Понедељак, 18.07.2011.

1. задатак. За скуп $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ који се састоји од четири различита природна броја, збир $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ је означен са s_A. Нека је n_A број парова $(i, j), 1 \leqslant i < j \leqslant 4$, за које $a_i + a_j$ дели s_A. Одредити све скупове A, који се састоје од четири различита природна броја, за које n_A достиже највећу могућу вредност.

2. задатак. Нека је $\mathcal{S}$ коначан скуп тачака у равни који садржи бар две тачке. Никоје три тачке скупа $\mathcal{S}$ нису колинеарне. *Ветрењачом* се назива следећи поступак. На почетку се бира права ℓ која садржи тачно једну тачку $P \in \mathcal{S}$. Права ℓ ротира у правцу казаљке на сату око *центра* P до момента у коме по први пут садржи неку другу тачку скупа $\mathcal{S}$. Од тог момента та тачка, Q, постаје нови центар, а права наставља да се ротира око Q у правцу казаљке на сату до првог момента у коме поново садржи неку другу тачку скупа $\mathcal{S}$. Овај поступак се бесконачно продужава.
Доказати да је могуће изабрати неку тачку P скупа $\mathcal{S}$ и неку праву ℓ која садржи P, тако да у добијеној ветрењачи свака тачка скупа $\mathcal{S}$ постаје центар бесконачно много пута.

3. задатак. Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функција за коју важи

$$f(x + y) \leqslant y f(x) + f(f(x))$$

за све реалне бројеве x и y. Доказати да је $f(x) = 0$ за свако $x \leqslant 0$.

Време рада: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

Уторак, 19.07.2011.

4. задатак. Нека је n природан број. Дате су теразије (уравнотежена вага са два таса) и n тегова, тежина $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Свих n тегова се стављају, један за другим, на тасове теразија, односно у сваком од n корака се бира један од тегова који се већ не налази на тасовима и ставља или на леви или на десни тас; притом се тегови постављају тако да ни у једном тренутку десни тас није тежи од левог. Одредити број начина на који се ово постављање може извршити.

5. задатак. Нека је $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, таква да је за све целе m и n разлика $f(m) - f(n)$ дељива са $f(m-n)$. Доказати да је, за све целе m и n за које је $f(m) \leqslant f(n)$, број $f(n)$ дељив са $f(m)$.

6. задатак. Нека је ABC оштроугли троугао и нека је Γ његова описана кружница. Нека је права ℓ произвољна тангента кружнице Γ и нека су ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c праве симетричне са ℓ у односу на праве BC, CA и AB, редом. Доказати да описана кружница троугла одређеног правама ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c додирује кружницу Γ.

Време рада: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена