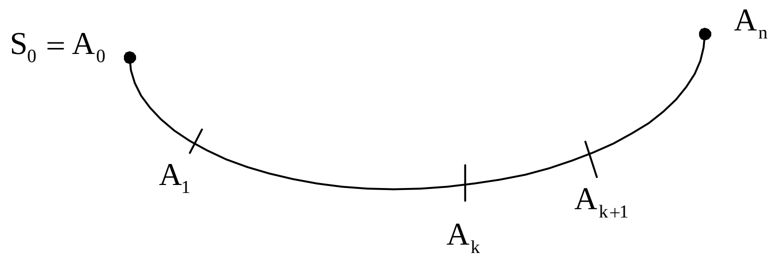
Krivolinijski integral prve vrste (po luku!)

U prostoru R^3 razmotrimo neku krivu C koja zadovoljava sledeće uslove:
1. kriva je neprekidna,
2. kriva je prosta,
3. kriva je rektificibilna,
4. može biti otvorena (ili zatvorena).

$$C:(x,y,z)\in R^3 \left| \begin{array}{l} x=x(t) \\ y=y(t),\ t\in[a,b]. \\ z=z(t) \end{array} \right.$$

Njena početna tačka neka je označena sa S_0. Svaka tačka S te krive jednoznačno je određena dužinom luka s merenom od S_0 do S.

Krivu C podelimo tačkama $S_0=A_0,A_1,...,A_n(=$krajnja tačka) na proizvoljan način. Izbor ovih tačaka zovemo podela P, i kada n fiksiramo proizvoljne su dužine lukovi $\overset{\frown}{A_kA_{k+1}}$.



Neka nadalje σ_k označava dužinu luka $\overset{\frown}{A_kA_{k+1}}$ $(k=0,1,...,n-1)$.

Na svakom od lukova $\overset{\frown}{A_kA_{k+1}}$ izaberimo na proizvoljan način tačku M_k i uzmimo da je $M_k=M_k(\xi_k,\varphi_k,\eta_k)$ $(k=0,1,...,n-1)$. Ovakvih tačaka ima koliko i lukova.

Neka je mimo svega ovoga data funkcija $f:R^3\to R$, koja je definisana u svim tačkama krive C. Sa σ tada označimo $\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(M_k)\sigma_k$, što se naziva Darboux-ova suma za krivolinijski integral I vrste. Označimo još $\lambda=\max\limits_{0\le k\le n-1}\sigma_k$!

NAPOMENA:

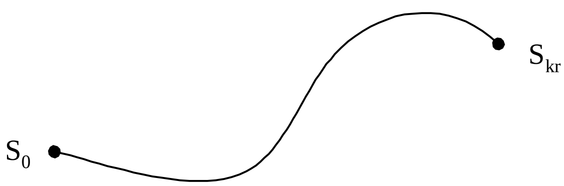
Pisaćemo simbol $\lim\limits_{\lambda\to 0+}\sigma=I$ ako i samo ako je ispunjen sledeći Cauchy-ev uslov:

$(\exists I\in R)(\forall P)\left(\forall M_k\in \overset{\frown}{A_kA_{k+1}}\right)(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0)\ \lambda<\delta\Rightarrow|\sigma-I|<\varepsilon$.

Definicija 1. ***(Definicija krivolinijskog integrala I vrste)***
Ako postoji apsolutna realna konstanta $I \in R\ (-\infty < I < +\infty)$ takva da je $\lim\limits_{\lambda \to 0+} \sigma = I$, tada imamo sledeća tvrđenja:

(a) Za funkciju f kažemo da je integrabilna u smislu krivolinijskog integrala prve vrste po krivoj C.
(b) Broj I nazivamo krivolinijski integral I vrste funkcije f duž date krive C.
(c) Tada broj I označavamo na sledeći način $I = (I)\int\limits_C f(x,y,z)\cdot ds$. Pri čemu će umesto simbola $\int$ stajati $\oint$ ako smo unapred svesni da je kriva C po kojoj integralimo zatvorena.
(d) U slučaju funkcije dve promenljive pišemo: $\int\limits_C f(x,y)\cdot ds$ gde je $C \in R^2$.

Svođenje ovog integrala na običan Riemann-ov integral.
Početna tačka krive S_0 je određena sa s=0 i neka je krajnja tačka određena dužinom luka s=S_{kr}. Na taj način kriva C se može napisati sledećim skupom jednačina:
$C: x = x(s), y = y(s), z = z(s), 0 \le s \le S_{kr}$.



Svakoj podeonoj tački A_k odgovara dužina luka $s_k\ (0 \le k \le n)$, merena od S_0.
Označimo sa $\sigma_k = s_{k+1} - s_k = \Delta s_k$.
Svaka od tačaka $M_k \in \overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$ je data sa $M_k = M_k\left(x\left(\overline{s_k}\right), y\left(\overline{s_k}\right), z\left(\overline{s_k}\right)\right)$, gde je $\overline{s_k} \in [s_k, s_{k+1}]$.
Tada je Darboux-ova suma za funkciju $s \to f(x(s), y(s), z(s))$ definisana sa:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k)\cdot\sigma_k = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x\left(\overline{s_k}\right), y\left(\overline{s_k}\right), z\left(\overline{s_k}\right)\right)\cdot \Delta s_k$$

Uzmimo da je $\lambda = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \sigma_k = \max\limits_{0 \le k \le n-1} (s_{k+1} + s_k)$

Teorema 1. ***(Redukcija krivolinijskih integrala I vrste na Riemann-ov integral - I formulacija)***
Uzimajući u obzir sve ranije izvedene pretpostavke o krivoj C i funkciju f i uz već uvedene oznake važi sledeća jednakost:

$$I = \int\limits_C f(x,y,z)\cdot ds = (R)\int\limits_0^{S_{kr}} f(x(s), y(s), z(s))\cdot ds$$

gde se integracija vrši po parametru s koji je u stvari dužina luka između tačke S_0 i tekuće tačke $\left(x(s), y(s), z(s)\right)$ krive C.

Teorema 2. ***Redukcija krivolinijskih integrala I vrste na Riemann-ov integral - II formulacija).***

Ako je $C: x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\theta(t), t\in[a,b]$ imamo

$$\int_C f(M)ds=(R)\int_a^b f(\varphi(t),\psi(t),\theta(t))\cdot\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\theta'(t))^2}dt .$$

Parametarska forma integrala

Ako je kriva C data u parametarskoj formi:

$x=x(t), y=y(t), z=z(t), 0\le t\le T$, gde je:

(i) $x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)\in C[0,T]$,

(ii) Funkcija dužine luka krive C raste zajedno sa priraštajem argumenta t u segmentu $t\in[0,T]$ $\left(s\nearrow\Leftrightarrow t\nearrow\right)$.

Tada važi sledeća formula:

$$I=\int_C f(M)\cdot ds=\int_C f(x,y,z)\cdot ds=(R)\int_{t=0}^{t=T} f(x(t),y(t),z(t))\cdot\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2+\left(z_t'\right)^2}\cdot dt$$

Pri tome svaki od navedenih integrala u prethodnim jednakostima postoji kao konačan integral ako i samo ako postoji bar jedan među njima.

NAPOMENA:

Koristeći definiciju krivolinijskog integrala prve vrste direktno se dobija sledeća formula. Ako je C data kriva, tada je dužina odgovarajuće krive C je $d(C)=\int_C ds$ gde je s luk date krive.

Ako je specijalno ova kriva data u parametarskoj formi, pošto je $s_t'=\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2+\left(z_t'\right)^2}$ ili $ds(t)=\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2+\left(z_t'\right)^2}\cdot dt$, onda direktnom zamenom dobijamo $d(C)=(R)\int_0^T\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt$.

PRIMER 1:

Izračunati krivolinijski integral I vrste $I=\int_K x\cdot y\cdot ds$ gde je kriva K opisana na sledeći način $K:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ x,y>0$ u I kvadrantu.

Izvršimo parametrizaciju:

$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$I = (R)\int_0^{\pi/2} a\cos t \cdot b\sin t\sqrt{(a\sin t)^2 + (b\cos t)^2}\,dt =$$

$$= a \cdot b\int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \sin t\sqrt{(a\sin t)^2 + (b\cos t)^2}\,dt$$

smena cos2t=u;

$$I = -\frac{ab}{4}\int_1^{-1}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}u}\,du = ...$$

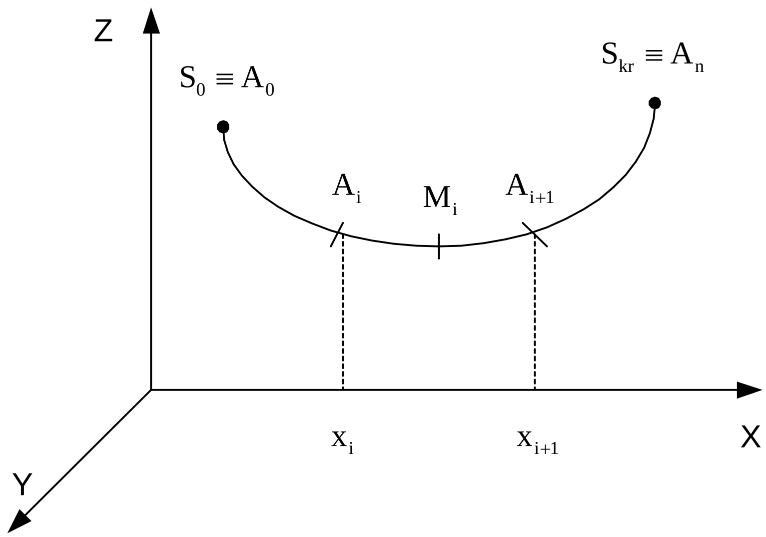
U opštem slučaju kako se kriva K može zadati presekom dve površine . Tada nije uvek efikasno naći parametarski oblik krive K (koji se uvek može naći) jer se mogu dobiti jako komplikovani integrali. Kriva K treba da se pretvori u $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$.

PRIMER 2:
Neka je data kriva $C \in R^2$ u polarnim koordinatama:
$r = r(\theta), \theta_1 \le \theta \le \theta_2$.
Izvesti formulu za izračunavanje $I = \int_C f(x, y) \cdot ds$.

Rezultat: $I = \int_{\theta_2}^{\theta_1} f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}\,d\theta$

Krivolinijski integral druge vrste (po koordinatama)

Neka za krivu C, funkciju $f : C \to R\ (C \subset R^3)$, tačke A_i (i=0,1,...,n) i $M_i \in \overset{\frown}{A_i A_{i+1}}$ (i=0,1,...,n-1) važe iste pretpostavke kao i u slučaju definicije krivolinijskog integrala prve vrste (C je neprekidna, prosta, rektificibilna, otvorena ili zatvorena kriva,
$A_k = A_k(x_k, y_k, z_k), M_k = M_k(\xi_k, \zeta_k, \eta_k), 0 \le k \le n; x_k \le \xi_k \le x_{k+1}$,
$P : A_0, A_1, ..., A_n$).



Sada formirajmo sumu: $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(M_k\right) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_k, \zeta_k, \eta_k\right) \cdot \Delta x_k$, i neka je

$\lambda = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta x_k$.

Definicija 1. ***(Definicija krivolinijskog integrala druge vrste po x-osi)***
Ako postoji konačan realan broj I tako da važi $\lim\limits_{\lambda \to 0+} \sigma = I$, za svaku podelu P i svaki izbor tačaka M_k u P, tada važi:

a) Broj I nazivamo krivolinijski integral II vrste funkcije f duž krive C i to po x-osi.
b) Za funkciju f kažemo da je integrabilna u smislu krivolinijskog integrala po x-osi.
c) Tada ovaj broj I označavamo na sledeći način $I = (II)\int\limits_C f\left(x, y, z\right)dx$ (slično je za dy i dz).
d) Ako je C zatvorena kriva oznaka je: $I = \oint\limits_C f\left(x, y, z\right)dx$.

Krivolinijskog integrala druge vrste po x-osi dobijen je projekcijom krive C na x-osu.

Definicija 2. ***(Definicija Krivolinijski integral II vrste)***
Neka su date 3 funkcije (potpuno nezavisno jedna od druge) $P(x, y, z), Q(x, y, z)$ i $R(x, y, z): R^3 \to R$ i neka su definisane duž krive C u R^3 koja zadovoljava ove ranije 4 pretpostavke (neprekidna, prosta, rektificibilna i otvorena ili zatvorena). Za funkciju P definišimo krivolinijski integral II vrste po x-osi kao u D1, a za Q i R definišemo analogne integrale, ali respektivno po osama y i z. Tada se krivolinijski integral II vrste definiše kao sledeći zbir:

$$I = \int\limits_C P \cdot dx + Q \cdot dy + R \cdot dz = \left(II\right)\int\limits_C P(x, y, z) \cdot dx + \left(II\right)\int\limits_C Q(x, y, z) \cdot dy + \left(II\right)\int\limits_C R(x, y, z) \cdot dz$$

Teorema 1. ***(Izračunavanje krivolinijskog integrala II vrste)***
Neka su date funkcije $P,Q,R:C\to R$ koje su neprekidne po tačkama $x,y,z\in C$, pri čemu je kriva C data u parametarskoj formi $C:x(t),y(t),z(t)$, gde je $-\infty<\alpha\le t\le\beta<+\infty$ i gde još pretpostavljamo da su funkcije $x,y,z,x',y',z'\in C[\alpha,\beta]$.

