Specijalna relativnost bez brzine svetlosti

NicholasMetropolis za www.elitesecurity.org

16. maj 2010

Sadržaj

1 Uvod

Većina udžbenika uvodi specijalnu teoriju relativnosti preko dva postulata, onako kako je to uradio i Albert Ajnštajn:

- *Postulat relativnosti*
- *Postulat invarijantnosti brzine svetlosti*

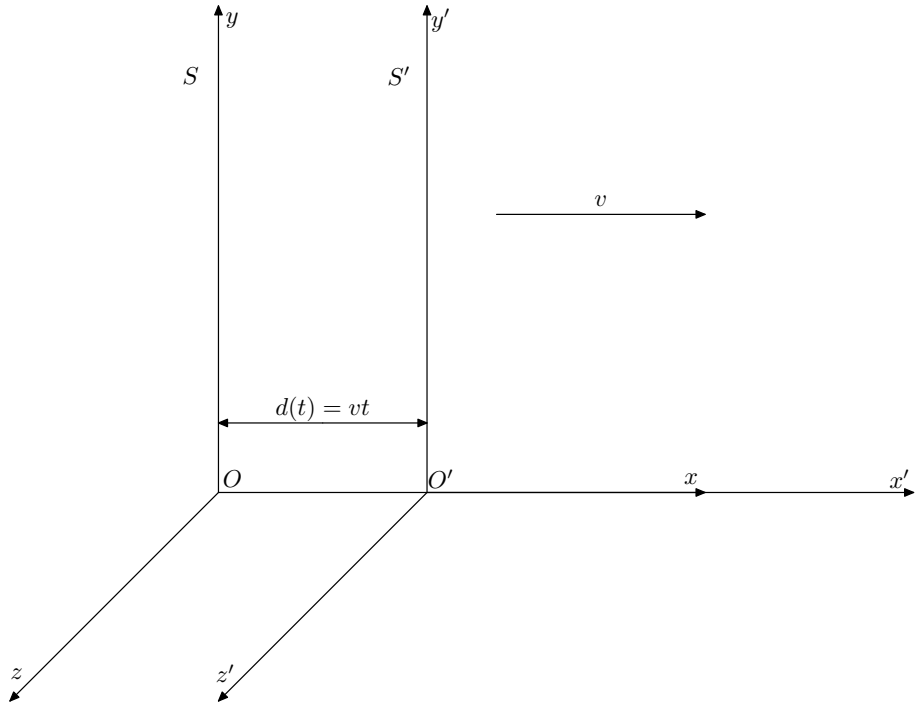
Uz ovo, koriste se i implicitne pretpostavke o translatornoj i rotacionoj simetriji prostora, kao i translatornoj simetriji vremena (homogenost i izotropnost u starijem vokalbularu).

Međutim, još 1906. godine Anri Poenkare (Henri Poincaré) je pokazao da je postulat invarijantnosti brzine svetlosti *suvišan* i da je postojanje invarijantne ograničavajuće brzine (ne nužno povezane sa elektromagnetizmom) *posledica* prvog postulata i uslova *kauzalnosti*.

2 Izvođenje Lorencovih transformacija

2.1 Opšta forma Lorencovih transformacija

Krećemo sa standardnom postavkom koja je prikazana na slici ispod. Imamo dva inercijalna referentna sistema S i S', sa paralelnim koordinatnim osama, pri čemu se sistem S' kreće u odnosu na sistem S brzinom v duž x-ose. U $t = 0$ koordinatni počeci oba referentna sistema se poklapaju



Kako za y i z ose važi $y' = y$ i $z' = z$ dovoljno je razmotriti samo transformacije x i t pri prelasku iz sistema S u S'. Transformacije su u opštem slučaju:

$$\begin{aligned} x' &= f_x(x,t) \\ t' &= f_t(x,t) \end{aligned} \tag{1}$$

Budući da pretpostavljamo translatornu simetriju prostora i vremena (homogenost) relativna rastojanja između dva događaja u jednom referentnom sistemu mogu da zavise samo od relativnih rastojanja u drugom sistemu reference, tako da imamo na osnovu (1)

$$\begin{aligned} x'_1 - x'_2 &= f_x(x_1,t_1) - f_x(x_2,t_2) = f_x(x_1 - x_2, t_1 - t_2) \\ t'_1 - t'_2 &= f_t(x_1,t_1) - f_t(x_2,t_2) = f_t(x_1 - x_2, t_1 - t_2) \end{aligned}$$

za svako x_1, x_2, t_1, t_2. Da bi ovo bilo zadovoljeno fukcije f_x i f_t moraju biti homogene i llinearne što znači da transformacije imaju opšti oblik

$$\begin{aligned} x' &= Ax + Bt \\ t' &= Cx + Dt \end{aligned} \tag{2}$$

gde su koeficijenti A, B, C i D funkcije brzine v. Matrični zapis prethodne jednakosti je

