Predavanje 6

ZAKONI OCUVANJA U PRIRODI

Uvod

Zakoni očuvanja imaju niz prednosti u odnosu na Njutnove aksiome, koji imaju ograničenu važnost. Spomenimo neke od tih prednosti:

- **zakoni očuvanja ne ovise od oblika putanje, ni od karakteristika sila koje djeluju u nekom prirodnom procesu,**
- **mogu se primijeniti i na one prirodne pojave čije sile nisu poznate,**
- **invarijantni (nepromjenjivi) su na transformacije koordinata**.

Rad sile

Rad sile se određuje sa skalarnim proizvodom sile i rastojanja po kome se pomijerala materijalna tačka:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs\cos\left(\vec{F}, \vec{s}\right) = Fs\cos\alpha .$$

Sila ne vrši rad kad sa pomijeranjem zaklapa pravi ugao ili ako se čestica ne pomjera.
Ukoliko je sila promjenljiva i zavisi od rastojanja, a pomjeranje se vrši duž proizvoljne krivulje:

$$W = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \, \Delta \vec{s}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \, \Delta \vec{s}_i \cos\left(\vec{F}_i, \Delta \vec{s}_i\right).$$

Prava vrijednost izvršenog rada dobiva se iz prethodne jednadžbe kao granični slučaj kad $\Delta s_i \to 0$, a $n \to \infty$:

$$W = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \, \Delta \vec{s}_i = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \, d\vec{s} .$$

Rad je jednak integralu projekcije sile $F_s = F\cos\alpha$ **i pomaka** ds. Ako je početna i krajnja tačka zadana vektorima položaja r_1 i r_2, rad se definiše izrazom:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \, d\vec{r}$$

Jedinica za rad je **1 džul** (1J=1Nm).

Energija

Energija je sposobnost vršenja rada. Rad lahko prelazi u energiju, i obrnuto. Energija može prelaziti **iz jednog oblika u drugi**. Jedinica za energiju je ista kao i za rad. Mehanička energija pojavljuje se u dva oblika: **kinetička i potencijalna** energija.

Kinetička energija

Neka sila $\vec{F}$ ubrzava tijelo na nekom putu. Izračunajmo rad potreban za ubrzanje tijela od početne brzine v_1 do konačne brzine v_2:

$$W=\int_{s_1}^{s_2}\vec{F}\,d\vec{s}=\int_{s_1}^{s_2}m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{s}=m\int_{v_1}^{v_2}\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}\,dt=m\int_{v_1}^{v_2}\vec{v}\,d\vec{v}\,.$$

Nakon integriranja:

$$W=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2\,.$$

Veličinu $E_k=\frac{1}{2}mv^2$ nazivamo kinetička energija tijela mase m i brzine v.

Promjena kinetičke energije jednaka je izvršenom radu:

$W=E_{k2}-E_{k1}=\Delta E_k$ **(teorema o radu i kinetičkoj energiji)**

Potencijalna energija

Potencijalna energija je sposobnost vršenja rada zbog toga što tijelo ima osobiti položaj.

Gravitacijska potencijalna energija

Rad sile teže na putu od A do B jednak je:

$$W=\int_{r_A}^{r_B}\vec{F}\,d\vec{r}=m\vec{g}\left(\vec{r}_B-\vec{r}_A\right).$$

Budući da je $\vec{F}=m\vec{g}=-mg\vec{j}$ i $\vec{j}\cdot\vec{r}_B=y_B$, $\vec{j}\cdot\vec{r}_A=y_A$, dobili smo rad u polju sile teže jednak:

$W=-(mgy_B-mgy_A)$.

Veličinu $E_p=mgy$ nazivamo **gravitacijska potencijalna energija** tijela na visini y iznad površine Zemlje. Rad sile teže **ne ovisi o putu** već samo o početnom i konačnom položaju tijela (konzervativna sila).