Tada se integral $I=(II)\int_C Pdx+Qdy+Rdz$ svodi na Rimanov integral.

$$I=(R)\int_\alpha^\beta\Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot x'(t)+Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot y'(t)+R\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot z'(t)\Big)dt$$

DOKAZ:
Pošto se dati integral svodi na zbir tri integrala, mi ćemo dati dokaz za samo jedan sabirak sledeće forme:

$$I=(II)\int_C fdx=(R)\int_\alpha^\beta f\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t)dt$$

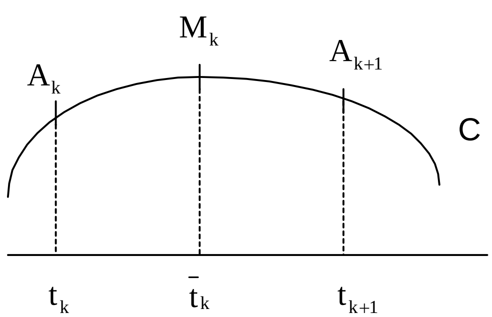
Uzmimo dakle da je kriva C data u parametarskoj formi pri čemu parametar t uzima sve vrednosti iz segmenta $[\alpha,\beta]$.

Broj I sigurno postoji kao konačan realan broj, jer je podintegralna funkcija neprekidna. Posmatrajmo Darboux-ovu sumu σ za krivolinijski integral II vrste pri čemu podeone tačke A_k imaju formu $A_k=(x_k,y_k,z_k)=\big(x(t_k),y(t_k),z(t_k)\big)$:

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}f(M_k)\cdot\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}f\big(x(\bar t_k),y(\bar t_k),z(\bar t_k)\big)\cdot\Delta x_k=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}f\big(x(\bar t_k),y(\bar t_k),z(\bar t_k)\big)\cdot\big(x(t+1)-x(t)\big).$$

Gde su $M_k=x(\bar t_k),y(\bar t_k),z(\bar t_k)\in\overset{\frown}{A_kA_{k+1}},\ \bar t_k\in[t_k,t_{k+1}],\alpha=t_0<t_1<t_2<...<t_n=\beta$



$\Delta x_k=\big(x_{k+1}-x_k\big)=x(t_{k+1})-x(t_k)=\int_{t_k}^{t_{k+1}}x'(t)\cdot dt$ (po Newton-Leibniz-ovom stavu)

Pa je $\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}f\big(x(\bar t_k),y(\bar t_k),z(\bar t_k)\big)\cdot\int_{t_k}^{t_{k+1}}x'(t)dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}f\big(x(\bar t_k),y(\bar t_k),z(\bar t_k)\big)\cdot x'(t)dt$.

Sada prelazimo na analizu broja I:

$$I=\int_{\alpha}^{\beta} f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot x'(t)dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot x'(t)dt$$

gde je $t\in[t_k,t_{k+1}]$.

Sada je $0\le|\sigma-I|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(f\left(x(\overline{t}_k),y(\overline{t}_k),z(\overline{t}_k)\right)-f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\right)\cdot x'(t)dt\right|\le$

$$\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left|\left(f\left(x(\overline{t}_k),y(\overline{t}_k),z(\overline{t}_k)\right)-f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\right)\right|\cdot|x'(t)|dt$$

NAPOMENA:
Po Vajštrasovoj teoremi neprekidna funkcija dostiže svoj sup i inf i ograničena je na svakom zatvorenom intervalu konačne dužine. Koristeći pretpostavke teoreme i Vajštrasovu teoremu sleduje:

$\left(\exists L>0,\left(L=\text{const.}\in R\right)\right)|x'(t)\le L|$ za $\forall t\in[\alpha,\beta]\supset[t_k,t_{k+1}]$

$$0\le|\sigma-I|\le L\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(f\left(x(\overline{t_k}),y(\overline{t_k}),z(\overline{t_k})\right)-f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\right)dt$$

NAPOMENA:
Prema ranije rečenom $t,\overline{t}_k\in[t_k,t_{k+1}]$ stoga ako λ izaberemo da je $\lambda<\delta$ (λ i δ su iz definicije integrala II vrste) tada u svakom slučaju sleduje $|\Delta t_k|\le\lambda<\delta$.

Pošto je funkcija $t\to f\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ neprekidna na segmentu $t\in[\alpha,\beta]$, to za bliske argumente bliske su i slike, što znači da za dato ε'>0 možemo izabrati δ' čak toliko malo da bude ispunjen uslov:

$$\left|f\left(x(\overline{t}_k),y(\overline{t}_k),z(\overline{t}_k)\right)-f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\right|<\varepsilon'$$

$$0\le|\sigma-I|\le L\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\varepsilon'dt$$

Dobijena nejednakost važi samo ako su podeone tačke birane tako da je $\lambda<\delta$.
Izaberimo za $\varepsilon'>0$ broj $\varepsilon=\varepsilon'\cdot L(\alpha-\beta)$.
Sada možemo da zaključimo da važi sledeća implikacija:

$$\forall\varepsilon'>0,\exists\delta=\delta\left(\frac{\varepsilon}{L(\beta-\alpha)}\right)>0,$$

$$\lambda<\delta\Rightarrow|\sigma-I|\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}L\frac{\varepsilon}{L(\beta-\alpha)}dt=$$

$$=\frac{\varepsilon}{(\beta-\alpha)}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}dt=\frac{\varepsilon}{(b-\alpha)}\sum_{k=0}^{n-1}\left(t_{k+1}-t_k\right)=\frac{\varepsilon}{(\beta-\alpha)}(\beta-\alpha)=\varepsilon$$

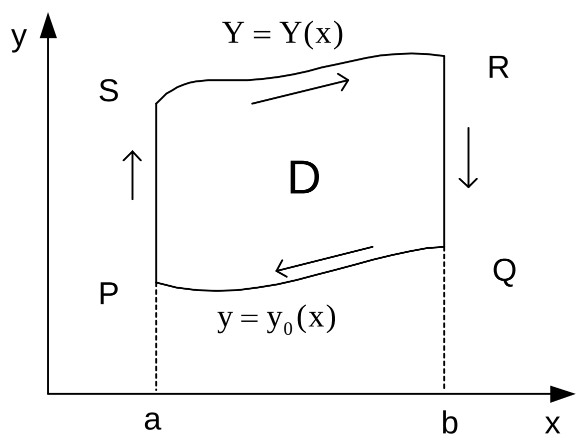
I konačno za Darboux-ovu sumu σ mi moramo zaključiti da važi:
$0 \le |\sigma - I| \le \varepsilon, \varepsilon = \text{const.}$

Sve ovo implicira $\lim\limits_{\lambda \to 0+} \sigma = I = \int\limits_C f(x,y,z)dx = (R)\int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t)) \cdot x'(t) \cdot dt$ tj.

$$\int\limits_C Pdx + Qdy + Rdz = (R)\int\limits_\alpha^\beta \left(P_x' + Q_y' + R_z'\right)dt$$

Primena krivolinijskog integrala druge vrste na izračunavanje površina u Dekartovoj ravni R^2.

SLUČAJ I.
Neka je u Oxy data izvesna površ D ograničena ordinatama x=a, x=b pri čemu je $-\infty < a < b < \infty$ i dvema krivama C_1 i C_2 koje su opisane na sledeći način. Kriva C_1 je zadana funkcijom $y = y_0(x)$, gde je $x \in [a,b]$, a kriva C_2 opisana funkcijom $y = Y(x)$, gde je $x \in [a,b]$ i pri svemu tome za $\forall x \in [a,b]$ važi relacija $y_0(x) \le Y(x)$. Neka su ove funkcije neprekidne na $[a,b]$. Tada imamo konturu $PQRS \overset{\text{ozn}}{=} L$. Uvedimo još oznaku da $m(D)$ jeste površina površi D.



MAT I : $m(D) = \int\limits_a^b Y(x) \cdot dx - \int\limits_a^b y_0(x) \cdot dx$

Teorema 1.

Pri uvedenim oznakama i dogovorima važi sledeća jednakost $m(D) = \left| \frac{1}{2} \oint\limits_{L+} xdy - ydx \right|$,

gde je kriva L zatvorena i prema posmatranom crtežu data sa $L = \overset{\frown}{PSRQ}$. Pri tome L^+ označava smer integracije suprotan od kazaljke na satu.

DOKAZ:
Izračunajmo krivolinijski integral II vrste odgovarajuće funkcije po krivoj L sa ciljem da vrednost ovog integrala dovedemo u vezu sa već delimično izračunatom površinom D. Da bismo olakšali račun krenućemo od već izračunatog dela.

$$m(D)=\int_a^b Y(x)\cdot dx-\int_a^b y_0(x)\cdot dx$$

$$\int_{\overset{\frown}{QP}} ydx=\int_b^a y_0(x)dx=-\int_a^b y_0(x)dx\ (\text{parametar}: x=x,\ y=y_0(x),\ \overleftarrow{a\le x\le b}),$$

$$\int_{\overset{\frown}{SR}} ydx=\int_{\overset{\frown}{SR}} Y(x)dx=\int_a^b Y(x)dx\ (\text{parametar}: x=x,\ y=Y(x),\ \overrightarrow{a\le x\le b}).$$

$$m(D)=\int_{\overset{\frown}{SR}} ydx+\int_{\overset{\frown}{QP}} ydx$$

Na krivoj $\overset{\frown}{RQ}$ imamo: $x=b,\ dx=0,\ y=Y\Rightarrow \int_{\overset{\frown}{RQ}} ydx=0$

Na krivoj $\overset{\frown}{PS}$ imamo: $x=a,\ dx=0,\ y=y\Rightarrow \int_{\overset{\frown}{PS}} ydx=0$

$$m(D)=\int_a^b Y(x)dx-\int_a^b y_0(x)dx=\int_{\overset{\frown}{SR}} ydx+\underbrace{\int_{\overset{\frown}{RQ}} ydx}_{=0}+\int_{\overset{\frown}{QP}} ydx+\underbrace{\int_{\overset{\frown}{PS}} ydx}_{=0}=$$

$$=\int_{\overset{\frown}{SR}} ydx+\int_{\overset{\frown}{QP}} ydx=\int_{L^-} ydx=-\int_{L^+} ydx$$

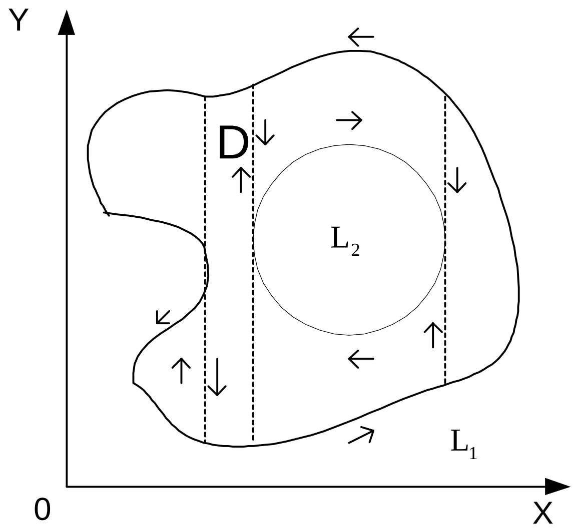
Analogno se dokazuje i za x pa dobijamo:

$$m(D)=\int_{L^+} xdy$$

$$\Rightarrow m(D)+m(D)=\int_{L^+} xdy-\int_{L^+} ydx\Rightarrow m(D)=\frac{1}{2}(II)\int_{L^+} xdy-ydx$$

SLUČAJ II (OPŠTI):

$$m(D)=\frac{1}{2}\int_{(L_1\cup L_2)^+} xdy-ydx\,.$$



NAPOMENA:
Integral I vrste (po luku) ne zavisi od smera integracije, dok integral II vrste zavisi od smera integracije.

PRIMER:
Naći površinu elipse:

$$L : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 " = " (\text{smena} : x = a\cos t; y = b\sin t)$$

$$D = \frac{1}{2} \int\limits_{L^+} xdy - ydx \,.$$

Nezavisnost krivolinijskog integrala druge vrste od puta integracije

Postavka problema. Dato je:

(a) Povezana oblast prostora $D \subset R^2, D \ne 0$.

(b) Tačke $A, B \in D\,(A \ne B)$ i one su fiksirane.

(c) Dve neprekidne funkcije $P = P(x,y), Q = Q(x,y) \in C(D)$.

