Докази ирационалности

Недељко Стефановић

Верзија 0.1.1
18. јануар 2012.

Сажетак

У овом чланку ће бити приказани докази ирационалности константи и вредности функција које се раде закључно са средњом школом, а који се могу пратити са гимназијским знањем математике.

1 Помоћни ставови

У овом одељку ће бити изложени ставови који се користе у доказима ирационалности. Читалац који је упознат са њима може да прескочи овај одељак.

Теорема 1 (*Бернулијева неједнакост*) *За свако $x \geq -1$ и $n \geq 0$ важи*[1]

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Доказ: За $n = 0$ тврђење се своди на $1 \geq 1$. Претпоставимо да је тврђење тачно за $n = k$ и докажимо да је тачно за $n = k+1$.

$$(1+x)^n = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + nx.$$

$\square$

Теорема 2 *За ма које $q > 1$ низ q^n је растући и одозго неограничен.*

Доказ: Из $q^{n+1} = q^n q > q^n$ следи да је дати низ растући. Треба још доказати да за свако x постоји n такво да је $q^n > x$. За $x \leq 0$ то је испуњено за свако $n \in \mathbb{N}$. Уколико је $x > 0$, према теореми 1 за ма које $n \geq x/(q-1)$ важи

$$q^n = (1 + (q-1))^n \geq 1 + n(q-1) \geq 1 + \frac{x}{q-1}(q-1) = x + 1 > x.$$

$\square$

Теорема 3 *За ма које $q \in \mathbb{R}$ за које је $|q| < 1$ је $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.*

Доказ: За $q = 0$ је $q^n = 0$ за све $n \in \mathbb{N}$. У супротном је $|q^n| = (|q^{-1}|^n)^{-1}$, па тврђење следи из $|q^{-1}| > 1$ и теореме 2. $\square$

[1] Овде се договорно узима да је $0^0 = 1$.

Теорема 4 *За ма које $q \neq 1$ важи*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

а у случају да је $|q| < 1$ важи још и

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Доказ: Први део тврђења се доказује индукцијом по n, а други део тврђења следи из првог и теореме 3. $\square$

Теорема 5 *За ма које $a, c \in \mathbb{R}$ постоји n_0 такво да за свако $n \geq n_0$ важи $n! > c\,a^n$.*

Доказ: Обзиром да је $c\,a^n \leq |c\,a^n| = |c|\,|a|^n$, можемо разматрати само случај када је $a, c \geq 0$. Ако је пак $ac = 0$, онда тврђење важи за $n_0 = 1$. Стога је довољно доказати тврђење у случају да је $a, c > 0$.

Нека је $m \in \mathbb{N}$ такво да је $m > a$. Према теореми 2 постоји n_1 такво да је

$$\left(\frac{m}{a}\right)^{n_1} > \frac{c\,a^{m-1}}{(m-1)!}.$$

За ма које $n \geq n_0 = m + n_1$ важи

$$n! \geq a^{n-m+1}(m-1)!\left(\frac{m}{a}\right)^{n-m+1} \geq a^{n-m+1}(m-1)!\left(\frac{m}{a}\right)^{n_1} > c\,a^n.$$

$\square$

Теорема 6 *За свако n важи*

$$0 < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!n}.$$

Доказ: Јасно је да сума позитивних бројева мора бити позитивна. Што се преосталог дела тиче, довољно је приметити да за $k \geq 1$ важи $(n+k)! \geq n!(n+1)^k > 0$ са једнакошћу само за $k = 1$, што се доказује индукцијом. Из тога следи да је

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)^{k-n}} = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^l} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}.$$

$\square$

Теорема 7 (*Ојлер*)

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Доказ: Најпре приметимо да је према теореми 6 наведени ред конвергентан. Уведимо ознаке

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad e'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad e' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

и докажимо да је $e = \lim_{n\to\infty} e_n = e'$. Нека је дато $\varepsilon > 0$. За тако изабрано ε изаберимо n_0 такво да важи

$$\frac{1}{n_0! n_0} < \varepsilon/2.$$

Приметимо да ова релација важи за све $n \geq n_0$. За такве ε и n_0 изаберимо n_1 тако да важи

$$\sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k!}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n_1}\right)\right) < \varepsilon/2.$$