Rad svake konzervativne sile možemo izraziti razlikom potencijalnih energija:

$$\int_{r_A}^{r_B}\vec{F}_k\,d\vec{r}=-\left[E_p(r_B)-E_p(r_A)\right]$$

Zakon očuvanja mehaničke energije

U izoliranom (zatvorenom) sistemu u kojem nema nekonzervativnih sila (trenja) mehanička energija je konstantna (z.o.e.), tj,

$E=E_k+E_p=const.$

Ako sistem nije zatvoren, promjena ukupne mehaničke energije jednaka je radu vanjskih sila koje djeluju na sistem:

$E_2-E_1=\left(E_{p2}-E_{p1}\right)+\left(E_{k2}-E_{k1}\right)=W$.

Potencijalno polje sila. Konzervativne sile

Ako je tijelo postavljeno u takve uvjete da je u svakoj tački prostora podvrgnuto djelovanju drugih tijela sa silom koja se zakonomjerno mijenja od jedne tačke do druge, kaže se da se to tijelo nalazi u **polju sila**.

Za sile koje zavise samo od položaja tijela može se desiti da rad, koji vrše nad tijelom, ne zavisi od puta, već se određuje samo početnim i krajnjim položajem tijela u prostoru. U tom slučaju polje sila naziva se **potencijalnim poljem**, a same sile **konzervativnim silama**.
Sile čiji rad zavisi od puta, po kojem tijelo prelazi iz jednog položaja u drugi, nazivaju se **nekonzervativnim silama** (sila trenja, npr).
Polje centralnih sila je polje kod kojeg pravac djelovanja sile u proizvoljnoj tački prostora, prolazi kroz neki centar, a veličina sile zavisi samo od rastojanja od tog centra.

Rad konzervativnih sila na bilo kojem zatvorenom putu jednak je nuli: $\oint \vec{F}_k \, d\vec{s} = 0$.

Rad sila u gravitacijskom polju. Centralno polje sila

Gravitacijsko polje sila je centralno polje.

Elementarni rad dW, koji izvrši gravitacijska sila pri pomjeranju tijela m_1, za rastojanje $d\vec{s}$ je:

$$dW = \vec{F}\, d\vec{s} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr,$$

gdje je $\vec{r}_0 \cdot d\vec{s} = dr$, integriranjem od r_1 do r_2 dobivamo:

$$W = -\gamma m_1 m_2 \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = -\gamma m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \text{ ili } W = \gamma m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Promjena potencijalne energije sistema jednaka je negativnoj vrijednosti rada kojeg vrši gravitacijska sila pri premještanju tijela:

$$\left(E_p\right)_2 - \left(E_p\right)_1 = -W = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_1} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_2}.$$

Obično se uzima da $r_2 \to \infty$, tada $E_p(\infty) = 0$, pa je potencijalna energija tijela m_2:

$$E_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}.$$

Rad elektrostatske sile

Elektrostatska sila je takođe centralna sila. Sila međudjelovanja 2 tačkasta naboja je:

$$\vec{F}(r) = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}_0.$$

Elementrani rad koji izvrši ta sila pri pomjeranju naboja q_1 za rastojanje $d\vec{r}$ je:

$$dW = \vec{F}\, d\vec{r} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} dr.$$

Integracijom od r_1 do r_2 dobivamo:

$$W = -k q_1 q_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \Delta E_p.$$

Veza između potencijalne energije i sile

Sila je jednaka gradijentu potencijalne energije, sa suprotnim znakom:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{k} \right) = -gradE_p .$$

Zakon očuvanja impulsa

Proizvod mase čestice i brzine naziva se **impuls ili količina kretanja** čestice:

$$\vec{p} = m\vec{v} .$$

Ako se impuls mijenja u toku vremena, postoji djelovanje neke sile:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt} = \vec{F} ,$$

Ova jednadžba je naopćenitiji slučaj drugog Njutnovog zakona i zove **se zakon promjene impulsa.**

Ukupna količina kretanja zatvorenog sistema je konstantna bez obzira kakvi se procesi i međujelovanje događali u sistemu (z.o.i.):

$$\vec{p}_{ukupni} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{const} .$$

Sudari tijela

Sudari tijela su pojave kod kojih su nepoznate ili priroda ili intenzitet sila koje djeluju u njima, ili oboje.