(d) Kriva $L \subset D$ takva da joj je A početna tačka, a B krajnja tačka. Kriva L je deo po deo glatka.

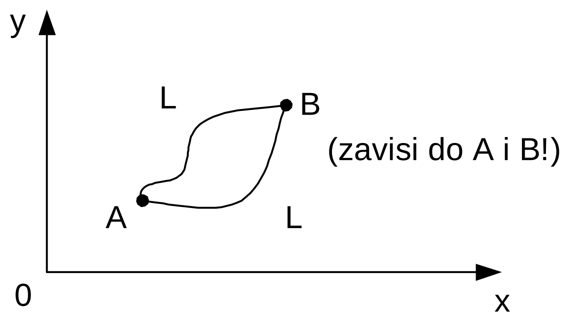
NAPOMENA:
(a) Za oblast $0 \ne D \subset R^2$ kažemo da je povezana oblast ako skup D zadovoljava uslove:

(i) Skup D ima neprazan interior (intD≠0).

(ii) Svake dve tačke skupa D se mogu spojiti izlomljenom linijom takvom da ta linija čitava leži u D.

(b) Za krivu L kažemo da je glatka ako se u svakoj tački te krive može postaviti tangenta na tu krivu i to na jedinstven način.
(c) Za krivu L kažemo da je deo po deo glatka ako se ona sastoji iz najviše konačno mnogo glatkih delova.
Uz sve navedene pretpostavke postavlja se pitanje kakve moraju da budu P i Q da broj

$I = \int_L P \cdot dx + Q \cdot dy$ ne zavisi od oblika i forme krive L (ali ne i smera!), već da zavisi samo tačaka od A i B.



Mogu se odrediti i ti uslovi iskazani u sledećoj teoremi.

Teorema 1. (Potreban i dovoljan uslov)
Potreban i dovoljan uslov da vrednost krivolinijskog integrala II vrste ne zavisi od forme krive L je da postoji funkcija $F = F(x, y) : R^2 \to R$ takva da je $dF = P \cdot dx + Q \cdot dy$.
Drugim rečima, izraz $P \cdot dx + Q \cdot dy$ mora biti totalni diferencijal neke funkcije. U takvim slučajevima mi ćemo reći da je podintegralni izraz u totalnom diferencijalu.
Dokaz ide u suviše široko razmatranje i razbijamo ga na dve teoreme.

Teorema 2.
Ako integral I ne zavisi od puta integracije tada mora postojati $F : D \to R$ takva da je

$dF = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy = P \cdot dx + Q \cdot dy$, tj. mora biti $F_x^{'} = \frac{\partial F}{\partial x} = P$ i $F_y^{'} = \frac{\partial F}{\partial y} = Q$.

DOKAZ:
Date su dve tačke $A = A(x_0, y_0)$ i $B = B(x_1, y_1)$.
Razmotrimo pomoćnu funkciju:

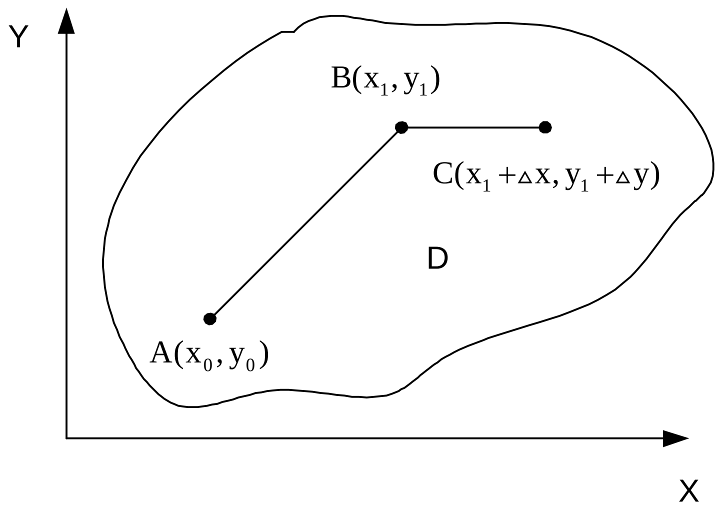
$$F(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P \cdot dx + Q \cdot dy .$$

Pretpostavimo da ovaj integral ne zavisi od puta integracije.
Formirajmo razliku:

$$\vartriangle = F(x_1 + \vartriangle x, y_1) - F(x_1, y_1) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1+\vartriangle x,y_1)} P \cdot dx + Q \cdot dy - \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P \cdot dx + Q \cdot dy =$$

$$= \int_{\overset{\frown}{AC}} P \cdot dx + Q \cdot dy - \int_{\overset{\frown}{AB}} P \cdot dx + Q \cdot dy = \int_{\overset{\frown}{BC}} P \cdot dx + Q \cdot dy$$

Putanji krive L pridružujemo krivu $\overset{\frown}{BC}$ s tim da je
$\overset{\frown}{BC} \parallel x \left(C = C\left(x_1 + \vartriangle x, y_1\right), \vartriangle x = x - x_1\right)$. Na BC imamo $y = y_1 = \text{const.}$ i $x \in \left[x, x_1 + \vartriangle x\right]$..



Formirajmo razliku:

$$F\left(x_1 + \Delta x, y_1\right) - F\left(x_1, y_1\right) = (R) \int\limits_{x_1, y_1}^{x_1+\Delta x, y_1} P \cdot dx + Q \cdot dy \; .$$

Pošto nema promene po y $\Rightarrow dy = 0$:

$$F\left(x_1 + \Delta x, y_1\right) - F\left(x_1, y_1\right) = (R) \int\limits_{x_1, y_1}^{x_1+\Delta x, y_1} P \cdot dx \, .$$

Po teoremi o srednjoj vrednosti $\left(\int\limits_a^b f(x)dx=(b-a)f(\theta), \theta \in (a,b) \right)$ važi:

$$F\left(x_1 + \Delta x, y_1\right) - F\left(x_1, y_1\right) = \left(x_1 + \Delta x - x_1\right) \cdot P\left(x_1 + \theta \cdot \Delta x, y_1\right) |: \Delta x \;\; (\text{ovde je } \theta \in (0,1))$$

$$\frac{F\left(x_1 + \Delta x, y_1\right) - F\left(x_1, y_1\right)}{\Delta x} = P\left(x_1 + \theta \Delta x, y_1\right) | \lim_{\Delta x \to 0}$$

$$\left.\frac{\partial F\left(x, y\right)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}} = P\left(x_1, y_1\right) \in R$$

Sa x_1 smo izabrali neku slobodnu tačku tj. važi: $\frac{\partial F\left(x, y\right)}{\partial x} = P\left(x, y\right)$.

Sada ovo možemo da uradimo tako da je ovaj odsečak paralelan y-osi, pa se dobija:

$$\frac{\partial F\left(x, y\right)}{\partial y} = Q\left(x, y\right).$$

Pretpostavke su takve da sigurno postoji $dF = P \cdot dx + Q \cdot dy = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy$.

Ako krivolinijski integral ne zavisi od puta integracije ili ekvivalentno tome ako je podintegralna funkcija u totalnom diferencijalu, tada se postavlja logično pitanje kako tada izračunati krivolinijski integral. Pogodnost izračunavanja se sastoji u sledećoj teoremi.

Teorema 3.
Ako je u posmatranom krivolinijskom integralu podintegralna funkcija u totalnom diferencijalu, tada krivolinijski integral ne zavisi od puta integracije već zavisi samo od početne i krajnje tačke.
DOKAZ:

Dokaz se vrši izračunavanjem posmatranog krivolinijskog integrala $I = \int\limits_L P \cdot dx + Q \cdot dy$.

Neka je data kriva L i neka je opisana sledećim jednačinama: $x = x(t)$, $y = y(t)$ gde je $t \in [\alpha, \beta] \subset R$. Uočimo početnu tačku $A = A(x(\alpha), y(\alpha))$ i krajnju tačku $B = B(x(\beta), y(\beta))$. Razmotrimo integral $I = \int\limits_L P \cdot dx + Q \cdot dy$. Tada se postupak integracije ovog integrala može svesti na izvesno diferenciranje i upravo onu pomoćnu funkciju $F(x, y)\left(\frac{\partial F}{\partial x} = P, \frac{\partial F}{\partial y} = Q\right)$ pominjanu u dokazu prethodne teoreme.

$$I = \int\limits_L P \cdot dx + Q \cdot dy = (R)\int\limits_\alpha^\beta \left(P_x' + Q_y'\right)dt = (R)\int\limits_\alpha^\beta \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}\right)dt = (R)\int\limits_\alpha^\beta \frac{d}{dt} F\left(x(t), y(t)\right)dt$$

$$I = F\left(x(\beta), y(\beta)\right) - F\left(x(\alpha) - y(\alpha)\right) = F(B) - F(A).$$

ZAKLJUČAK:
Da bismo izračunali vrednost ovakvog integrala potrebno je izvršiti sledeće korake:

1) potrebno je odrediti funkciju $F(x, y)$ takvu da je $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ i $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$. Pri tome su P i Q date (podintegralne) funkcije, a prethodne jednakosti su u stvari diferencijalne jednačine od F.
2) Ako se nekako dokopamo funkcije F tada vrednost integrala glasi:
   $I = F\left(x(\beta), y(\beta)\right) - F\left(x(\alpha), y(\alpha)\right)$.

Teorema 4.
Izraz $P \cdot dx + Q \cdot dy$ jeste u totalnom diferencijalu ako i samo ako je ispunjen sledeći uslov $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

NAPOMENE:

a) Potreban i dovoljan uslov da za funkcije P, Q i F važi relacija $Pdx + Qdy = dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$ jeste da važi $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

b) Krivolinijski integral $I=\int_L P\cdot dx+Q\cdot dy$ ne zavisi od puta integracije ako i samo ako je podintegralni izraz $P\cdot dx+Q\cdot dy$ u totalnom diferencijalu.

c) Formalno se svi prethodni rezultati prenose na R^3.
Potreban i dovoljan uslov da za funkcije P, Q, R, F važi relacija:
$P\cdot dx+Q\cdot dy+R\cdot dz=dF=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot dy+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot dz$ je da važi sledeći sistem uslova $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\wedge\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}\wedge\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$.

d) $I=\int_C P\cdot dx+Q\cdot dy+R\cdot dz$ ne zavisi od forme puta L
$\Leftrightarrow \exists F \therefore dF=P\cdot dx+Q\cdot dy+R\cdot dz$.

e) Pri tome je:
$$I=\int_C P\cdot dx+Q\cdot dy+R\cdot dz=\int_A^B P\cdot dx+Q\cdot dy+R\cdot dz=F(B)-F(A).$$

NEKOLIKO VAŽNIH POSLEDICA PRETHODNIH TEOREMA

Teorema 5.
Ako važe sve unapred navedene pretpostavke i ako je kriva L još i zatvorena, tada bez obzira koju formu uzima kriva L, važi sledeća relacija $I=\oint_L P\cdot dx+Q\cdot dy+R\cdot dz=0$.

DOKAZ:
Pošto učinjene pretpostavke omogućuju da integral ne zavisi od puta već samo od krajnjih tačaka A i B (A=B) imamo:
$I=\oint_L P\cdot dx+Q\cdot dy+R\cdot dz=F(B)-F(A)$, gde je $F:R^3\to R$ odabrano tako da je
$dF=P\cdot dx+Q\cdot dy+R\cdot dz$.
Pošto je $A\equiv B\Rightarrow I=F(A)-F(A)=0$.

NAPOMENA:
Funkcija F se izračunava pomoću sledećeg sistema diferencijalnih jednačina:
$$\frac{\partial F}{\partial x}=P \ \ |\int dx\Rightarrow\int_{x_0}^{x}\frac{\partial F}{\partial x}dx=\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)dx+\varphi(y,z)\Rightarrow$$
$$F(x,y,z)-F(x_0,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)dx+\varphi(y,z)\,|\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=Q,\ \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial F(x_0,y,z)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)dx+\frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y}\Rightarrow$$

$$Q(x,y,z)-\frac{\partial F(x_0)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)dx\right)+\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$, na kraju će se te realne funkcije F razlikovati za realnu konstantu.

PRIMERI:

1. Izračunati: $I=\int_L (x^2+y^2)(xdx+ydy)$.

   Odgovor: I=0, dF!!!

2. Izračunati: $J=\int_{(0,0)}^{(0,1)} f(x+y)(dx+dy)$.

P=f, Q=F, $\frac{\partial P}{\partial u}=\frac{\partial Q}{\partial x}=f'(x+y)$

$\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,y), u=\int_0^x f(x+y)dx+\psi(x)$

Dvojni integral (integral po ravni)

Od sada pa nadalje pretpostavimo da važi:

1. Data je funkcija $f:R^2\to R$ (R^2 - Euklidski prostor).
2. Data oblast $0\neq D\subset R^2$ i neka je D:
   (a) otvoren ili zatvoren.
   (b) povezan i neprazan (skup sa (a) i (b) zvaćemo zatvorena ili zatvorena oblast).
3. Postoji konstanta M>0 takva da je za $\forall(x,y)\in D$ ispunjen uslov: $|f(x,y)|\leq M$.