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \tag{3}$$

ili kompaktnije

$$\mathbf{x}' = \mathbf{\Lambda}(v)\mathbf{x} \tag{4}$$

Dva koeficijenta se mogu eliminisati koristeći se činjenicom da koordinatni početak O' u referentnom sistemu S' ima položaj $x' = 0$ dok u referentnom sistemu S ima položaj $x = vt$, tj. prema prvoj jednačini iz (2)

$$0 = Avt + Bt$$

iz čega sledi da je $B = -vA$. Na isti način koristimo činjenicu da koordinatni početak O ima položaje $x = 0$ i $x' = -vt'$ u referentnim sistemima S i S' respektivno, tj.

$$-vt' = -vAt$$

gde možemo iskoristiti drugu jednačinu iz (2) da eliminišemo t' što nam daje

$$-vDt = -vAt$$

iz čega sledi da je $D = A$. Ako uvedemo oznake $\gamma = A$ i $\delta = C/A$ imamo da je

$$\mathbf{\Lambda}(v) = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -v \\ \delta & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Preostalo je da se odrede dve nepoznate funkcije od v, γ i δ.

2.2 Određivanje γ i δ

Lako se može pokazati da je γ parna funkcija od v a δ neparna, tj. $\gamma(-v) = \gamma(v)$ i $\delta(-v) = -\delta(v)$. To se može pokazati tako što obrnemo smerove x i x' osa, tj. imamo nove koordinate $x_r = -x$ i $x'_r = -x'$. Sa ovakvom postavkom sistem S' se kreće brzinom $-v$ duž x_r ose u odnosu na sistem S što na osnovu (3) daje

$$\begin{bmatrix} x'_r \\ t' \end{bmatrix} = \gamma(-v) \begin{bmatrix} 1 & v \\ \delta(-v) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ t \end{bmatrix} \tag{6}$$

Ako sada uzmemo (3) i u njoj prosto pomnožimo x i x' sa -1 dobijamo još jednu vezu

$$\begin{bmatrix} x'_r \\ t' \end{bmatrix} = \gamma(v) \begin{bmatrix} 1 & v \\ -\delta(v) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ t \end{bmatrix} \tag{7}$$

Direktnim poređenjem (6) i (7) odmah vidimo da važi $\gamma(-v) = \gamma(v)$ i $\delta(-v) = -\delta(v)$ što smo i hteli da pokažemo.

Budući da Lorencova transformacija za $v = 0$ predstavlja identičnu transformaciju jer je $x' = x$ i $t' = t$ imamo još da važi na osnovu (5) $\gamma(0) = 1$ i $\delta(0) = 0$. Sumirano

$$\begin{aligned} \gamma(-v) &= \gamma(v) \\ \delta(-v) &= -\delta(v) \\ \gamma(0) &= 1 \\ \delta(0) &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Razmotrimo sada šta se dešava kada imamo dve uzastopne Lorencove transformacije: iz sistema S u sistem S', brzinom v_1 i potom iz sistema S' u sistem S'' brzinom v_2. Rezultujuća transformacija je i sama transformacija iz sistema S u sistem S'' nekom brzinom v_u. Njenu formu dobijamo prostim množenjem matrica iz (5) za odgovarajuće brzine

$$\mathbf{\Lambda}(v_u) = \mathbf{\Lambda}(v_2)\mathbf{\Lambda}(v_1) = \gamma(v_1)\gamma(v_2) \begin{bmatrix} 1 & -v_2 \\ \delta(v_2) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -v_1 \\ \delta(v_1) & 1 \end{bmatrix}$$

Rezultat množenja je

$$\mathbf{\Lambda}(v_u) = \gamma(v_1)\gamma(v_2) \begin{bmatrix} 1 - \delta(v_1)v_2 & -v_1 - v_2 \\ \delta(v_1) + \delta(v_2) & 1 - \delta(v_2)v_1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Kako u opštoj Lorencovoj transformaciji dijagonalni elementi moraju biti jednaki imamo da važi

$$1 - \delta(v_1)v_2 = 1 - \delta(v_2)v_1$$

odnosno

$$\frac{v_1}{\delta(v_1)} = \frac{v_2}{\delta(v_2)}$$

Kako je leva strana funkcija samo od v_1, a desna od v_2 ova jednakost može biti ispunjena samo ukoliko važi

$$\frac{v}{\delta(v)} = k \tag{10}$$

gde je k neka univerzalna konstanta. Ako sada iskoristimo (10) u (5) dobićemo

$$\mathbf{\Lambda}(v) = \gamma(v) \begin{bmatrix} 1 & -v \\ \frac{v}{k} & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Napravimo sada transformaciju iz referentnog sistema S u S' i zatim se vratimo nazad iz S' u S. Transformacija iz S u S' je data matricom

$$\mathbf{\Lambda}(v) = \gamma(v) \begin{bmatrix} 1 & -v \\ \frac{v}{k} & 1 \end{bmatrix}$$

a povratna transformacija u S' iz S matricom

$$\mathbf{\Lambda}(-v) = \gamma(-v) \begin{bmatrix} 1 & v \\ -\frac{v}{k} & 1 \end{bmatrix}$$