Овакав избор је могућ, јер се заменом свих појављивања n_1 са n у изразу на левој страни претходне неједнакости добија коначна сума чији сви сабирци теже нули када n неограничено расте, а то је тачно зато што је производ који фигурише у сваком од сабирака сачињен од увек истог броја чинилаца од којих сваки тежи јединици. Приметимо да ова релација важи за све $n \geq n_1$. Приметимо да је

$$e_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < e_n' < e'.$$

За ма које $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ важи

$$0 < e' - e_n < \sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{k!}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right) + \sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{k!} < \varepsilon.$$

□

Теорема 8 *Сваки природан број већи од* 1 *је дељив неким простим бројем.*

Доказ: У супротном постоји најмањи природан број n већи од 1 који није дељив ниједним простим бројем. Обзиром да је дељив самим собом, а није дељив ниједним простим бројем, он мора бити сложен. Међутим, онда он има делиоца мањег од себе, а већег од 1, који стога мора имати простог делиоца. Међутим, број n је дељив истим тим простим бројем. □

Теорема 9 (*Еуклид*) *Простих бројева има бесконачно много.*

Доказ: У супротном, нека су $p_1, \ldots, p_k$ сви прости бројеви. Број

$$n = p_1 \cdots p_k + 1$$

је већи од 1, а није дељив ниједним простим бројем, што противречи претходној теореми. □

Теорема 10 *За*

$$R(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$$

важи $R^{(k)}(0) = a_k k!$ *за* $k \leq n$, *односно* $R^{(k)}(0) = 0$ *за* $k > n$.

Доказ: Најпре индукцијом по n докажимо да је n-ти извод полинома x^m једнак $\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$ за $n \geq m$, односно 0 иначе.

Тврђење очигледно важи за $n = 0$. Претпоставимо да важи за $n = k$ и докажимо да важи за $n = k+1$. Ако је $n > m$, онда је по индуктивној претпоставци k-ти извод полинома

x^m константан, па је n-ти извод истог полинома једнак нули. Ако је пак $n \leq m$, онда је по индуктивној претпоставци

$$(x^m)^{(n)} = \left((x^m)^{(n-1)}\right)' = \left(\frac{m!}{(m-n+1)!}x^{m-n+1}\right)' = \frac{m!(m-n+1)}{(m-n+1)!}x^{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}.$$

Из управо доказаног следи да за $k > n$ важи $R^{(k)}(x) = 0$, а за $k \leq n$

$$R^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n-k} a_{k+i}\frac{(k+i)!}{i!}x^i,$$

одакле следи да је $R^{(k)}(0) = a_k k!$. □

Теорема 11 *Нека је P полином са целим коефицијентима и $Q(x) = P(x)x^n$. Број $Q^{(k)}(0)$ је цео и дељив са $(n+1)!$ за све $k \neq n$ и $Q^{(n)}(0) = P(0)n!$.*

Доказ: Нека је

$$P(x) = \alpha_0 + \cdots + \alpha_p x^p.$$

У том случају је

$$Q(x) = \alpha_0 x^n + \cdots + \alpha_p x^{n+p}.$$

Тврђење следи из теореме 10 и $P(0) = \alpha_0$. □

2 Директне методе

Да бисмо формулисали следећу теорему, уведимо следећу ознаку: За природан број n и прост број p нека је $s(n,p)$ такав цео ненегативан број m да $p^m | n$ и $p^{m+1} \nmid n$. Другим речима, ако је за међусобно различите просте бројеве $p_1, \ldots, p_k$ испуњено

$$n = p_1^{s_1} \cdots p_k^{s_k},$$

онда је $s(n,p_i) = s_i$, односно $s(n,p) = 0$ за све остале просте бројеве p. Такође, дефинишимо $s(m/n,p)$ за $m,n \in \mathbb{N}$ као $s(m,p) - s(n,p)$. Јасно је да за ма које $k \in \mathbb{N}$ важи

$$s(km,p) - s(kn,p) = (s(k,p) + s(m,p)) - (s(s,p) + s(n,p)) = s(m,p) - s(n,p),$$

тако да је ова дефиниција коректна.

Теорема 12 *Нека су $a = a_1/a_2$ и $b = b_1/b_1$ за неке $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{N}$, при чему је $b \neq 1$. У том случају је број $\log_b(a) = m/n$ за $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$ ако и само ако је*

$$ns(a,p) = ms(b,p)$$

за све просте бројеве p, односно број $\log_b(a)$ је рационалан ако и само ако је

$$s(a,p) = 0 \Leftrightarrow s(b,p) = 0$$

за све просте бројеве p и притом за просте бројеве p за које је $s(a,p), s(b,p) \neq 0$ однос $s(a,p)/s(b,p)$ константан.