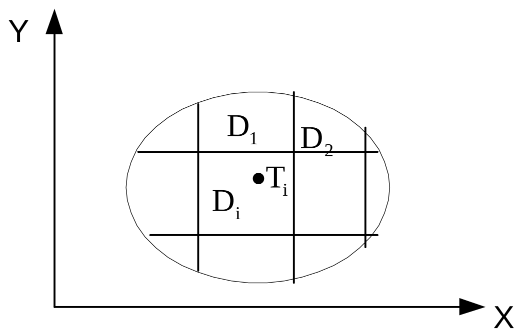
1. Neka je $\operatorname{domf}=D$, pa podelimo oblast podelom P takvom da je $P:D_1,D_2,...,D_n$ niz skupova sa osobinama:
   (i) $(\forall k\in N)\, D_i\subset D\wedge D_i\neq 0$,
   (ii) $\bigcup_{i=1}^{n} D_i=D$,
   (iii) $(\operatorname{int} D_i)\cap(\operatorname{int} D_j)=0;\ \forall i,\ j=1,2,....,n;\ i\neq j$.

   Ovakva podela se naziva razbijanje oblasti D na podoblasti D_i.

   NAPOMENA: Skupovi niza D_i (i=1,...,n) nemaju zajedničkih tačaka ukoliko čine podelu, osim što mogu imati zajedničke rubne tačke.
2. U svakoj oblasti D_i biramo tačku $T_i(\xi_i,\eta_i)\in D_i$ $(1\leq i\leq n)$.

   NAPOMENA: Izbor podeonih delova $D_i\subset D$ i izbor tačaka $T_i\in D_i$ je potpuno proizvoljan osim što podleže navedenim uslovima.

3. Sa λ označimo maksimum od dijametara oblasti D_i: $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \lambda_i$ gde je $\lambda_i = d(D_i) = \underbrace{\sup}_{A,B\in D_i} \left(d(A,B)\right)$.
4. Sa $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(T_i\right) mes\left(D_i\right)$ označimo Darboux-vu sumu funkcije f nad oblašću D za podelu P i izbor tačaka T_i ($mes\left(D_i\right)$ je površina oblasti D_i).



Definicija 1. ***(Definicija dvojnog integrala)***
Ako postoji apsolutna konstanta $I \in R$ takav da za svaku podelu $P: D_1, ..., D_n$ i za svaki izbor tačaka T_i u podeli P i za $\forall \varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta\left(\varepsilon\right) > 0$, ali takvo da važi implikacija: $\lambda < \delta \Rightarrow \left|\sigma - I\right| < \varepsilon$, tada važi:

a) Funkcija f se naziva integrabilnom funkcijom u smislu dvojnog integrala nad oblašću D.
b) Tada se broj I naziva dvojnim integralom funkcije f nad D u oznaci $I = \iint\limits_D f\left(x, y\right) dD$.

Izračunavanje dvojnog integrala

Izračunavanje dvojnog integrala se razbija u dva koraka i to na izračunavanje dvojnog integrala po pravougaonoj, a potom po krivolinijskoj oblasti. Proizvoljna krivolinijska oblast se razbija na najviše konačno mnogo pravougaonih oblasti.
U svim narednim teoremama vezanim za ovu oblast pretpostavlja se da je funkcija f integrabilna na odgovarajućem domenu odnosno da postoje svi navedeni integrali.

Teorema 1. ***(Izračunavanje dvojnog integrala po pravougaonoj oblasti)***
Neka su data četiri broja $-\infty < a < b < \infty$, $-\infty < c < d < \infty$ i razmotrimo dva segmenta $\left[a, b\right], \left[c, d\right] \in R$, gde je $\left[a, b\right]$ na x-osi, a $\left[c, d\right]$ na y-osi. Data je funkcija f koja je

definisana u pravougaona oblast $D=[a,b]\times[c,d]$. Neka takođe važe sledeće pretpostavke:

1° Postoji $I_0 \in R$ takvo da je $I_0 = \iint\limits_D f(x,y)\,dD$.

2° Za $\forall x \in [a,b]$ postoji $I(x) \in R$ takav da je $I(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ (u smislu običnog Rimanovog integrala funkcije jedne promenljive).

Tada važi :

a) Postoje uzastopni (dvostruki) integrali: $\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$,

b) Pri tome važi sledeća formula $\iint\limits_D f(x,y)\,dD = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$.

NAPOMENA:

Dvostruki integral iz prethodne teoreme se najčešće označava sa $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$.

Integral $\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ se naziva unutrašnji, a $\int\limits_a^b dx$ se naziva spoljni.

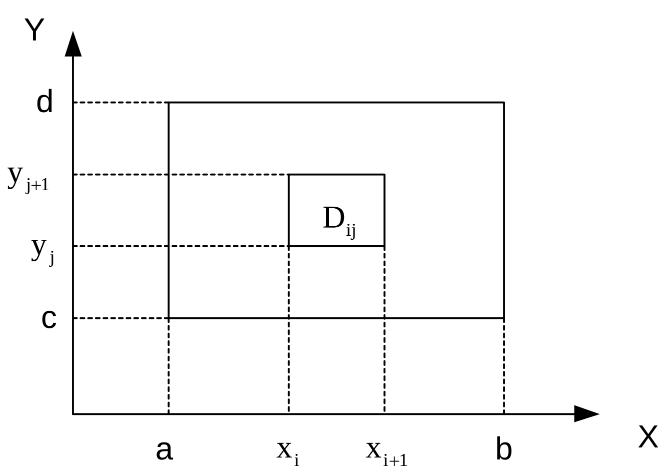
DOKAZ:

Segmente $[a,b]$ i $[c,d]$ nezavisno jedan od drugog razbijamo tačkama $x_k \in [a,b]$ i $y_k \in [c,d]$ na sledeći način: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b;\ c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = d$

(m i n su proizvoljno birani i međusobno nezavisni prirodni brojevi, ali od sada pa nadalje fiksirani).

Tada je oblasti $D=[a,b]\times[c,d]$ razbijena na sledeće podoblasti:

$D_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}],\ 0 \le i \le n-1,\ 0 \le j \le m-1$.



Ove oblasti D_{ij} čine jednu od mogućih podela oblasti D i to u smislu uslova u definiciji dvojnih integrala. Formirajmo sada brojeve m_{ij}, M_{ij} za sve moguće i, j na sledeći način:

$m_{ij} = \inf_{(x,y)\in D_{ij}} f(x,y),\ M_{ij} = \sup_{(x,y)\in D_{ij}} f(x,y)$.

Oni brojevi postoje i to kao konačni realni brojevi pošto je funkcija integrabilna, a samim tim i ograničena nad oblašću integrabilnosti. Obzirom na definiciju brojeva m_{ij}, M_{ij} važe sledeće jednakosti $m_{ij} \le f(x,y) \le M_{ij}\ \left(\forall (x,y) \in D_{ij}\right)$. Na proizvoljan način izaberimo $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ za $\forall i$. U prethodnu nejednakost uvedimo sledeću smenu $x = \xi_i$ i integralimo je po y od y_i do y_{i+1}: $m_{ij} \cdot \underbrace{\left(y_{j+1} - y_j\right)}_{\Delta y_j} \le \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y) \cdot dy \le M_{ij} \cdot \underbrace{\left(y_{j+1} - y_j\right)}_{\Delta y_j}$.

Dobijene nejednakosti sumiramo za $\forall j$:

$$\sum_{j=0}^{m-1} m_{ij} \cdot \Delta y_j \le \sum_{j=0}^{m-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y) \cdot dy = \int_c^d f(\xi_i, y) \cdot dy = I(\xi_i) \le \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij} \cdot \Delta y_j .$$

Pomnožimo sa Δx_i i sumirajmo za $\forall i = 0, \ldots, n-1$.

(1) $\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \cdot \sum_{j=0}^{m-1} m_{ij} \cdot \Delta y_j \le \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \cdot \Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \cdot \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij} \cdot \Delta y_j \Rightarrow s_0 \le \sigma \le S_0$

s_0 - donja Darboux-ova suma za I_0; σ - Darboux-ova suma; S_0 - gornja Darboux-ova suma.

Dobijamo da se Darboux-ova suma integrala, $\sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, nalazi u granicama Darboux-ovih suma: $s_0 \le \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \cdot \Delta x_i \le S_0$.

$d(D_{ij}) = \lambda_{ij} \Rightarrow \lambda' = \max_{\forall i} |\Delta x_i|$ (λ_{ij} pretstavlja dijametar oblasti D_{ij}). Moramo da pustimo da $\lambda' \to 0_+$, samim tim i $\Delta x_i \to 0_+$ i na kraju sledi $\max_{i\in(0,\ldots,n-1)} |\Delta x_i| \to 0_+$.

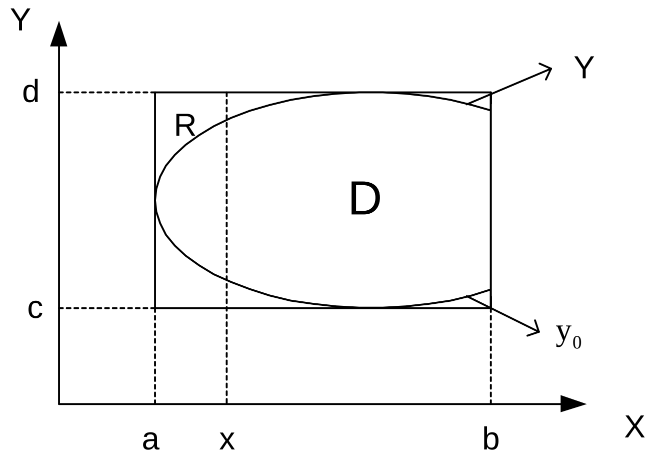
Tada dobijamo iz (1) $\lim_{\max|\Delta x_k| \to 0_+} \sigma = \lim_{\lambda \to 0_+} s = \lim_{\lambda \to 0_+} S = I_0$ (po teoremi o dva žandara), odnosno $\lim_{\lambda' \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \cdot \Delta x_i = I_0$.

Na kraju dobijamo $\lim_{\lambda' \to 0} \sigma = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \iint_D f(x,y) dD$, čime je dokaz završen.

NAPOMENA:
Umesto pretpostavke 2° T1. možemo pretpostaviti sledeći simetričan izraz:

2° Za svako $y \in [c,d]$ postoji $J(y) = \int_a^b f(x,y) dx \in R$. Tada teorema ostaje na snazi i glasi isto kako je gore formulisana (samo što se prvo integrali po x, pa onda po y).

Teorema 2. ***(Izračunavanje dvojnog integrala po krivolinijskoj oblasti)***
Pretpostavimo da je data oblast $0 \neq D \subset R^2$ i neka je ta oblast D ograničena sledećim krivama $y = y_0(x), y = Y(x), x \in [a,b]; y_0(x) \leq Y(x), \forall x \in [a,b]$ i ordinatama $x = a, x = b$.
Pretpostavimo da je data funkcija $f : R^2 \to R$ i koja je definisana na oblasti $D \subset R^2$.



Ako još važi:
1° $\exists I_0 = \iint\limits_D f(x,y)dD$ u smislu definicije dvojnog integrala,

2° $\forall x \in [a,b],\ \exists I(x) = \int\limits_{c=y_0(x)}^{d=Y(x)} f(x,y)dy$.

Tada važi:

a) $\exists$ integral $\int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy \right) dx$,

b) i pri tome važi jednakost : $I_0 = \iint\limits_D f(x,y)dD = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} (f(x,y)dy) \right) dx$.

NAPOMENA:
Možemo simetrično pretpostaviti da umesto pretpostavke 2° važi:
$\forall y \in [c,d]\ \exists J(y) = \int\limits_{x_0(y)}^{X(y)} f(x,y)dx$ gde su $x_0(y)$ i $X(y)$ izvesne krive u 0xy ravni.