Ukupna transformacija je

$$\mathbf{\Lambda}(0) = \gamma(-v)\gamma(v) \begin{bmatrix} 1 & v \\ -\frac{v}{k} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -v \\ \frac{v}{k} & 1 \end{bmatrix} = \gamma(-v)\gamma(v) \begin{bmatrix} 1+\frac{v^2}{k} & 0 \\ 0 & 1+\frac{v^2}{k} \end{bmatrix}$$

Kako je ukupna transformacija $\mathbf{\Lambda}(0)$ identična transformacija (pošto se vraćamo tamo odakle smo pošli), dijagonalni elementi moraju biti jednaki jedinici što znači

$$\gamma(-v)\gamma(v)\left(1+\frac{v^2}{k}\right) = 1 \tag{12}$$

Koristeći prethodno pokazanu parnost $\gamma(v)$ dobijamo iz (12) da je

$$\gamma(v)^2 = \frac{1}{1+\frac{v^2}{k}} \quad \Rightarrow \quad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^2}{k}}} \tag{13}$$

gde je negativni znak ispred korena eliminisan na osnovu uslova $\gamma(0) = 1$.

2.3 Koliko je k?

Forma Lorencovih transformacija, uzimajući u obzir (13) je sada

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^2}{k}}} \begin{bmatrix} 1 & -v \\ \frac{v}{k} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$$

Ukoliko je $k > 0$ možemo uvesti smenu $\tan\phi = v^2/k$ što posle elementarnih algebarskih i trigonometrijskih transformacija daje

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sqrt{k}\sin\phi \\ \dfrac{\sin\phi}{\sqrt{k}} & \sin\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \tag{14}$$

Ukoliko stavimo $\tau = \sqrt{k}t$ vidimo da (14) ne predstavlja ništa drugo do rotacije u (x, τ) ravni. Ovo onda znači da za bilo koja dva događaja (x_1, t_1) i (x_2, t_2), $t_2 > t_1$, u referentnom sistemu S, postoji referentni sistem S' gde $t_2' < t_1'$, tj. redosled tih događaja je obrnut što je apsurdno jer znači da se u tom referentnom sistemu posledice dešavaju pre uzroka. Drugim rečima, kauzalnost je narušena. Dakle mora da važi $k \leq 0$. Ako uvedemo pozitivnu konstantu c koja ima dimenzije brzine, takvu da je $k = -c^2$, $c \in (0, \infty)$ imamo da su na kraju Lorencove transformacije

$$\mathbf{\Lambda}(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \begin{bmatrix} 1 & -v \\ -\dfrac{v}{c^2} & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

3 Posledice

3.1 Invarijantnost brzine c

Razmotrimo česticu koja se u u sistemu S kreće duž x-ose brzinom c i koja se u trenutku $t = 0$ nalazila u koordinatnom početku. Njena jednačina kretanja je $x = ct$. Pređimo sada u proizvoljni referentni sistem koji se u odnosu na sistem S' kreće brzinom v duž x-ose. Koordinate u S' su date sa:

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{bmatrix} 1 & -v \\ -\frac{v}{c^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ t \end{bmatrix}$$

odnosno po komponentama

$$x' = \frac{t(c-v)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t\left(1-\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Ukoliko se druga jednačina reši po t, a potom taj rezultat zameni u prvu jednačinu, posle jednostavne algebre se dobija rezultat

$$x' = ct'$$

tj. čestica se i u odnosu na S' kreće brzinom c.

Dakle, čestica koja se u odnosu na jedan referentni sistem kreće brzinom c, kretaće se brzinom c i u odnosu na *bilo koji* drugi referenti sistem. Drugim rečima, brzina c je *invarijantna*.