Доказ: Следи из чињенице да је $\log_b(a) = m/n$ еквивалентно са $a = b^{m/n}$, односно $a^n = b^m$ и постојања тачно једне факторизације сваког природног броја већег од 1 преко простих. □

Теорема 13 *Нека су $m, n, k \in \mathbb{N}$ такви да је* $\mathrm{NZD}(m,n) = 1$. *У том случају важи*

$$\sqrt[k]{m/n} \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[k]{m},\, \sqrt[k]{n} \in \mathbb{Z}.$$

Доказ: Смер здесна улево је очигледан. Докажимо смер слева удесно. Претпоставимо супротно, да барем један од бројева $\sqrt[k]{m}$ и $\sqrt[k]{n}$ није цео и да је $\sqrt[k]{m/n} = p/q$ за неке природне узајамно просте бројеве p и q, односно да важи $m/n = p^k/q^k$, тј.

$$mq^k = np^k. \tag{1}$$

Приметимо да из претпоставке да бар један од бројева $\sqrt[k]{m}$ и $\sqrt[k]{n}$ није цео следи да нису оба од бројева m и n једнака 1, па се последња једнакост не своди на $1 = 1$. Из те чињенице, једнакости (1) и $\mathrm{NZD}(m,n) = 1$ следи да је $u = \mathrm{NZD}(m,p) > 1$ или $v = \mathrm{NZD}(n,q) > 1$. Дакле, за неке m', n', p', q' важи $m = m'u$, $n = n'v$, $p = p'u$ и $q = q'v$, при чему је

$$\mathrm{NZD}(m',p') = \mathrm{NZD}(n',q') = \mathrm{NZD}(u,v) = 1.$$

Једнакост (1) можемо записати у облику

$$m'q'^k uv^k = n'p'^k u^k v,$$

или после скраћивања са uv

$$m'q'^k v^{k-1} = n'p'^k u^{k-1}.$$

Обзиром да ниједан прост број не дели обе стране једнакости, оне морају бити једнаке 1, што је обзиром на то да је барем један од бројева u и v већи од 1 могуће само у случају $k = 1$, што противречи претпоставци да бар један од бројева $\sqrt[k]{m}$ и $\sqrt[k]{n}$ није цео. $\square$

3 Метод корена полинома

Теорема 14 *Нека је*

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0, \quad a_0, a_n \neq 0$$

полином са целим коефицијентима и нека су $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$ узајамно прости бројеви такви да важи $P(p/q) = 0$. У том случају $p|a_0$ и $q|a_n$.

Доказ: Множењем једнакости

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + \cdots + a_0 = 0$$

са q^n добијамо једнакост

$$\sum_{k=0}^{n} a_k p^k q^{n-k} = 0$$

из које следе једнакости

$$a_0 q^n = -p \sum_{k=1}^{n} a_k p^{k-1} q^{n-k} \quad \text{и} \quad a_n p^n = -q \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k q^{n-k-1}.$$

Из $p|a_0 q^n$ и $q|a_n p^n$ и чињенице да су бројеви p и q узајамно прости, следи тврђење. $\square$

Обзиром да сваки цео број различит од нуле има коначно много делилаца, ова теорема нам омогућава да одредимо коначан скуп рационалних бројева који обухвата све корене датог полинома са целим коефицијентима, а да онда заменом рационалних бројева из тог скупа одредимо који су од њих заиста корени и тако одредимо све рационалне корене полинома са целим коефицијентима.

На тај начин се ирационалност бројева може доказивати проналажењем полинома коме је дати број корен. Уколико пронађени полином нема рационалних корена, одмах знамо да је дати број ирационалан, а у супротном треба доказати само његову различитост од рационалних корена тог полинома, што се обзиром да је скуп корена полинома коначан може учинити на пример довољно тачним нумеричким рачунањем датог броја.

Докажимо на пример да је број $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ирационалан. Заиста,

$$a^2 = 5 + 2\sqrt{2}\sqrt{3},$$
$$(a^2 - 5)^2 = 24,$$
$$a^4 - 10a^2 + 1 = 0.$$

Дакле, $P(a) = 0$ за $P(x) = x^4 - 10x^2 + 1$. Обзиром да евентуални рационални корени овог полинома морају бити облика p/q за узајамно просте $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$ такве да $p|1$ и $q|1$, то јест $p \in \{-1, 1\}$ и $q \in \{1\}$, једини евентуални рационални корени овог полинома су 1 и -1. Међутим, обзиром да је $P(1) = P(-1) = -8 \neq 0$, број $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ је ирационалан.