DOKAZ:
Dokaz ove teoreme se direktno svodi na T1. na taj način što se umesto posmatrane oblasti D uvodi pomoćna pravougaona oblast R, a umesto date funkcije f uvodi pomoćna funkcija f*.
Neka je $c = \inf\limits_{a \leq x \leq b} y_0(x); d = \sup\limits_{c \leq x \leq d} Y(x) \left(c \leq y_0(x) \leq Y(x) \leq d\right)$. Razmotrimo oblast R datu sa $R = [a,b] \times [c,d] \supset D$, i funkciju $f^* : D \to R^2$:

$$f^*(x,y) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$$

Očigledno je:

$$(*) \iint_R f^*(x,y)\,dD = \iint_D f(x,y)\,dD$$

Sa druge strane je za $x \in [a,b]$:

$$(**) \underbrace{\iint_D f^*(x,y)\,dD}_{I_1} = \underbrace{\int_a^b \left(\int_c^d f^*(x,y)\,dy \right) dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \iint_D f^*(x,y)\,dD + \iint_{R \setminus D} \underbrace{f^*(x,y)\,dD}_{\equiv 0} = \iint_D f(x,y)\,dD + 0 = \iint_D f(x,y)\,dD$$

$$I_2 = \int_a^b \left(\underbrace{\int_c^{y_0(x)} f^*(x,y)\,dy}_{\equiv 0} + \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f^*(x,y)\,dy + \underbrace{\int_{Y(x)}^{d} f^*(x,y)\,dy}_{\equiv 0} \right) dx = \int_a^b \left(0 + \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f^*(x,y)\,dy + 0 \right) dx =$$

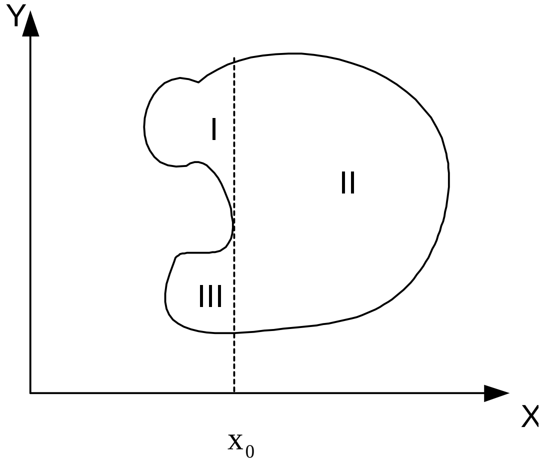
$$= \int_a^b \left(\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f^*(x,y)\,dy \right) dx$$

Iz (*) i (**) i prethodne teoreme imamo:

$$\iint_D f(x,y)\,dD = \iint_R f^*(x,y)\,dD \overset{\text{Th}}{=} \int_a^b \left(\underbrace{\int_c^d f^*(x,y)\,dy}_{\text{ovo smeni}} \right) dx = \int_a^b \left(\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f^*(x,y)\,dy \right) dx$$

Time je dokazan ovaj stav.

NAPOMENA:
U slučaju “ne-konveksne” oblasti podela je:



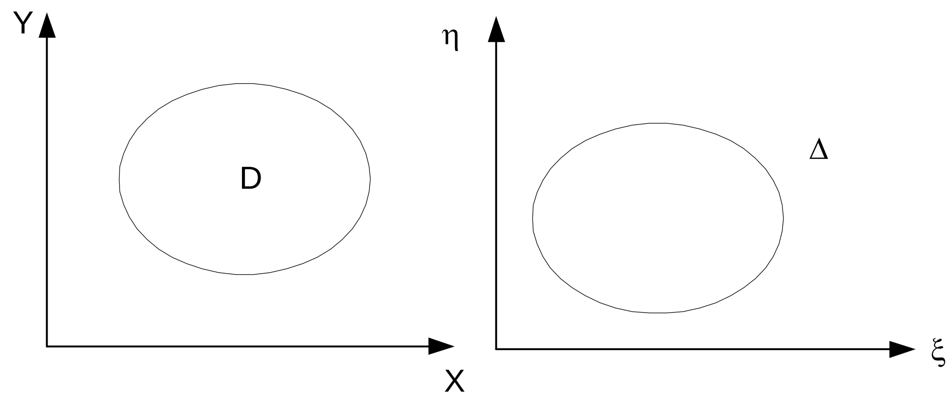
Objasniti slučaj svođenja na konveksne oblasti.

NAPOMENA:
Iz prethodnih razloga integral pišemo kao:

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy = \ldots$$

Zamena promenljivih u dvojnom integralu

Posmatrajmo integral $I = \iint_D f(x,y)dxdy$ gde je:



Iz razloga računanja integrala isto moramo uvoditi smene:
$x = x(\xi,\eta)$

$y = y(\xi,\eta)$

gde je $(x,y) \in D \subset R^2$ i gde se nove promenljive nalaze u nekom domenu $(\xi,\eta) \in \Delta \subset R^2$.

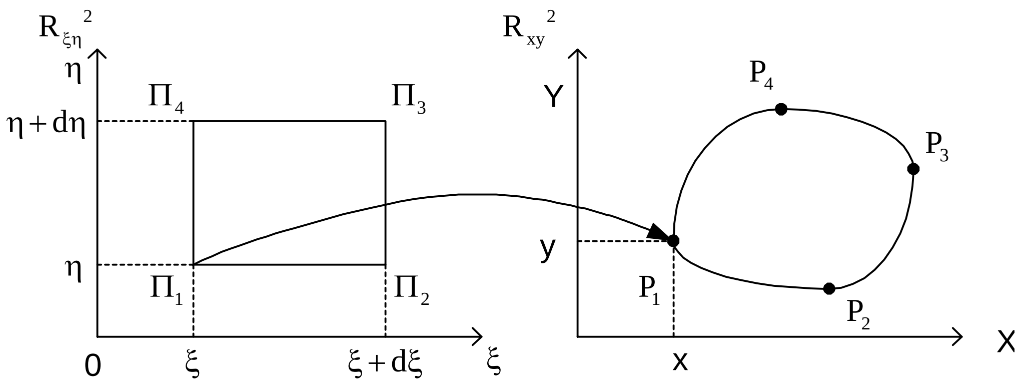
Dakle mi hoćemo da u integralu sa promenljivih x, y pređemo na promenljive ξ,η i time omogućimo lakšu integraciju.
Dato je dakle preslikavanje oblasti Δ u oblast D jednoznačnim i glatkim funkcijama:
$x = x(\xi,\eta), y = y(\xi,\eta)$.
Koordinate:
$\Pi_1(\xi,\eta), \Pi_2(\xi + d\xi,\eta), \Pi_3(\xi + d\xi,\eta + d\eta), \Pi_4(\xi,\eta + d\eta)$,

$P_1(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$,

$P_2(x(\xi + d\xi,\eta), y(\xi + d\xi,\eta))$,

$P_3(x(\xi + d\xi,\eta + d\eta), y(\xi + d\xi,\eta + d\eta))$,

$P_4(x(\xi,\eta + d\eta), y(\xi,\eta + d\eta))$.



Vršimo aproksimaciju Taylor-ovom formulom:

$$x(\xi + d\xi, \eta) \approx x(\xi, \eta) + \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi = x + \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi$$

$$y(\xi + d\xi, \eta) \approx y(\xi, \eta) + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi = y + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi$$

Sada imamo:

$P_1(x, y)$

$$P_2(x + \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi, y + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi)$$

$$P_3(x + \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, y + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta)$$

$$P_4(x + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, y + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta)$$

Podsetnik iz analitičke geometrije:

Ako su date:

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_2 \end{vmatrix}$$

a naša površ: $P_D = 2 \times \triangle ABC$.

Znači površina krivolinijskog paralelograma prema navedenoj formuli iznosi:

$$P(P_1P_2P_3P_4) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \cdot d\xi \cdot d\eta$$

($d\xi \cdot d\eta$ je površina u $\xi\eta$-sistemu)

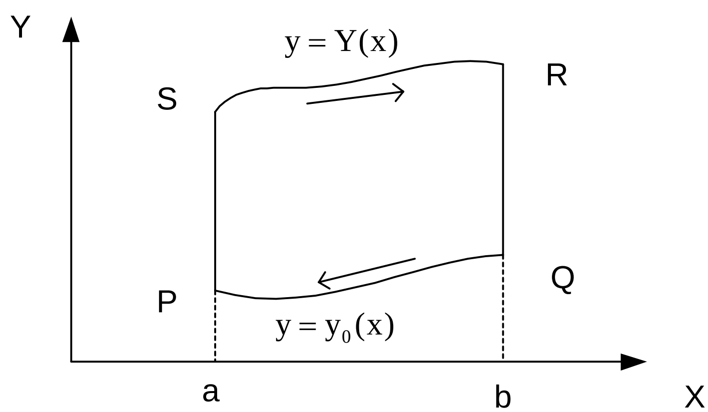
$$\Rightarrow dx\cdot dy=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta}\\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{vmatrix}\cdot d\xi\cdot d\eta=|J|\cdot d\xi\cdot d\eta$$

$$\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}=J$$

Ova determinanta je Jacob-ijeva determinanta i još se zove Jakobijan.
Tako dobijamo:
$I=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_\Delta (f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))|J|d\xi d\eta$ i to je formula za smenu promenljivih.

Green-Riemann-ova teorema

Ova teorema predstavlja veza između dvojnog integrala i krivolinijskog integrala II vrste.



Pretpostavimo da je data izvesna oblast $D\subset R^2$ i pretpostavimo da je ova oblast D ograničena izvesnom zatvorenom konturom L koja je definisana na sledeći način: $y_0=y_0(x),\ y=Y(x),\ a\le x\le b$, pri čemu je $\forall x\in[a,b],\ y_0(x)\le Y(x)$ i ordinatama $x=a,\ x=b$. Pretpostavimo takođe da su date dve funkcije $P,Q:R^2\to R$, $P=P(x,y),\ Q=Q(x,y)$ i koje su neprekidne zajedno sa svim svojim parcijalnim izvodima I reda $\left(\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y}\right)$ u oblasti $D\subset R^2$. Tada važi sledeća jednakost:

$$\boxed{\oint_L P(x,y)\cdot dx+Q(x,y)\cdot dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot dxdy}\ \text{(G-R)}$$

DOKAZ:
Uvedimo oznake $I=\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$ i $L=\overset{\frown}{PQRS}$. Integral I se svodi na:

$$I = \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b P\big(x, Y(x)\big) \cdot dx - \int_a^b P\big(x, y_0(x)\big) \cdot dx \overset{(*)}{=}$$

$$= \int_{\overset{\frown}{SR}} P(x,y) \cdot dx + \int_{\overset{\frown}{QP}} P(x,y) \cdot dx = \oint_{L^-} P(x,y) \cdot dx = -\oint_{L^+} P(x,y) \cdot dx$$

(*) zbog $\int_{\overset{\frown}{RQ}} P(x,y) \cdot dx = \int_{\overset{\frown}{PS}} P(x,y) \cdot dx = 0$, jer je $dx = 0$.

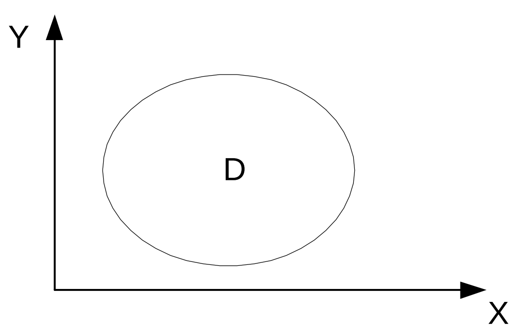
Pošto se analogno može izvesti da je $J = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_{L^+} Q(x,y) \cdot dy$ sabiranjem integrala I u J dobija se zadato tvrđenje čime je dokaz završen.

NAPOMENA:
Kontura L koja se spominje u krivoliniskom integralu je obzirom na prirodu same formule i sprovedenog računa ***obavezno zatvorena!***
Stoga se Grin-Rimanova teorema može primeniti isključivo u slučaju zatvorene konture.
Ako se u nekom slučaju kontura po kojoj treba vršiti integraciju otvorena, mi ćemo je nekim pogodnim načinom zatvoriti, potom primeniti G-R formulu i od rezultata oduzeti pridodati krivolinijski integral.

Primene dvojnog integrala

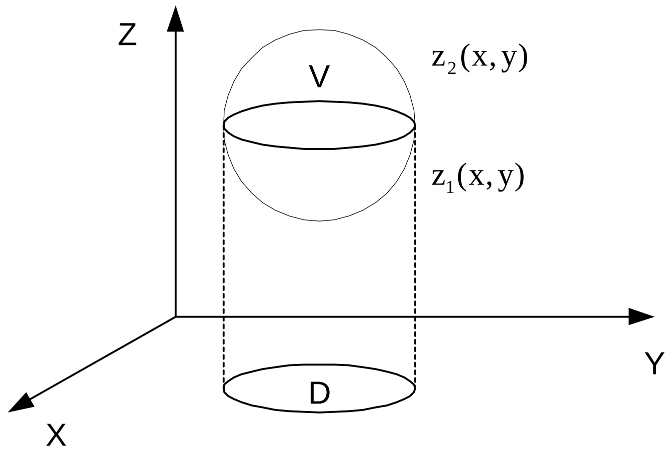
Dvojni integral se može primeniti za:

1) Izračunavanje veličine površine površi u ravni (oblasti).
   Pretpostavimo da je data neka oblast $D(\neq 0) \in R$. Tada se površina ove oblasti računa po formuli $\boxed{P(D) = \iint_D dxdy}$, iz definicije dvojnog integrala.

