У овом тексту ћемо претпостављати да је $m \geqslant 0$, $A \subseteq \mathbb{R}$, a унутрашња тачка скупа A, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ такво да $f^{(m)}(a)$ постоји и $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ функција дефинисана са

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^m}, & x \neq a, \\ \dfrac{f^{(m)}(a)}{m!}, & x = a. \end{cases}$$

Јасно је да изузимајући тачку a, изводи било ког реда функција f и g су дефинисани, односно дефинисани и непрекидни, у истим тачкама.

Теорема 1 *За ма које $r \geqslant m$ важи*

а) Ако постоји $f^{(r)}(a)$, онда је

$$g^{(r-m)}(a) = \frac{(r-m)!}{m!} f^{(r)}(a). \tag{1}$$

б) Ако $f^{(r)}$ постоји у околини U тачке a и непрекидно је у тачки a, онда је $g^{(r-m)}$ дефинисано у околини U тачке a и непрекидно у тачки a.

Доказ: Тврђење тривијално важи за $m = 0$. Докажимо га за $m = 1$. Из дефиниција непрекидности (примењене на функцију g) и извода (примењене на функцију f) следи да је функција g непрекидна у тачки a. Индукцијом се доказује да, ако је функција f диференцијабилна n пута у некој шупљој околини тачке a, онда у тој шупљој околини тачке a важи

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(a-x)^k - f(a)}{\dfrac{(x-a)^{n+1}}{n!}}. \tag{2}$$

Доказ за a изводимо индукцијом по r. За $r = 1$ тврђење се непосредно проверава. Претпоставимо да је $r > 1$. По дефиницији извода и на основу (2) је

$$g^{(r-1)}(a) = \lim_{x \to a} \frac{g^{(r-2)}(x) - g^{(r-2)}(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{(-1)^r \dfrac{\sum_{k=0}^{r-2} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(a-x)^k - f(a)}{\frac{(x-a)^{r-1}}{(r-2)!}} - \dfrac{f^{(r-1)}(a)}{r-1}}{x-a},$$

односно

$$g^{(r-1)}(a) = \lim_{x \to a} \frac{(-1)^r \left(\sum_{k=0}^{r-2} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(a-x)^k - f(a) \right) - \frac{f^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}(x-a)^{r-1}}{\frac{(x-a)^r}{(r-2)!}}.$$

Примењујући Лопиталово правило добијамо да је

$$g^{(r-1)}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f^{(r-1)}(x) - f^{(r-1)}(a)}{r(x-a)},$$

одакле следи (1). Непрекидност $g^{(r-1)}$ у тачки a се следи из Лопиталовог правила примењеног на идентитет (2) за $n = r - 1$.

Претпоставимо сада да је $m > 1$ и дефинишимо функцију $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^m}, & x \neq a, \\ \dfrac{f^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}, & x = a. \end{cases}$$

Тада важи

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{h(x) - h(a)}{x-a}, & x \neq a, \\ h'(a), & x = a. \end{cases}$$

Коришћењем ове чињенице доказује се остатак тврђења. QED