alpha+\triangle\alpha,x)\,\mathrm{d}x-\int_{\psi(\alpha_0)}^{\psi(\alpha)} f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x\right]=$$

$$=\frac{1}{\triangle\alpha}\int_{\psi(\alpha_0)}^{\psi(\alpha)}(f(\alpha+\triangle\alpha,x)-f(\alpha,x))\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\triangle\alpha}\int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\alpha+\triangle\alpha)} f(\alpha+\triangle\alpha,x)\,\mathrm{d}x=S_1+S_2.$$

Први сабирак, као у претходном Ставу конвергира

$$S_1\to\int_{\psi(\alpha_0)}^{\psi(\alpha)}\frac{\partial f(\alpha,x)}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}x,$$

а за други имамо

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{1}{\triangle\alpha}\int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\alpha+\triangle\alpha)} f(\alpha+\triangle\alpha,x)\,\mathrm{d}x=\\&=\frac{1}{\triangle\alpha}f(\alpha+\triangle\alpha,\xi)(\psi(\alpha+\triangle\alpha)-\psi(\alpha))\quad\text{по првој т о ср вр}\\&\to f(\alpha,\psi(\alpha))\psi'(\alpha)\end{aligned}$$

Слично је и извод првог сабирка у (2) једнак $-f(\alpha,\varphi(\alpha))\varphi'(\alpha)$. □

14.6. Став [Интеграција]. Нека је $A=[c,d]$ и $f:[c,d]\times[a,b]\to\mathbf{R}$ непрекидна. Тада је

$$\int_c^\gamma\int_a^b f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\alpha=\int_a^b\int_c^\gamma f(\alpha,x)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

за све $c\le\gamma\le d$.

Доказ. Према Ставу 7.19, функција $\gamma\mapsto\int_c^\gamma f(\alpha,x)\,\mathrm{d}\alpha=\psi(\alpha,x)$ је диференцијабилна по γ, а њен извод једнак је

$$\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}(\gamma,x)=f(\gamma,x),$$