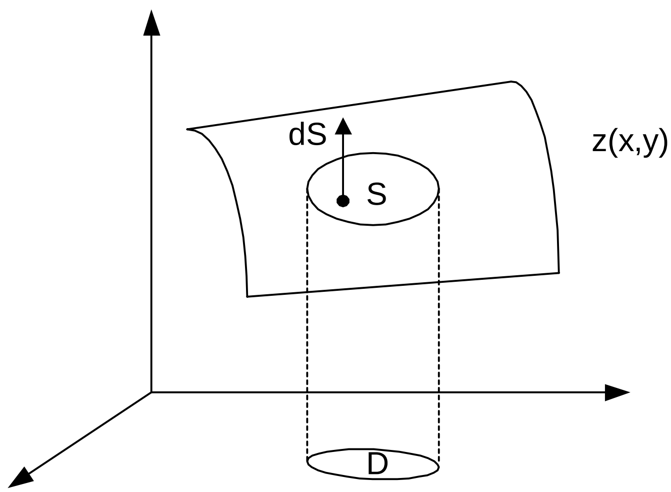


2) Izračunavanje zapremine tela u prostoru.
   Neka je data izvesna oblast $0 \neq D \in R^2$ i neka su date dve funkcije $z_1 = f(x,y),\ z_2 = f(x,y),\ \forall (x,y) \in D$ i neka je još ispunjeno da je $z_1 = f(x,y) \leq\ z_2 = f(x,y)$.

$$\boxed{V = \iint_D (z_2(x,y) - z_1(x,y))dxdy}$$



3) Izračunavanje površine površi u prostoru.



Translatorno pomeramo površ S na dole, ka ravni xOy, tako da bar jednom svojom tačkom dodirne xOy.

$$\vec{n} \perp S : \left|\frac{dxdy}{dS}\right| = |\cos\gamma| \Rightarrow S = \iint_D dS = \iint_D \frac{dx \cdot dy}{|\cos\gamma|}$$

Ako je $\vec{n}$ normala na S:

$$\vec{n}=\frac{\operatorname{grad}u}{|\operatorname{grad}u|}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},\ \vec{n}=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}$$

$$\cos\gamma=\frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}$$

Imamo sledeće varijante:

(a) $S: z=z(x,y)$ (eksplicitno)

Tačka na površini ima koordinate $(x,y,z(x,y))\,(u=z-z(x,y))$

$$\operatorname{grad}u=\left(-\frac{\partial z}{\partial x}i\right)+\left(-\frac{\partial z}{\partial y}j\right)+k$$

$$|\operatorname{grad}u|=\sqrt{\left(z_x^{'}\right)^2+\left(z_y^{'}\right)^2+1}$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+\left(z_x^{'}\right)^2+\left(z_y^{'}\right)^2}}$$

$$\boxed{S=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\cdot dxdy=\iint_D\sqrt{1+\left(z_x^{'}\right)^2+\left(z_y^{'}\right)^2}\cdot dxdy}$$

(b) Neka je S dato sa z=f(x,y), x=x(u,v), y=(u,v), z=z(u,v) gde se S opisuje trojkom (x,y,z) ako i samo ako je $(u,v)\in\triangle\subset R^2$. Polazeći od:

$$S=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\cdot dxdy$$ i formula:

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv,$$

$$dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv,$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Eliminacijom veličina $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},dx,dy$ iz ovog sistema (eliminišemo i dz!) dolazimo do:

1. $S=\iint\limits_{\triangle}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$,

   gde se iz $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$,

   čita $A=\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, B=\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, C=\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$.

   Ili u formi:

2. $S=\iint\limits_{\triangle}\sqrt{E\cdot G-F^2}\,dudv$ gde je:

   $E=\left(x_u^{'}\right)^2+\left(y_u^{'}\right)^2+\left(z_u^{'}\right)^2$,

   $G=\left(x_v^{'}\right)^2+\left(y_v^{'}\right)^2+\left(z_v^{'}\right)^2$,

   $F=x_u^{'}\cdot x_v^{'}+y_u^{'}\cdot y_v^{'}+z_u^{'}\cdot z_v^{'}$.

NAPOMENA:
Ako je površ (S) data u parametarskoj formi x=x(u,v), y=(u,v), z=z(u,v), $(u,v)\in\triangle\subset R^2$ može i dokazati da je “jednoznačni vektor normale (gradijent)” na datu površ u funkciju $(u,v)\in\triangle\subset R^2$ dat sa:

$$\text{grad}=\left(\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$$

gde su A,B,C definisani sa $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ i odgovarajući algoritam.

Trojni integral

Od sada pa nadalje stalno će važiti sledeće pretpostavke i oznake:

1. Data je oblast $0\neq V\subset R^3_{xyz}$.
2. Oblast V je povezan skup, dakle sa nepraznim interiorom i pretpostavlja se da je V ograničen skup.
3. Data je funkcija $f:V\to R$ i pretpostavlja se da je data pozitivna konstanta K takva da je: $\left(\forall f(x,y,z)\right)\left|f(x,y,z)\right|\leq K$.

Biramo oblasti $V_1,V_2,...,V_n$ koje čine podelu (p) oblasti V ako su ispunjeni uslovi:

(i) $\bigcup\limits_{k=1}^{n}V_k=V$,

(ii) $\forall i,j=1,2,...,n$ i $i\neq j$ sledi $\text{int}\,V_i\cap\text{int}\,V_j=0$.

Ovaj postupak nazivamo razbijanje oblasti V.

4. Oblast V razbijamo na podoblasti $\operatorname{int} V_k \in V, \forall k = 1,...,n$. U svakoj podoblasti se bira na proizvoljan način tačka $M_k \in V_k$ sa koordinatama $M_k = (\xi_k, \eta_k, \theta_k)$.

Označimo $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n} d(V_k)$ ($d(V_k)$ je dijametar oblasti V_k koji znači:

$d(V_k) = \sup d(A_k, B_k)$)

Darboux-ova suma: $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(M_k\right)\left(\operatorname{mes} V_k\right)$.

Definicija 1. (Definicija trojnog integrala)

Pretpostavimo da postoji apsolutna konstanta $I \in R$ takva da važi:

$\forall(p), \forall M_k \in V_k, \forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \to \lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon$. Tada:

1. Broj I nazivamo trojni integral funkcije f nad oblašću V.
2. Funkciju f nazivamo integrabilnom u smislu trojnog integrala nad oblašću V.
3. Trojni integral označavamo sa $I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dV$.

Teorema 1. (Svojstva Darboux-ovih suma)

Darboux-ove sume su pored σ definisane na sledeći način:

$s = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \cdot \operatorname{mes}\left(V_k\right)$ - donja Darboux-ova suma,

$S = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \cdot \operatorname{mes}\left(V_k\right)$ - gornja Darboux-ova suma, gde je:

$m_k = \inf\limits_{(x,y,z)\in V_k} f(x,y,z)$

$M_k = \sup\limits_{(x,y,z)\in V_k} f(x,y,z)$

Ove tri sume zadovoljavaju:

1. Za svaku podelu (p) i svaki izbor tačaka $M_k \in V_k$ važi: $s \le \sigma \le S$.
2. $\operatorname{int}\limits_{M_k\in V_k} \sigma = s, \ \sup\limits_{M_k\in V_k} \sigma = S$.
3. $\left.\begin{array}{l} p: s,\sigma,S \\ p': s',\sigma',S' \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s \le s; S' \le S'}$. Drugim rečima, usitnjavanjem podele donje Darboux-ove sume ne opadaju, a gornje Darboux-ove sume ne rastu.
4. $\forall p', p'' \Rightarrow s' \le S''$. Drugim rečima nijedna donja Darboux-ova suma ne premašuje nijednu gornju Darboux-ovu sumu.
5. Neka su sume najgrublje podele s_0, S_0, σ_0. Tada važi za bilo koju drugu podelu (p): $s_0 \le s \le S \le S_0$.
6. $\exists I^* = \operatorname{int} S; \exists I_* = \sup s$.
7. $s \le I_* \le I^* \le S$.
8. $\exists I \Leftrightarrow \lim\limits_{\lambda\to 0+} (S - s) = 0$.

Teoreme o izračunavanju trojnog integrala.

Teorema 2.
Pretpostavimo da je data pravougaona oblast $V=[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ i pretpostavimo da je data funkcija $f:R^3\to R$. Tada važi: $\iiint\limits_V f(x,y,z)dv=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d\left(\int\limits_e^f f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx$.

Teorema 3.
$x\in[a,b]$;

$$y_0(x)\le Y(x);\, f(x,y)\le F(x,y)$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv=\int\limits_a^b dx\cdot\int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} dy\cdot\int\limits_{f(x,y)}^{F(x,y)} fdz$$

Dokazi T1-T3 nisu dati, ali su slični kao kod $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Površinski integrali

Data je prvo uvodna priča o krivolinijskim integralima I i II vrste i ista razlika i ideja kod površinskih integrala. Takođe naglasiti da je površinski integral uopštenje dvojnog.

Površinski integral I vrste

Neka data površ $S\in R^3$ zadovoljava sledeće uslove:
1. *deo po deo glatka* (tj. sastoji se od unije najviše prebrojivo mnogo glatkih površi kod kojih se u svakoj tački površi, osim u rubnim tačkama, može postaviti tangentna ravan i to na jedinstven način).
2. *ograničena.*
3. *rektificijabilna* (to je ona površ koja ima konačnu površinu) .

Neka imamo podelu $P:s_1,s_2,...,s_n$ površi S za koju važi:

(i) za $\forall i=1,2,...,n$ je $S_i\in S$,

(ii) $\bigcup\limits_{i=1}^n S_i=S$,

(iii) $\forall i,j=1,2,...,n$ i $i\neq j$ sledi $\operatorname{int}S_i\cap\operatorname{int}S_j=0$.

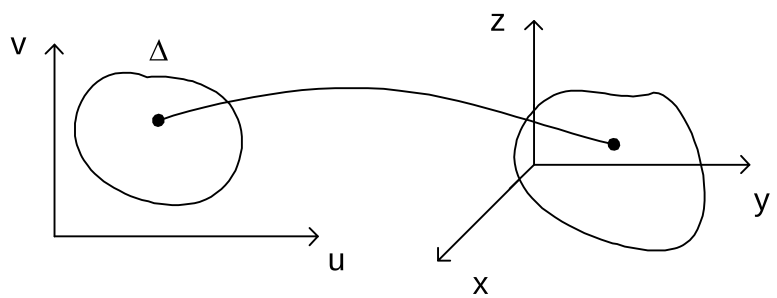
U toj podeli na proizvoljan način biramo tačake $M_k=M_k(x_k,y_k,z_k)\in S_k$ $(1\le k\le n)$.

Neka je $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n} d(S_k)$ i sa $\sigma=\sum\limits_{k=1}^n f(M_k)(\operatorname{mes}S_k)$ označena Darboux-ova suma, gde je $f:S\to R$ (f je ograničena na S).

Definicija 1. ***(Definicija površinskog integral I vrste)***
Ako postoji realan broj I takav da za $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ i $\forall P$ i $\forall M_k \in S_k$ važi:
$\lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon$. Tada :

a) broj I nazivamo površinski integral I vrste funkcije f po površi S.
b) za funkciju f kažemo da je integrabilna nad S u smislu površinskog integrala I vrste.
c) broj I označavamo sa $I = \oiint_S f(x,y,z)dS$ (obavezan kružić!- bez obzira da li je površ zatvorena ili otvorena).

Teorema 1. ***(Teorema o izračunavanju površinskog integrala I vrste)***
Neka $S \in R^3_{x,y,z}$ označava površ u prostoru R^3 i neka je ova površ jednoznačno preslikana na oblast $\Delta \in R^2_{u,v}$, i to sledećim funkcijama:
$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$.



Pri tome su ispunjeni još i sledeći uslovi:

a) $(x,y,z) \in S \underset{\text{na}}{\overset{1-1}{\Leftrightarrow}} (u,v) \in \Delta \subset R^2$ (biunivoka korespodencija).
b) data je funkcija $f(x,y,z): R^3 \mapsto R$ za koju ćemo pretpostaviti da je ograničena u S, tj. $\exists K \in R, \forall(x,y,z) \in S, |f(x,y,z)| \le K < +\infty$.
c) funkcije $x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$ su neprekidno diferencijabilne u oblasti Δ.

Tada važi sledeća jednakost:
$$\oiint_S f(x,y,z)dS = (\text{dvojni})\iint_\Delta f\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right) \cdot \sqrt{E \cdot G - F^2}dudv \text{ gde je}$$
$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$
$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}$$
$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$
DOKAZ:

Dokaz ove teoreme se bazira na jednom pomoćnom stavu.