Sudari dvaju tijela može biti **elastičan, djelimično elastičan i neelastičan**.

Sudar je **savršeno elastičan** kada nema gubitka energije, već je ukupna kinetička energija očuvana.

Sudar je **savršeno neelastičan** kada se tijela nakon sudara deformišu, spoje i zajedno nastave kretanje kao jedno tijelo. Tu se jedan dio kinetičke energije izgubi i pretvori u druge oblike energije.

Posebni slučajevi savršeno elastičnog sudara

- U slučaju jednakih masa čestice izmijene brzine. Ako druga kugla miruje, poslije sudara prva kugla se zaustavi, dok druga odleti brzinom koju je imala prva kugla prije sudara.

- Savršeno elastična kugla mase m i brzine v udara u vrlo veliku kuglu ili savrčeno elastičan zid. Kugla se odbija jednakom brzinom kojom je i došla. Zid pri tome dobiva impuls sile $2m\vec{v}$, a ne dobiva nikakvu energiju, jer kugla prilikom sudara ne mijenja energiju.

- Kada vrlo velika kugla udari kuglicu koja miruje, brzina joj se vrlo malo promijeni dok lagana kuglica odleti brzinom koja je dva puta veća od brzine upadne kugle. Predana je energija pri centralnom elastičnom sudaru dva tijela.

Posebni slučajevi savršeno neelastičnog sudara:

- Kada je $m_1 = m_2 = m$, slijedi da je $\vec{u} = \frac{1}{2}\left(\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right)$. Ako druga kugla prije sudara mirovala, tada, nakon sudara, obje kugle nastave gibanje brzinom $\vec{u} = \frac{\vec{v}_1}{2}$. Ako je $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$, tada nakon sudara, obje kugle stanu.
- Kada je $m_1 << m_2, v_2 = 0$ slijedi da je i $u = 0$. Kad kugla od blata padne na tlo, tu i ostane.

Kruto tijelo

Ako tijelo **pod uticajem sile ne mijenja oblik**, kažemo da je tijelo kruto. Možemo zamisliti da se kruto tijelo sastoji od mnogo pojedinačnih materijalnih tačaka čiji međusobni razmaci ostaju uvijek isti.

Moment sile

Uticaj sile na rotaciju opisuje se njenim momentom. Neka materijalna tačka kruži oko tačke O po kružnici poluprečnika r. Ako je kruženje ubrzano, na tačku djeluje sila koja ima radijalnu komponentu $F_r = m\omega^2 r$ i tangencijalnu komponentu $F_t = ma_t = mr\alpha$.
Pomnožimo jednadžbu $F_t = F\sin\varphi = mr\alpha$ sa r i dobivamo:
$rF\sin\varphi = mr^2\alpha$,

što se može napisati pomoću vektorskog proizvoda: $\vec{r} \times \vec{F} = mr^2\vec{\alpha}$.

Lijeva strana ove jednadžbe predstavlja **moment sile** $\vec{M}$, a mr^2 predstavlja **moment inercije** materijalne tačke I, tako da jednadžba prelazi u $\vec{M} = I\vec{\alpha}$.
Moment inercije krutog tijela se definira izrazom:
$I = \int r^2 dm$.

Uvjet ravnoteže za translaciju materijalne tačke je da zbir svih sila koje na nju djeluju bude jednak nuli. Dodatni **uvjet ravnoteže za rotaciju** je da i suma momenata svih sila bude jednaka nuli.

Moment količine kretanja

Veličina analogna količini kretanja je moment količine kretanja.

Moment količine kretanja $\vec{L}$ materijalne tačke mase m i količine kretanja $\vec{p} = m\vec{v}$ s obzirom na referentnu tačku 0 (npr. središte kružnice), definira se kao proizvod radijus vektora $\vec{r}$ i količine kretanja:
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$ ili $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

Smjer momenta količine kretanja jednak je smjeru ugaone brzine.
Jedinica momenta količine kretanja je kgm^2 / s.

