

Понедељак, 18.07.2011.

1. задатак. За скуп $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ који се састоји од четири различита природна броја, збир $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ је означен са s_A . Нека је n_A број парова (i, j) , $1 \leq i < j \leq 4$, за које $a_i + a_j$ дели s_A . Одредити све скупове A , који се састоје од четири различита природна броја, за које n_A достиже највећу могућу вредност.

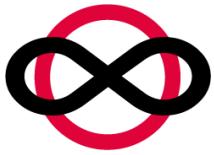
2. задатак. Нека је \mathcal{S} коначан скуп тачака у равни који садржи бар две тачке. Никоје три тачке скупа \mathcal{S} нису колинеарне. *Ветрењачом* се назива следећи поступак. На почетку се бира права ℓ која садржи тачно једну тачку $P \in \mathcal{S}$. Права ℓ ротира у правцу казаљке на сату око центра P до момента у коме по први пут садржи неку другу тачку скупа \mathcal{S} . Од тог момента та тачка, Q , постаје нови центар, а права наставља да се ротира око Q у правцу казаљке на сату до првог момента у коме поново садржи неку другу тачку скупа \mathcal{S} . Овај поступак се бесконачно продужава.

Доказати да је могуће изабрати неку тачку P скупа \mathcal{S} и неку праву ℓ која садржи P , тако да у добијеној ветрењачи свака тачка скупа \mathcal{S} постаје центар бесконачно много пута.

3. задатак. Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функција за коју важи

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

за све реалне бројеве x и y . Доказати да је $f(x) = 0$ за свако $x \leq 0$.



Уторак, 19.07.2011.

4. задатак. Нека је n природан број. Дате су теразије (уравнотежена вага са два таса) и n тегова, тежина $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$. Свих n тегова се стављају, један за другим, на тасове теразија, односно у сваком од n корака се бира један од тегова који се већ не налази на тасовима и ставља или на леви или на десни тас; притом се тегови постављају тако да ни у једном тренутку десни тас није тежи од левог. Одредити број начина на који се ово постављање може извршити.

5. задатак. Нека је $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, таква да је за све целе m и n разлика $f(m) - f(n)$ дељива са $f(m - n)$. Доказати да је, за све целе m и n за које је $f(m) \leq f(n)$, број $f(n)$ дељив са $f(m)$.

6. задатак. Нека је ABC оштроугли троугао и нека је Γ његова описана кружница. Нека је права ℓ произвољна тангента кружнице Γ и нека су ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c праве симетричне са ℓ у односу на праве BC, CA и AB , редом. Доказати да описана кружница троугла одређеног правама ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c додирује кружницу Γ .