Lema o smeni promenljivih:

Neka je dat dvojni integral $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ i neka je $S = \iint\limits_D \sqrt{1+(z_x^{'})^2+(z_y^{'})^2}dxdy$ veličina površine S nad oblašću $D \subset xOy$. Tada važi:

$$S = \iint\limits_{\Delta} \sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv .$$

Izrazi A, B i C definisani funkcijama $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$ pri čemu je $(u,v) \in R^2_{u,v}$ i pri tome numeričke vrednosti izraza A, B i C se izračunavaju kao determinante koje se dobijaju iz sledeće šeme (matrice):

$$\begin{vmatrix} x_u^{'} & y_u^{'} & z_u^{'} \\ x_v^{'} & y_v^{'} & z_v^{'} \end{vmatrix} \Rightarrow A = \begin{vmatrix} x_u^{'} & y_u^{'} \\ x_v^{'} & y_v^{'} \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} y_u^{'} & z_u^{'} \\ y_v^{'} & z_v^{'} \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} z_u^{'} & x_u^{'} \\ z_v^{'} & x_v^{'} \end{vmatrix}.$$

Na osnovu ove leme veličinu površi $S \in R^3$ računamo integralom

$$(*) \quad S = \iint\limits_{\Delta} \sqrt{E \cdot G - F^2}dudv .$$

Iz (*) dobijamo važan zaključak: $dS = \sqrt{E \cdot G - F^2}dudv$.

Dokaz same teoreme o izračunavanju površinskog integrala I vrste.

Označimo sa σ^* i σ Darboux-ove sume posmatranih integrala na levoj i desnoj strani jednakosti koju treba dokazati i to σ^* neka je Darboux-ova suma za površinski integral sleva, a σ Darboux-ova suma za dvojni integral zdesna.

Razmotrimo sume:

$$mes(S_k) = \iint\limits_{\Delta_K} \sqrt{E \cdot G - F^2}dxdy$$

$$\sigma^* = \sum_{k=1}^{n} f\left(x(u_k,v_k), y(u_k,v_k), z(u_k,v_k)\right) \cdot \sqrt{E \cdot G - F^2}\Big|_{(\overline{u_k},\overline{v_k})} \cdot \Delta_k$$

$$(\Delta_k = \Delta u_k \cdot \Delta v_k)$$

Razmotrimo zatim sumu σ $\left(\text{za} \oiint\limits_S \right)$ datu sa:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f\left(x(u_k,v_k), y(u_k,v_k), z(u_k,v_k)\right) \cdot \underbrace{\sqrt{E \cdot G - F^2}\Big|_{(u_k,v_k)} \cdot \Delta_k}_{mes(S_k)}$$

Jasno je:

$$\left|\sigma - \sigma^*\right| \le \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(x(u_k,v_k), y(u_k,v_k), z(u_k,v_k)\right)\right| \cdot \underbrace{\left| \sqrt{E \cdot G - F^2}\Big|_{(u_k,v_k)} - \sqrt{E \cdot G - F^2}\Big|_{(\overline{u_k},\overline{v_k})} \right|}_{<\varepsilon} \cdot \Delta_k$$

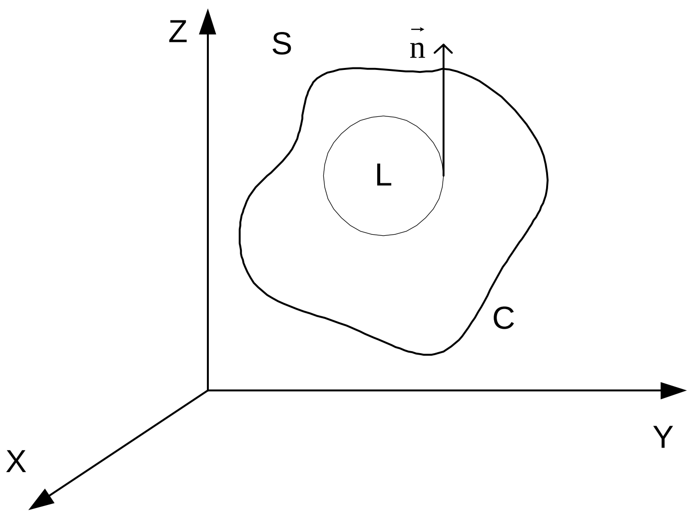
$$\leq K \cdot \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{n} \triangle_k = K \cdot \varepsilon \cdot \triangle = \varepsilon'$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{K \cdot \triangle}$$

$$\lim_{\lambda \to 0+} \sigma = \lim_{\lambda \to 0+} \sigma^* \Rightarrow \lim_{\lambda \to 0+} (\sigma - \sigma^*) = 0.$$

Jednostrane i dvostrane površi

POJAM:



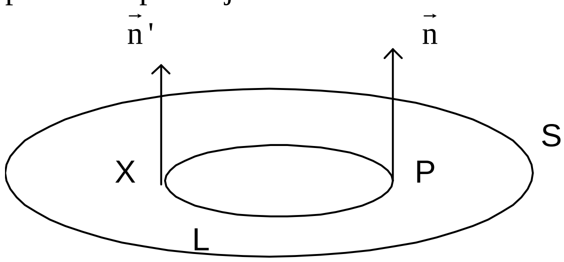
Pretpostavimo da je data glatka površ $S \in R^3$. Pretpostavimo mimo toga da je rub ove površi izvesna zatvorena kontura C. U proizvoljnoj tački N ove površi povučemo jedinstvenu normalu $\vec{n}$ $(\vec{n} \perp S)$ i opišemo kroz podnožje normale konturu $L \subset S$ takvu da je $L \cap C = 0$.

Pomeramo $\vec{n}$ duž L. Imamo dva slučaja:

1. Šetajući $\vec{n}$ duž konture L posle povratka u tačku N normala $\vec{n}$ može da se vrati u svoj polazni položaj zadržavajući odgovarajući smer.
2. Može da se desi da posle obilaska te konture, vektor $\vec{n}$ dođe u položaj ili poziciju sa smerom suprotnim od početnog smera u tački N.

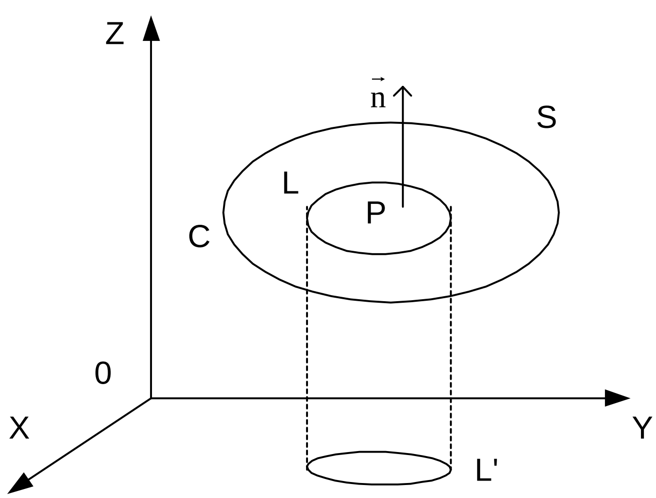
Ako za svaku konturu $L \subset S$ normala zadrži isti smer kao i u početnom položaju N, tada se za površ S kaže da je *dvostrana*. Nasuprot ovome, ako postoji barem jedna kontura L takva da posle njenog obilaska vektor $\vec{n}$ promeni svoj smer tada za površ S kažemo da je *jednostrana* (npr. sfera i Mebijusov list).

Definicija 1. ***(Definicija strane površi)***
Izaberimo u dvostranoj, deo po deo glatkoj, ograničenoj i rektificibilnoj površi S jednu tačku P i u njoj postavimo normalu $\vec{n}$ $\left(\vec{n} \perp S\right)$, pri čemu izaberimo na proizvoljan način i fiksirajmo jedan od dva moguća smera. Mimo ovoga uočimo tačku X u S. Za tačku X i tačku P kažemo da pripadaju istoj strani dvostrane površi S ako za svaku konturu L koja sadrži i P i X, ali ne seče S, normala $\vec{n}$ posle obilaska te konture zadržava isti smer kao i u početnom položaju.



Drugim rečima:
$X\rho P \Leftrightarrow \vec{n}' \underset{L}{\rightarrow} \vec{n}$ (imaju isti smer)
strane je $\left\{X \in S \middle| X\rho P\right\}$ (jedne strane)
(preostali skup je druga strana).

Spoljna strana.
Data površ S (deo po deo glatka, rektificibilna i dvostrana) je naslonjena na konturu C. U površi S, u unutrašnjim tačkama izaberimo neku proizvoljnu tačku P i u tački P postavimo normalu na S sa izborom jednog od dva moguća smera. Tačku P opkolimo izvesnom konturom L koja ne seče C (dakle P leži u skupu $P \in \operatorname{int}(L \cap S)$).



Izaberimo jedan od moguća dva smera kretanja duž konture L, izvršimo zatim projekciju konture C, površi S, tačke P, konture L i izabranog smera kretanja duž konture L na ravni 0xy. Neka L’ označava projekciju konture L zajedno sa izabranim smerom kretanja.
Pretpostavimo još da se projektovani smer kretanja duž L’ poklapa sa pozitivnim smerom

kretanja duž konture L’. Ako je sve ovo ispunjeno, tada za tačku P kažemo da pripada spoljnoj stani površi S ako je ispunjen još i sledeći uslov:

(a) smer kretanja je takav da $\vec{n}$ ostaje s leve strane pri kretanju duž L,

(b) pri tome je $\vec{n}$ orjentisana tako da je smer “od pete ka glavi”.

Preostala strana ove dvostrane površi se naziva unutrašnja strana.

Površinski integrali II vrste

A. Ukoliko je na površi $S \subset R^3$ izabrana jedna strana površi (na primer “spoljna”), tada za površ kažemo da je “orjentisana”.
Definicija integrala.

B. Neka površ $S \subset R^3$ zadovoljava sledeće uslove:
1. deo po deo glatka,
2. ograničena,
3. rektificijabilna (tj. možemo da odredimo površinu površi),
4. dvostrana (orjentisana je),
5. na S je izabrana jedna strana površi (spoljna!).

C. Neka je u svakoj tački površine S definisana funkcija $R(x,y,z): S \to R$ i neka je ona ograničena na S (tj. $\exists K > 0 : |R(x,y,z)| \le K, \forall (x,y,z) \in S$).

D. Neka je $P = S_1, S_2, ..., S_n$ proizvoljna podela S na orjentisane površine S_i $(1 \le i \le n)$. Svaka podpovrš orjentisana je na isti način kao i S.

E. Projektujmo S_i na 0xy ravni i neka su $D_i (1 \le i \le n)$ veličine površina tih projekcija.

F. Neka je $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} d(S_i)$, gde su $d(S_i)$ dijametri površi S_i. Proizvoljno biramo tačke: $M_i = M_i(x,y,z) \in S_i$ $(1 \le i \le n)$.

G. $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} R\left(M_i\right) \cdot D_i$ gde ima D_i znak +.

Definicija 1. (Definicija integrala druge vrste po 0xy-ravni)

Ako postoji apsolutna konstanta $I \in R$ takvo da za

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall P_n, \forall M_k \in S_k$ važi $\lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon$ tada je:

1. $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \sigma = I$.
2. Funkciju R nazivamo integrabilnom u smislu integrala druge vrste po 0xy-ravni.
3. Broj I nazivamo integral druge vrste na S po 0xy-ravni.
4. $I = \iint\limits_S R(x,y,z) dxdy$.

Strane površi označavamo sa S^+ (spoljna strana) i S^- (unutrašnja strana).

Definicija 2. Definicija integrala druge vrste.

Slično uradimo po 0yz i 0zx ravni za funkcije P=P(x,y,z) i Q=Q(x,y,z). Tada se:

$$\boxed{I = \iint_{S^+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy}$$

zove površinski integral druge vrste po spoljnoj strani površi S.

NAPOMENA:
Ovde ni u kom slučaju ne treba misliti da je: $dxdy = D_i$. Jedno je oznaka, a drugo je $\lim\limits_{\lambda\to 0+} \sigma$!

Izračunavanje površinskog integrala II vrste.

Izračunavanje površinskog integrala II vrste vrše se redukcijom na površinski integral I vrste. Zavisno od toga kako je data površ S po kojoj treba integraliti postoje tri metoda izračunavanja ovih integrala.

I slučaj:
Dat je integral $I = \iint_S f(x,y,z)dydz$. Neka je površ S zadata eksplicitno:

$S: z = z(x,y)$, pri čemu je $(x,y,z) \in S \Leftrightarrow (x,y) \in D \subset R^2$. Pri tome ovo mora biti obostrano jednoznačno preslikavanje. Suma:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \underbrace{D_i}_{\text{iz } Oyz} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z(x_i, y_i))D_i \xrightarrow{\lambda\to 0+}$$

$$\boxed{I = \oiint_S f(x,y,z(x,y))dxdy = (\text{dvojni})\iint_D f(x,y,z(x,y))dxdy}$$

Ovo je direktno svođenje na dvojni integral.

II slučaj:
Neka je $\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ jedinični vektor gradijent na već zadatu površ S (α, β, γ su uglovi koje $\vec{n}$ zaklapa sa x,y,z osama). Izdelimo S na veoma male površi, kojima dodeljujemo po vektor $\vec{n}$. Neka je $\operatorname{mes}(D_i)$ mera površine projekcije površine S_i na Oxy.

$$\left|\frac{\operatorname{mes}(D_i)}{\operatorname{mes}(S_i)}\right| = |\cos\gamma_i| \left(\frac{dxdy}{dS} = \cos\gamma\right), \text{ pa je}$$

$\operatorname{mes}(D_i) = \operatorname{mes}(S_i)\cdot\cos\gamma_i$ (γ_i u izabranoj tački)

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\cos\gamma_i \cdot \operatorname{mes}(S_i) \Rightarrow \ I = \oiint_S f(x,y,z)\cos\gamma dS.$$

Dakle, važi:

$\boxed{I = (II)\oiint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = (I)\oiint\limits_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)dS}$ (uglovi u opštem slučaju zavise od koordinata x, y i z).

***III slučaj*:**
Date su tri funkcije: $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$ i A, B, C je formirano iz

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \text{ gde } (x,y,z) \in S \underset{\text{"1-1"}}{\overset{\text{na}}{\Leftrightarrow}} (u,v) \in \Delta \subset R^2 .$$

Koristeći smenu $\cos\alpha = \dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$,

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}dudv$$

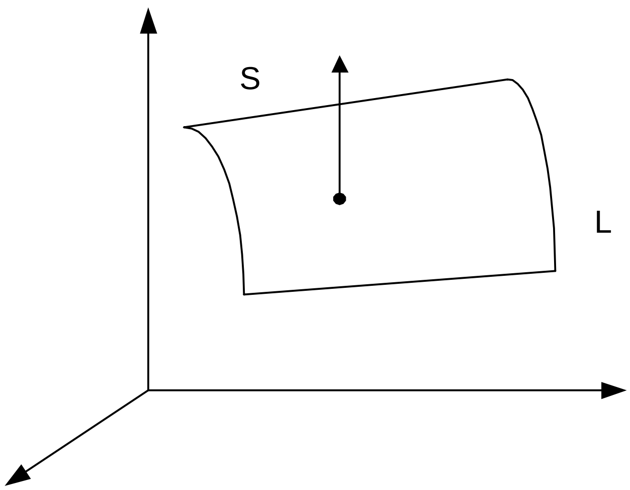
(gde je $A = \dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}$, $B = \dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}$, $C = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$) dobijamo:

$$\boxed{I = (II)\oiint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = (\text{dvojni}) \underbrace{\pm}_{\substack{\text{zavisi od} \\ \text{strane} \\ \text{povrsi}}} \iint\limits_\Delta \left(PA + QB + RC\right)dudv}.$$

NAPOMENA:
Prethodna transformacija na dvojni integral se može realizovati ukoliko postoje takvi parametri x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v) koji mogu da realizuju biunivoko preslikavanje površi S na odgovarajuće L i oblast Δ u ravni R^2_{uv} .

Stokes-ova formula

Pretpostavimo da je $S \subset R^3$ izvesna površ koja zadovoljava sledeće uslove:
1) S je glatka površ,
2) S je prosta površ (ne seče samu sebe),
3) S je dvostrana površ,
4) S je ograničena deo po deo glatkom konturom L, pri čemu na površi S biramo spoljnu stranu, a na L izvesnu orijentaciju kretanja,



5) parametarskim funkcijama x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v) se površ S jednoznačno preslikava na $\Delta \in R^2_{u,v}$ (pri tome se kontura L preslikava na konturu Λ),
6) neka je data još i funkcija P=P(x,y,z) koja je neprekidna zajedno sa svim svojim prvim parcijalnim izvodima po svim promenljivim x,y,z i to u oblasti $S \cup L$.

Pod svim ovim uslovima tada važi:

(I) $$(II)\int_L Pdx = (II)\oiint_S \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy\,.$$

Pretpostavimo dalje da jos uvek važe sve pretpostavke koje se odnose na S∪L, ali da su date još dve funkcije Q=Q(x,y,z) i R=R(x,y,z) koje zadovoljavaju analogne pretpostavke pod brojem 6). Tada važe i sledeće dve formule:

(II) $$\int_L Qdy = \oiint_S \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}dydz \quad i$$

(III) $$\int_L Rdz = \oiint_S \frac{\partial R}{\partial z}dydz - \frac{\partial R}{\partial x}dzdx$$

Zahvaljujući formulama navedenim pod (I), (II) i (III) tada sleduje da važi i sledeća jednakost, koja se naziva Stokes-ova formula, i koja glasi:

$$\boxed{\begin{aligned}&\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = (I)\oiint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \\ &= \oiint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\end{aligned}}$$

gde je $\vec{n} = \vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ jedinični vektor normale postavljen na površi S u tački (x,y,z)$\in$S (u stvari u tekućoj tački (x,y,z)$\in$S mi imamo $\alpha = \alpha(x, y, z), \beta = \beta(x, y, z)$, $\gamma = \gamma(x, y, z)$).

Stokes-ova formula predstavlja vezu između površinskog integrala II vrste i krivolinijskog integrala II vrste.

DOKAZ 1:

U $\int\limits_L Pdx$ pređimo na Λ; iz $x = x(u,v) \Rightarrow dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv \Rightarrow$

$$\int\limits_L Pdx = \int\limits_\Lambda \left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)du + \left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right)dv \text{ (II vrste).}$$

Po Green-ovoj formuli dalje imamo:

$$\int\limits_L Pdx = (II)\iint\limits_\Delta \frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right) =$$

(posle sređivanja)

$$= \iint\limits_\Delta \left(\frac{\partial P}{\partial z}B - \frac{\partial P}{\partial y}C\right)dudv =$$

$$= \oiint\limits_S \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

DOKAZ 2:

Orijentacija konture L implicira orijentaciju površi S. Površ S je data jednačinom z = f (x, y), što znači da prava paralelna z-osi seče ovu površ samo u jednoj tački. Projekcija konture L na xy-ravan je orijentisana kontura C koja obuhvata oblast D_{xy}.

Posmatrajmo integral $I_1 = \oint\limits_L P(x,y,z)dx$.

S obzirom da je na konturi L i na površi S, z = f (x, y), integral I_1 se može svesti na krivolinijski integral po konturi C u xy-ravni, tj. $I_1 = \oint\limits_L P(x,y,f(x,y))dx$.

Primenom Green-Riemann-ove formule ovaj integral se transformiše na dvojni integral po oblasti D_{xy}. Dakle,

$$I_1 = -\iint\limits_{D_{xy}} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} \frac{\partial P}{\partial y}dxdy - \iint\limits_{D_{xy}} \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}dxdy.$$

U poslednja dva integrala argumenti funkcije P su x, y, z, gde je z = f (x, y).
Ako se vratimo na argument z, oba integrala se svode na površinske integrale po površi S. Dakle, jednostavno, umesto D_{xy}, treba staviti S.
Ranije smo videli da je vektor normale na površ S jednak:

$$\vec{n} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) = (-p,-q,1),$$

odakle je jedinični vektor normale:

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}(-p,-q,1) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Iz jednakosti dxdy = $ds\cos\gamma$, dzdx = $dg\cos\beta$ i iz formula za $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ dobijamo

$$\frac{\partial f}{\partial y}dxdy = qdxdy = q\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}dzdx = q\frac{\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}dzdx = -dzdx.$$

Na osnovu toga integral I_1 postaje

(2) $$I_1 = \int_L P(x,y,z)dx = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy.$$

Cikličkom permutacijom promenljivih x, y, z i funkcija P, Q, R dobijamo sledeće dve jednakosti:

(3) $$I_2 + \int_L Q(x,y,z)dy = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}dydz.$$

(4) $$I_3 = \int_L R(x,y,z)dy = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y}dydz - \frac{\partial R}{\partial x}dzdx.$$

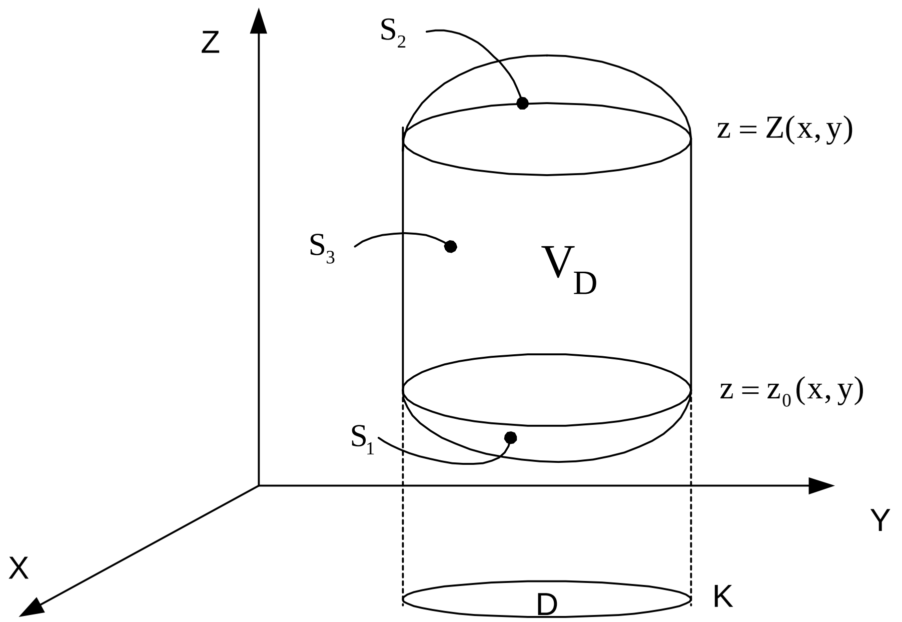
Sabiranjem levih i desnih strana jednakosti (2), (3) i (4) i primenom osobine distributivnosti, imamo:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Ovim je dokaz završen.

Teorema Gauss –Ostrogradski

Ova formula omogućava da se sa površinkog integrala II vrste pređe na trojni (zapreminski) integral, tj. ovom formulom je omogućeno da se umesto računanja površinskog integrala II vrste izvrši izračunavanje adekvatnog trojnog integrala. Pri tome treba imati u vidu da se ova formula odnosi isključivo na zatvorene površi i da se trojni integral računa po oblasti prostora R^3 koja je sadržana u prethodno pomenutoj zatvorenoj površi.



Razmotrimo telo V. U skladu sa oznakama na crtežu pretpostavimo da su date dve funkcije $S_1 : z = z_0(x, y)$, $S_2 : z = Z(x, y)$, gde je $(x,y) \in D$ i gde je ispunjen sledeći uslov $z_0(x, y) \le Z(x, y)$ za $\forall (x, y) \in D$. Površ S_3 je ortogonalna na xy ravan. Površi S_1, S_2 i S_3 su deo po deo glatke površi. Neka je takođe sa S označena spoljna strana površi $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Mimo ovoga pretpostavimo da je oblast D ograničena izvesnom konturom K koja je deo po deo glatka.
Ako još pretpostavimo da je data funkcija R=R(x,y,z) i ova funkcija zajedno sa svojim parcijalnim izvodom $\frac{\partial R}{\partial z}$ jeste neprekidna u oblasti V, tada važi sledeća formula:

(I) $$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \oiint\limits_S R(x, y, z) dxdy \ .$$

DOKAZ:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$$

$$= \iint\limits_D R(x, y, Z(x, y)) dxdy - \iint\limits_D R(x, y, z_0(x, y)) dxdy =$$

$$= \oiint\limits_{S_2} R(x, y, z) dxdy + \oiint\limits_{S_1} R(x, y, z) dxdy + \left(+ \iint\limits_{S_3} R(x, y, z) dxdy = 0 \Big|_{\text{promene dx i dy su 0 na } S_3} \right) =$$

$$= \oiint\limits_S R(x, y, z) dxdy.$$

Ako analogno ovome pretpostavimo još i da funkcije P(x,y,z) i Q(x,y,z) zadovoljavaju pretpostavke neprekidnosti iste kao i gore pomenuta funkcija R(x,y,x) tada važe još dve formule:

(II) $\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \oiint\limits_S P(x,y,z)dydz$

(III) $\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \oiint\limits_S Q(x,y,z)dzdx$

Teorema eorema Gauss –Ostrogradski.

Pod navedenim pretpostavkama dobijamo da važi sledeća jednakost (formula G-O):

$$\boxed{\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = (II)\oiint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy}$$

Dokaz je baziran na direktnom izračunavanju.

PRIMER:

Primenom formule Ostrogradski izračunati

$I = \iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdy + z^3dxdy$

gde je S: spoljna $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a > 0$.

$$I = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \le a^2} (3x^2 + 3y^2 + 3z^2)dxdydz = \begin{bmatrix} x = a\rho\cos\varphi\cos\psi \\ y = a\rho\cos\varphi\sin\psi \\ z = a\rho\sin\varphi \\ 0 \le \rho \le 1 \\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \psi \le 2\pi \end{bmatrix}$$

Itd.