Докажимо да је број $b = 2\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ирационалан. То је еквивалентно са ирационалношћу броја $2b = 4\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}^2$. Очигледно је

$$\sqrt[3]{2}^2 = 2(2\sqrt{3} - b),$$

односно

$$2(2\sqrt{3} - 2b)^3 = 1.$$

Након развијања последње једнакости добијамо да је

$$12(b^2 + 4)\sqrt{3} = 2b^3 + 72b + 1.$$

Након квадрирања добијамо да је b корен полинома

$$4x^6 - 144x^4 + 4x^3 + 1728x^2 + 144x - 6911.$$

Обзиром да је 6911 прост број, једини евентуални рационални корени овог полинома су

$$\pm 6911, \quad \pm\frac{6911}{2}, \quad \pm\frac{6911}{4},$$

при чему се непосредном провером утврђује да ниједан од њих није корен наведеног полинома. Стога је број b ирационалан.

Досадашња решења су захтевала досетке. Наведимо један општији, али дужи поступак одређиања потребног полинома. Послужимо се истим примером броја b. Најпре бројеве $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}^2$ и $\sqrt[3]{2}^2\sqrt{3}$ поређајмо у неком редоследу, рецимо у наведеном и сматрајмо касније наведен број »тежим«. Циљ нам је да постепено елиминишемо »теже« чланове по цену добијања »лакших«, које ћемо накнадно елиминисати по цену увођења још »лакших« и тако даље док их све не елиминишемо. Пођимо од основне једнакости

$$b = 2\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}^2/2.$$

У њој је »најтежи« члан $\sqrt[3]{2}$, па га изразимо преко осталог.

$$\sqrt[3]{2}^2 = 4\sqrt{3} - 2b.$$

Даље је

$$b^2 = 12 + \sqrt[3]{2}/2 - 2\sqrt[3]{2}^2\sqrt{3}.$$

Овде је »најтежи« члан $\sqrt[3]{2}^2\sqrt{3}$, па изразимо њега преко осталог.

$$\sqrt[3]{2}^2\sqrt{3} = -b^2/2 + 6 + \sqrt[3]{2}/4.$$

Даље је

$$b^3 = -1/2 + 24\sqrt{3} + 3\sqrt[3]{2}\sqrt{3} - 18\sqrt[3]{2}^2.$$

Овде је »најтежи« члан $\sqrt[3]{2}^2$, који је изражен преко »лакших« елемената једном од претходних једначина. Након замене је

$$b^3 - 36b = -1/2 - 48\sqrt{3} + 3\sqrt[3]{2}\sqrt{3}.$$

Сада је »најтежи« члан $\sqrt[3]{2}\sqrt{3}$, па изразимо њега преко осталог.

$$\sqrt[3]{2}\sqrt{3} = b^3/3 - 12b + 1/6 + 16\sqrt{3}.$$

Даље је

$$b^4 = 144 - 4\sqrt{3} + 36\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}^2/4 - 48\sqrt[3]{2}^2\sqrt{3}.$$

Овде је »најтежи« елемент $\sqrt[3]{2}^2\sqrt{3}$, који је изражен преко »лакших« једном од претходних једначина. После замене је

$$b^4 - 24b^2 + 144 = -4\sqrt{3} + 12\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}^2/4.$$

Овде је »најтежи« елемент $\sqrt[3]{2}^2$. Међутим, и он је већ изражен преко »лакших«. После замене је

$$b^4 - 24b^2 + b/2 + 144 = -\sqrt{3} + 12\sqrt[3]{2}.$$

Сада је »најтежи« елемент $\sqrt[3]{2}$, па га изразимо преко осталог.

$$\sqrt[3]{2} = b^4/12 - 2b^2 + b/24 + 12 + \sqrt{3}/12.$$

Настављајући овај поступак изразићемо још и $\sqrt{3}$ преко b (јер више нема »лакших« елемената) а онда уврштавајући све то у израз за b^6 добићемо тражени полином.

4 Број e и функције e^x и $\ln(x)$

Теорема 15 (*Ојлер*) *Број e је ирационалан.*

Доказ: Претпоставимо супротно, да је $e = m/n$ за неке $m, n \in \mathbb{N}$. Обзиром да се вредност разломка не мења када бројилац и именилац помножимо истим бројем различитим од нуле, можемо претпоставити да је $n > 1$. Уз симболику из теореме 7 важи

$$0 < n!(e - e_n) < \frac{1}{n},$$

што је немогуће, јер је број $n!(e - e_n)$ цео. $\square$

Теорема 16 (*Ламберт*) *За ма које $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ број e^x је ирационалан.*

Доказ: Из идентитета $e^{-x} = (e^x)^{-1}$ следи да је теорему довољно доказати у случају када је $x > 0$. Нека је

$$I_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \int_{-x}^{x} (x^2 - t^2)^n e^t \, dt.$$

Непосредним рачунањем изводимо да је

$$I_0(x) = \int_{-x}^{x} e^t \, dt = e^t \big|_{-x}^{x} = e^x - e^{-x},$$

а двоструком парцијалном интеграцијом да важи

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \frac{1}{2} \int_{-x}^{x} (x^2 - t^2) e^t \, dt = \frac{1}{2} \left((x^2 - t^2) e^t \big|_{-x}^{x} + \int_{-x}^{x} 2t \, e^t \, dt \right) \\ &= \int_{-x}^{x} t \, e^t \, dt = t \, e^t \big|_{-x}^{x} - \int_{-x}^{x} e^t \, dt = x(e^x + e^{-x}) - e^t \big|_{-x}^{x} = (x-1)e^x + (x+1)e^{-x}. \end{aligned}$$

Такође двоструком парцијалном интеграцијом добијамо да за $n \geq 2$ важи

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-x}^{x} (x^2 - t^2)^n e^t \, dt \\ &= \frac{1}{2^n n!} \left((x^2 - t^2)^n e^t \big|_{-x}^{x} + \int_{-x}^{x} 2nt (x^2 - t^2)^{n-1} \, e^t \, dt \right) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \int_{-x}^{x} t (x^2 - t^2)^{n-1} e^t \, dt \\ &= \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \Bigg(t (x^2 - t^2)^{n-1} e^t \big|_{-x}^{x} - \\ &\quad \int_{-x}^{x} ((x^2 - t^2) - 2(n-1)t^2)(x^2 - t^2)^{n-2} e^t \, dt \Bigg) \\ &= \frac{-1}{2^{n-1}(n-1)!} \int_{-x}^{x} ((2n-1)(x^2 - t^2) - 2(n-1)x^2)(x^2 - t^2)^{n-2} e^t \, dt \\ &= -\frac{2n-1}{2^{n-1}(n-1)!} \int_{-x}^{x} (x^2 - t^2)^{n-1} e^t \, dt + \frac{x^2}{2^{n-2}(n-2)!} \int_{-x}^{x} (x^2 - t^2)^{n-2} e^t \, dt \\ &= -(2n-1) I_{n-1}(x) + x^2 I_{n-2}(x). \end{aligned}$$

Из доказаних једнакости

$$\begin{aligned} &I_0(x) = e^x - e^{-x}, \\ &I_1(x) = (x-1)e^x + (x+1)e^{-x} \\ &n \geq 2 \Rightarrow I_n(x) = -(2n-1) I_{n-1}(x) + x^2 I_{n-2}(x) \end{aligned}$$

следи да за свако n постоје полиноми P_n и Q_n са целим коефицијентима, степена највише n такви да важи

$$I_n(x) = P_n(x) e^x + Q_n(x) e^{-x}.$$

Такође, $I_n(x) > 0$ као интеграл позитивне функције. Претпоставимо да су бројеви $x > 0$ и e^x рационални и изведимо контрадикцију. Нека су $u, v, p, q \in \mathbb{N}$ такви да је $x = u/v$ и $e^x = p/q$. Очигледно важи

$$I_n(x)v^n pq = P_n(u/v)v^n p^2 + Q_n(u/v)v^n q^2.$$

Обзиром да су P_n и Q_n полиноми са целим коефицијентима степена не већег од n, бројеви $P_n(u/v)v^n$ и $Q_n(u/v)v^n$ су цели, па је вредност израза на десној страни једнакости цео број. Но, вредност израза на левој страни једнакости је већа од нуле, па је

$$I_n(x)v^n pq \geq 1,$$

односно

$$I_n(x) \geq \frac{1}{v^n pq}.$$

Са друге стране је

$$I_n(x) \leq \frac{1}{2^n n!} \int_{-x}^{x} x^{2n} e^x \, dt = \frac{x^{2n+1} e^x}{2^{n-1} n!}.$$

Из последње две неједнакости закључујемо да важи

$$\frac{1}{v^n pq} \leq \frac{x^{2n+1} e^x}{2^{n-1} n!},$$

односно

$$n! \leq 2x \, e^x pq \left(\frac{x^2}{2} \right)^n,$$

Обзиром да n може бити произвољно велики природан број, овде имамо контрадикцију са теоремом (5). $\square$

Приметимо да тврђење теореме 15 такође следи из теореме 16.

Теорема 17 (*Ламберт*) *Ако је* $x \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ *и* $x > 0$*, онда је број* $\ln(x)$ *ирационалан.*

Доказ: Претпоставимо супротно. У том случају је $y = \ln(x)$ рационалан број различит од нуле, па је према теореми 16 број $x = e^y$ ирационалан, што противречи претпоставци. $\square$

5 Број π

Теорема 18 (*Лежандр*) *Број* π^2 *је ирационалан.*

Доказ: Нека је

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^{\pi/2} (\pi^2/4 - t^2)^n \cos(t) \, dt.$$

Непосредним рачунањем изводимо да је

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \cos(t) \, dt = \sin(t)|_0^{\pi/2} = 1,$$

а двоструком парцијалном интеграцијом да важи

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi/2} (\pi^2/4 - t^2) \cos(t) \, dt = (\pi^2/4 - t^2) \sin(t)\big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2t \sin(t) \, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 2t \sin(t) \, dt = -2t \cos(t)|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2 \cos(t) \, dt = 2 \sin(t)|_0^{\pi/2} = 2. \end{aligned}$$

Такође двоструком парцијалном интеграцијом изводимо да за $n \geq 2$ важи

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{n!}\int_0^{\pi/2}(\pi^2/4-t^2)^n\cos(t)\,dt \\
&= \frac{1}{n!}\left((\pi^2/4-t^2)^n\sin(t)\Big|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}2nt(\pi^2/4-t^2)^{n-1}\sin(t)\,dt\right) \\
&= \frac{2}{(n-1)!}\int_0^{\pi/2}t(\pi^2/4-t^2)^{n-1}\sin(t)\,dt \\
&= \frac{2}{(n-1)!}\Big(-t(\pi^2/4-t^2)^{n-1}\cos(t)\Big|_0^{\pi/2}+ \\
&\quad \int_0^{\pi/2}((\pi^2/4-t^2)-2(n-1)t^2)(\pi^2/4-t^2)^{n-2}\cos(t)\,dt\Big) \\
&= \frac{2}{(n-1)!}\int_0^{\pi/2}((2n-1)(\pi^2/4-t^2)-2(n-1)\pi^2/4)(\pi^2/4-t^2)^{n-2}\cos(t)\,dt \\
&= \frac{4n-2}{(n-1)!}\int_0^{\pi/2}(\pi^2/4-t^2)^{n-1}\cos(t)\,dt-\frac{\pi^2}{(n-2)!}\int_0^{\pi/2}(\pi^2/4-t^2)^{n-2}\cos(t)\,dt \\
&= (4n-2)I_{n-1}-\pi^2 I_{n-2}.
\end{aligned}$$

Из доказаних једнакости

$$\begin{aligned}
&I_0 = 1, \\
&I_1 = 2, \\
&n \geq 2 \Rightarrow I_n = (4n-2)I_{n-1}-\pi^2 I_{n-2}
\end{aligned}$$

следи да за свако $n \geq 1$ постоји полином $P_n(x)$ са целим коефицијентима, степена мањег од n такав да важи $I_n = P_n(\pi^2)$. Такође је $I_n > 0$ као интеграл позитивне функције. Претпоставимо да је $\pi^2 = p/q$ за неке $p, q \in \mathbb{N}$ и изведимо контрадикцију. Очигледно је

$$I_n q^{n-1} = P_n(p/q)q^{n-1}.$$

Обзиром да је P_n полином са целим коефицијентима степена нижег од n, вредност израза на десној страни једнакости је цео број, док је вредност израза на левој страни једнакости већа од нуле. Одатле следи да је $I_n q^{n-1} \geq 1$, односно

$$I_n \geq q^{1-n}.$$

Са друге стране је

$$I_n \leq \frac{1}{n!}\int_0^{\pi/2}(\pi^2/4)^n\,dt = \frac{(\pi/2)^{2n+1}}{n!}.$$

Дакле,

$$q^{1-n} \leq \frac{(\pi/2)^{2n+1}}{n!},$$

односно

$$n! \leq \frac{\pi}{2q}\left(\frac{\pi^2 q}{4}\right)^n.$$

Обзиром да n може бити произвољно велики природан број, овде имамо контрадикцију са теоремом 5. Стога је број π^2 ирационалан. $\square$

