ПОПРАВНИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ОСНОВА ГЕОМЕТРИЈЕ 2

Део први

21. јун 2011

Професор: Војислав Петровић — Асистент: Бојан Башић

1. Нека су $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ истих површина, и нека важи $\measuredangle BAC \cong \measuredangle B'A'C'$. Доказати: $|AB|\cdot|AC| = |A'B'|\cdot|A'C'|$.

   Једна идеја: Ако су C_0 и C_0' подножја висина из C и C' у посматраним троугловима, редом, посматрати $\triangle ACC_0$ и $\triangle A'C'C_0'$.

2. Доказати да четири краја двеју подударних тетива исте кружнице образују једнакокраки трапез.

3. Темена шестоугла $ABCDEF$ леже на кружници $k(O,r)$, и при том важи $|AB| = |CD| = |EF| = r$ (дакле, дужине назначених страница једнаке су полупречнику кружнице). Нека су тачке M, N и P средишта страница AF, BC, DE, редом. Доказати да је $\triangle MNP$ једнакостраничан троугао.

   Једна идеја: Задатак решавати пратећи следеће кораке. Прво уочити које је врсте четвороугао $ABCD$. Захваљујући томе, показати да важи $\triangle KBN \cong \triangle LCN$, где су K и L средишта страница AB и CD, редом. Израчунати (на основу особина средње линије троугла) $\measuredangle KNB$ и $\measuredangle LNC$. Описати кружницу с центром у тачки N која пролази кроз K и L (зашто таква постоји?), и израчунати у њој периферијски угао над оним луком $\widehat{LK}$ који је изван шестоугла $ABCDEF$. Приметити да аналогно постоји кружница с центром у тачки P која пролази кроз L и S, где је S средиште странице EF; ако је R друга тачка пресека последњих двеју кружница, констатовати да важи $\measuredangle LRK = \measuredangle LRS = \dots$ (колико?), а одатле одмах израчунати и $\measuredangle KRS$. Најзад, описати кружницу с центром у тачки M која пролази кроз K и S, израчунати у њој периферијски угао над луком $\widehat{KS}$ који је изван шестоугла, и „склопити коцкице“. Задатак довршити констатујући под којим се углом (генерално) заједничка тетива двеју кружница сече с правом која спаја њихове центре, па применом ове особине израчунавајући $\measuredangle MNP$, $\measuredangle NPM$ и $\measuredangle PMN$.

ПОПРАВНИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ОСНОВА ГЕОМЕТРИЈЕ 2

Део други

21. јун 2011

Професор: Војислав Петровић — Асистент: Бојан Башић

1. Доказати да се инверзијом у односу на кружницу уписану у дати троугао његова описана кружница као и праве одређене његовим страницама пресликавају у четири подударне кружнице.

   Једна идеја: Закључак извести на основу првог задатка с другог колоквијума — подсећање, у њему се тврди да се посматраном инверзијом праве одређене страницама пресликавају у три подударне кружнице — и првог задатка с првог колоквијума — подсећање, у њему се показује да је полупречник кружнице одређене другим пресечним тачкама трију подударних, конкурентних кружница једнак полупречнику посматраних кружница.

2. У тетраедар чије су све пљосни једнаких површина уписана је сфера, и на свакој његовој пљосни повучене су дужи које спајају темена те пљосни с тачком у којој је сфера додирује. Ове дужи деле сваку пљосан на три троугла. Доказати да се на свакој пљосни јавља иста колекција вредности за површине ових троуглова.

3. У ПМХП (полураванском или кружном, по жељи) конструисати фигуру ограничену двема подударним четврткружницама (реч је, дакле, о фигури која у еуклидској геометрији има облик попут обриса ока).

   Једна идеја: Најпре конструисати једну четврткружницу, а потом кроз крајње тачке конструисати њој подударну.