3.2 Slaganje brzina

Vratimo se ponovo na jednačinu (9) koja opisuje dve uzastopne Lorencove transformacije. Ukoliko u njega uvrstimo vrednosti $\gamma(v)$ i $\delta(v)$ dobijamo da je

$$\mathbf{\Lambda}(v_u) = \gamma(v_1)\gamma(v_2) \begin{bmatrix} 1+\frac{v_1 v_2}{c^2} & -v_1 - v_2 \\ -\frac{v_1+v_2}{c^2} & 1+\frac{v_1 v_2}{c^2} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Kako je $\mathbf{\Lambda}(v_u)$ i sama Lorencova transformacija za neku brzinu v_u, ona mora imati formu

$$\mathbf{\Lambda}(v_u) = \gamma(v_u) \begin{bmatrix} 1 & -v_u \\ -\frac{v_u}{c^2} & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Pošto matrice na desnim stranama jednakosti (16) i (17) predstavljaju istu transformaciju, one moraju biti identične. Da bi to bilo zadovoljeno, mora da važi

$$\gamma(v_u)v_u = \gamma(v_1)\gamma(v_2)(v_1 + v_2)$$

što je dobijeno izjednačavanjem $(1, 2)$ matričnih elemenata (bilo koji drugi su mogli da posluže, zato što kada je zadovoljena jednakost za jedan par matričnih elemenata, automatski je zadovoljena i za sve ostale). Kada se ubace odgovarajuće vrednosti γ u prethodnu jednačinu, i ona reši po v_u dobija se

$$v_u = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \tag{18}$$

Jednakost (18) predstavlja *zakon slaganja brzina* jer je pomoću njega moguće odrediti brzinu u odnosu na bilo koji inercijalni referentni sistem ukoliko je poznata brzina u odnosu na jedan referentni sistem.

Lako je pokazati da je v_u kao funkcija od v_1 i v_2 rastuća za $-c < v_1 < c$ i $-c < v_2 < c$ i da za $v_1 = \pm c$ i $v_2 = \pm c$ ima vrednost $v_u(v_1 = \pm c, v_2 = \pm c) = \pm c$.

3.3 Maksimalnost brzine c

Pretpostavimo da se neka čestica kreće brzinom $v \geq c$ duž x-ose u nekom referentnom sistemu S. Ukoliko pređemo u referentni sistem S' u kome čestica miruje, primenom (15) nalazimo da koordinate svih događaja postaju imaginarne ili divergiraju (u slučaju $v = c$) što je apsurdno i što znači da se čestica, tj. drugi referentni sistem, u odnosu na referentni sistem S može kretati samo brzinama manjim c.

Neka sada, u skladu sa tim, u referentnom sistemu S imamo česticu koja se kreće brzinom $v_1 < c$. Ukoliko pređemo u referenti sistem S' koji se kreće brzinom $v_2 < c$ u odnosu na S, direktnom primenom (18) nalazimo brzinu kretanja čestice u odnosu na referentni sistem S'. Uzimanjem u obzir osobina funkcije $v_u(v_1, v_2)$ nalazimo da se čestica i u odnosu na S' kreće brzinom manjom od c.

Na osnovu singularnosti Lorencovih transformacija i zakona slaganja brzina zaključujemo da ne postoji referentni sistem u odnosu na koji se neka čestica može kretati brže od c,tj. brzina c predstavlja gornju granicu brzine kretanja u bilo kom inercijalnom referentnom sistemu.

4 Priroda invarijantne brzine c

Pokazano je da pretpostavljajući

- *Translatornu i rotacionu simetriju prostora i translatornu simetriju vremena*
- *Princip relativnosti*
- *Kauzalnost*

u koordinatnim transformacijama figuriše *invarijantna maksimalna* brzina c čije moguće vrednosti leže u opsegu $(0, \infty)$. U slučaju kada je $c = \infty$ transformacije (15) se svode na Galilejeve transformacije

$$\mathbf{\Lambda}_{c=\infty}(v) = \begin{bmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Na pitanje da li je c konačno ili beskonačno odgovor je moguće dati eksperimentom.

Princip najmanjeg dejstva i simetrijska analiza nalažu da će *svako* bezmaseno polje propagirati brzinom c (detaljno izvođenje zahteva od čitaoca dobro poznavanje klasične i kvantne teorije polja i ovde će biti izostavljeno - osim ako neko baš bude insistirao). Dakle, za utvrđivanje vrednosti c, dovoljno je utvrditi brzinu kojom se neko bezmaseno polje prostire (tj. brzinu kretanja kvanata polja).

Najpoznatije bezmaseno polje je elektromagnetno polje. Brzina prostiranja elektromagnetnog polja (tj. njegovih kvanata - fotona) je $v_{EM} = c = 299,792,458 m/s$. Još jedno, manje poznato, bezmaseno polje, je neutrinsko polje i brzina njegovog prostiranja (tj. brzina neutrina) se poklapa sa brzinom prostiranja elektromagnetnog polja, kako teorija i nalaže.

Ovo naravno nisu jedine mogućnosti, zato što vrednost c utiče na formu jednačina kretanja pa je zato moguće razrešiti pitanje konačnosti c posmatranjem kretanja čestica. Npr, činjenica da nije moguće ubrzati elektron, inače izuzetno laku česticu, na brzine veće od v_{EM}, a da samo dostizanje brzine bliske v_{EM} zahteva ogromne količine energije, nalaže da je c konačno.