$\Psi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ је антисиметричан билинеарни функционал ако важи
1. $\Psi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 \Psi(u_1, v) + \lambda_2 \Psi(u_2, v)$
2. $\Psi(u, \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = \mu_1 \Psi(u, v_1) + \mu_2 \Psi(u, v_2)$
3. $\Psi(v, u) = -\Psi(u, v)$

Скуп свих антисиметричних билинеарних функционала $\Lambda^2(\mathbb{R}^k)$ је векторски простор димензије $\binom{k}{2}$ и једну његову базу чине функционали $\{\mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j | 1 \leq i < j \leq k\}$

$$\mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j(e_m, e_l) = \begin{cases} 1, & m = i,\ l = j \\ -1, & m = j,\ l = i \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Доказ. Ψ је билинеарно. Тада је $\Psi = \sum_{i,j=1}^{k} \lambda_{ij} \Psi_{ij}$, где је $\Psi_{ij}(e_m, e_l) = \begin{cases} 1, & m = i,\ l = j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$ i $\lambda_{ij} = \Psi(e_i, e_j)$. Како је Ψ антисиметричан то важи да је $\lambda_{ii} = 0$, као и то да $\lambda_{ji} = -\lambda_{ij}$.

$$\Psi = \sum_{i,j=1}^{k} \lambda_{ij} \Psi_{ij} = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \lambda_{ij}(\Psi_{ij} - \Psi_{ji}) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \lambda_{ij} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j. \quad \blacksquare$$

Интересује ме како се показује овај део: $\Psi = \sum_{i,j=1}^{k} \lambda_{ij} \Psi_{ij}$. Професор је само напоменуо да се то може показати на бази $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots$, али ја не знам како (делимично и због тога што сам мало и заборавио линеарну алгебру). То бих волео да ми неко покаже како се ради.

Такође, приметићете да доказујем нешто што нисам ни формулисао, е, то је и проблем, јер код мене у свесци одмах почиње доказ. Одмах да разјаснимо, мени је доказ јасан са техничке стане гледишта, али желео бих да знам и ЗАШТО и КАКО и ШТА?

После (у површинским интегралима II врсте) више нећу виђати ове антисиметричне билинеарне форме (или можда хоћу, али ја не знам да је то то). Једино где се оне "привидно" појављују је у наставку лекције (одмах после доказа, где се каже):

Нека је $S \subseteq \mathbb{R}^k$ површ. Диференцијабилна 2-форма је пресликавање $\omega : S \to \Lambda^2(\mathbb{R}^k)$ дефинисано са $\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \mathrm{P}_{ij} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j$ где $\mathrm{P}_{ij} : S \to \mathbb{R}$. [крај]

Дакле, мислио сам на део $\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \mathrm{P}_{ij} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j$ личи на $\sum_{1 \leq i < j \leq k} \lambda_{ij} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j$

И једно питање (не желим да завршим Анализу II, а да то, НЕ ЗНАМ): На шта се мисли кад се каже да је крива оријентисана у неком смеру или да је површ оријентисана тако да вектор нормале увире/извире из ње?

Добро, професор јесте испричао једну причу која каже [овде нећу посебно уводити сваки термине]:

$\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ су сагласне параметризације ако је $\det J_h(x) > 0$ где је $h = \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$. Атлас где су све карте сагласне се зове оријентисани атлас.

Површ S је оријентабилна ако је атлас оријентисан (макар постоји један).

Нека су $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ оријентисани атласи. Тада су $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ у релацији $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2$ ако и само ако је $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ оријентисан атлас.

Може се показати да је $\sim$ релација еквиваленције и да има тачно две различите класе еквиваленције (и те две класе су две различите оријентације површи).

Оријентисана површS је уређен пар (S + класа еквиваленције).

Дакле, неким слободним језиком ако неко може да ми појасни ове ствари.