Теорема 19 (*Ламберт*) *Број π је ирационалан.*

Доказ: Ако је број π рационалан, онда је рационалан и број π^2, супротно теореми 18. $\square$

6 Тригонометријске и инверзне тригонометријске функције

Теорема 20 *За свако $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ број $\cos(\alpha)$ је ирационалан.*

Доказ: Обзиром да је $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, довољно је доказати теорему у случају када је $\alpha > 0$. Нека је $\alpha = p/q$ за $p, q \in \mathbb{N}$ и нека је

$$f_n(x) = \frac{x^{n-1}(p-qx)^{2n}(2p-qx)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad g_n(x) = f_n(\alpha - x), \quad F_n(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k f_n^{(2k)}(x).$$

Очигледно је $f_n(x) = g_n(\alpha - x)$, из чега индукцијом следи да је $f_n^{(k)}(x) = (-1)^k g_n^{(k)}(\alpha - x)$, односно

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k g_n^{(2k)}(\alpha - x),$$

односно

$$F_n(\alpha) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k g_n^{(2k)}(0),$$

Из једнакости

$$p - qx = (\alpha - x)q, \quad (\alpha^2 - (\alpha - x)^2)q = x(2\alpha - x)q = x(2p - qx)$$

следи да је

$$g_n(x) = \frac{x^{2n}(\alpha^2 - x^2)^{n-1}q^{3n-1}}{(n-1)!}.$$

Из теореме 10 закључује се да је $F_n'(\alpha) = 0$, а на из теореме 11 да је $F_n(\alpha)$ цео број дељив са $\frac{(2n)!q^{n+1}}{(n-1)!} = (n+1)!q^{n+1}\binom{2n}{n-1}$, па самим тим и са n. Применом исте теореме закључујемо да је $F_n(0)$ цео број који није дељив са n у случају да је n непаран прост број који не дели p. Непосредним рачуном добијамо да је

$$\begin{aligned}
\int_0^\alpha f_n(x)\sin(x)\,dx &= \int_0^\alpha (F_n(x) + F_n''(x))\sin(x)\,dx \\
&= \int_0^\alpha F_n(x)\sin(x)\,dx + \int_0^\alpha F_n''(x)\sin(x)\,dx \\
&= -F_n(x)\cos(x)|_0^\alpha + \int_0^\alpha F_n'(x)\cos(x)\,dx + \\
&\quad F_n'(x)\sin(x)|_0^\alpha - \int_0^\alpha F_n'(x)\cos(x)\,dx \\
&= F_n(0) - F_n(\alpha)\cos(\alpha) + F_n'(\alpha)\sin(\alpha) - F_n'(0)\sin(0) \\
&= F_n(0) - F_n(\alpha)\cos(\alpha).
\end{aligned}$$

Претпоставимо да је $\cos(\alpha) = r/s$ за неко $r \in \mathbb{Z}$ и $s \in \mathbb{N}$. Уколико је n непаран прост број који осим p не дели ни s, онда је

$$s \int_0^\alpha f_n(x) \sin(x)\, dx = F_n(0)s - F_n(\alpha)r$$

цео број који није дељив са n, па самим тим није нула. Међутим,

$$\left| s \int_0^\alpha f_n(x) \sin(x)\, dx \right| \leq s\alpha \frac{\alpha^{n-1} p^{2n} (2p)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{s\alpha p^2 (2\alpha p^3)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

На сонову теорема 9 и 5 n се може изабрати тако да буде тако велики прост број, да осим што премашује p и s важи

$$\frac{s\alpha p^2 (2\alpha p^3)^{n-1}}{(n-1)!} < 1,$$

што је контрадикција обзиром да не постоје цели бројеви различити од нуле, који су уз то по апсолутној вредности мањи од 1. □

Теорема 21 *За свако $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ бројеви $\sin^2(x)$, $\cos^2(x)$ и $\tan^2(x)$ су ирационални.*

Доказ: Тврђење следи из теореме 20 и једнакости

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \frac{2}{1 + \tan^2(x)} - 1.$$

□

Теорема 22 *За свако $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ бројеви $\sin(x)$, $\cos(x)$ и $\tan(x)$ су ирационални.*

Доказ: Ако је неки од бројева за које се тврди да је ирационалан заправо рационалан, онда је то и његов квадрат супротно теореми 21. □

Теорема 23 *За свако $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такво да $x^2 \in \mathbb{Q}$, број $\arctan(x)$ је ирационалан, а ако је још и $|x| \leq 1$, онда су и бројеви $\arcsin(x)$ и $\arccos(x)$ ирационални.*

Доказ: Ако је број $\alpha = \arctan(x)$ рационалан, онда је према теореми 21 број $\tan^2(\alpha) = x^2$ ирационалан супротно претпоставци. Слично се доказује и преостали део тврђења. □

Из претходне теореме следи да је на пример $\arctan(\sqrt{2})$ ирационалан број.

Теорема 24 *За свако $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ број $\arctan(x)$ је ирационалан, а ако је још и $|x| \leq 1$, онда су и бројеви $\arcsin(x)$ и $\arccos(x)$ ирационални.*

Доказ: Ако је број $\alpha = \arctan(x)$ рационалан, онда је према теореми 22 број $\tan(\alpha) = x$ ирационалан супротно претпоставци. Слично се доказује и преостали део тврђења. □

7 Хиперболичке и инверзне хиперболичке функције

Теорема 25 *За свако* $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ *број* $\cosh(\alpha)$ *је ирационалан.*

Доказ: Изводи се слично доказу теореме 20, с тим да због

$$\int_0^\alpha F_n(x)\sinh(x)\,dx = F_n(\alpha)\cosh(\alpha) - F_n(0) - \int_0^\alpha F_n'(x)\cosh(x)\,dx$$

и

$$\int_0^\alpha F_n''(x)\sinh(x)\,dx = F_n'(\alpha)\sinh(\alpha) - \int_0^\alpha F_n'(x)\cosh(x)\,dx$$

треба изабрати

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} f_n^{(2k)}(x)$$

да би важило $f_n(x) = F_n(x) - F_n''(x)$ и самим тим

$$\int_0^\alpha f_n(x)\sinh(x)\,dx = F_n(\alpha)\cosh(\alpha) - F_n(\alpha) - F_n'(\alpha)\sinh(\alpha),$$

односно да би се пократило $\int_0^\alpha F_n'(x)\cosh(x)\,dx$. □

Приметимо да из теореме 25 и једнакости

$$\cosh(x) = \frac{e^x + (e^x)^{-1}}{2}$$

следи теорема 16.

Теорема 26 *За свако* $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ *бројеви* $\sinh^2(x)$, $\cosh^2(x)$ *и* $\tanh^2(x)$ *су ирационални.*

Доказ: Тврђење следи из теореме 25 и једнакости

$$\cosh(2x) = 2\cosh^2(2x) - 1 = 1 + 2\sinh^2(x) = \frac{2}{1-\tanh^2(x)} - 1.$$

□

Теорема 27 *За свако* $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ *бројеви* $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ *и* $\tanh(x)$ *су ирационални.*

Доказ: Ако је неки од бројева за које се тврди да је ирационалан заправо рационалан, онда је то и његов квадрат супротно теореми 26. □

Повежимо још једном ирационалност бројева облика e^x са хиперболичким функцијама.

Теорема 28 *За свако* $x \in \mathbb{R}$ *бројеви* e^{2x} *и* $\tanh(x)$ *су или оба рационаљна или оба ирационална.*

Доказ: Тврђење следи из једнакости

$$\tanh(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

и

$$e^{2x} = \frac{1+\tanh(x)}{1-\tanh(x)}.$$

□

Теорема 29 *За свако* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *такво да* $x^2 \in \mathbb{Q}$ *број* $\operatorname{asinh}(x)$ *је ирационалан, а ако је још и* $|x| < 1$, *онда је и број* $\operatorname{atanh}(x)$ *ирационалан, док је у случају да је* $|x| \geq 1$ *број* $\operatorname{acosh}(x)$ *ирационалан.*

Доказ: Ако је број $\alpha = \operatorname{asinh}(x)$ рационалан, онда је према теореми 26 број $\sinh^2(\alpha) = x^2$ ирационалан супротно претпоставци. Слично се доказује и преостали део тврђења. $\square$

Теорема 30 *За свако* $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ *број* $\operatorname{asinh}(x)$ *је ирационалан, а ако је још и* $|x| < 1$, *онда је и број* $\operatorname{atanh}(x)$ *ирационалан, док је у случају да је* $|x| \geq 1$ *број* $\operatorname{acosh}(x)$ *ирационалан.*

Доказ: Ако је број $\alpha = \operatorname{asinh}(x)$ рационалан, онда је према теореми 27 број $\sinh(\alpha) = x$ ирационалан супротно претпоставци. Слично се доказује и преостали део тврђења. $\square$