Zakon o očuvanju momenta količine kretanja

Ako je vektorski zbir momenata svih vanjskih sila s obzirom na neku tačku jednak nuli, tada je ukupni moment količine gibanja sistema (krutog tijela) za tu istu tačku konstantan i po smjeru i iznosu.
U zatvorenom sistemu je moment količine kretanja sačuvan.

Snaga

Snaga je brzina vršenja rada ili brzina prijenosa energije:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\, d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Snaga je skalarni proizvod sile i trenutne brzine. Jedinica za snagu je **1 vat** (*1 W=1 J/s*).

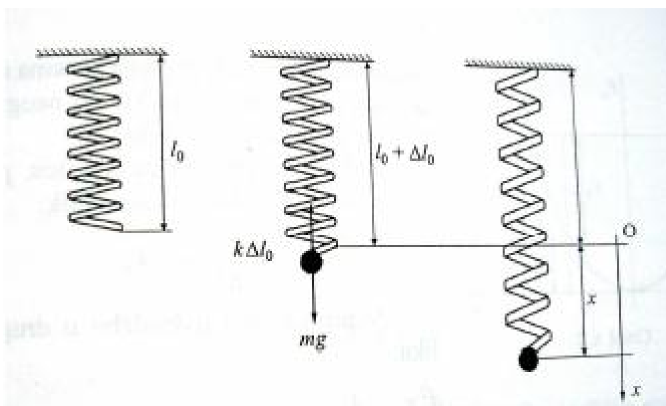
Predavanje 7

TITRANJE (OSCILACIJE)

Osciliranje predstavlja vrstu gibanja ili promjenu fizičkog procesa koji se odlikuje određenim stupnjem **ponavljanja.** U zavisnosti od prirode fizičkog procesa koji se ponavlja, oscilacije dijelimo na: mehaničke, elektromagnetske i elektromehaničke. U zavisnosti od karaktera djelovanja na oscilatorni sistem razlikujemo: **slobodno titranje, prigušeno titranje i prisilno titranje.** Titranja kod kojih se veličina koja oscilira mijenja po zakonu sinusa ili kosinusa u funkciji vremena nazivaju se **harmonična titranja (oscilacije).**

Harmonijske oscilacije

Promatrajmo sistem koji se sastoji od kuglice mase m koja je obješena na elasticnu oprugu. U stanju ravnoteže sila, silu težine mg uravnotežuje elasticna sila $k\Delta l_0$ (**Hookeov zakon**), tj. $mg = k\Delta l_0$.



Ako pomjerimo kuglicu iz ravnotežnog položaja na rastojanje x: $F = mg - k(\Delta l_0 + x)$.
Uzimajući u obzir uvjet ravnoteže dobivamo: $F = -kx$.

Sila *F* ima osobine:
· **proporcionalna je pomjeranju kuglice** iz položaja ravnoteže i
· uvijek je **usmjerena prema položaju ravnoteže**.
Za sile koje se ponašaju po istoj zakonitosti kažemo da su **kvazielastične**.

Sistem u kojem djeluje kvazielastična sila, pri pomjeranju iz ravnotežnog položaja na rastojanje x dobiva **potencijalnu energiju**: $E_p = \frac{kx^2}{2}$.

Jednadžba gibanja za kuglicu, prema II Njutnovom aksiomu, ima oblik: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$.

Gibanje sistema, koji se nalazi pod djelovanjem sile oblika $F = -kx$, predstavlja harmonično gibanje.

Iz jednadžbe gibanja dobijamo: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$.
Veličina najvećeg otklona od ravnotežnog položaja naziva se **amplituda titranja** A.

Veličina $(\omega t + \varphi)$ naziva se **faza titranja**. Konstanta φ zove se **početna faza oscilovanja**.

Period titranja je $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, gdje je ω **kružna frekvencija** (broj oscilacija za 2π sekundi).

Frekvencija titranja (broj titranja u jedinici vremena): $f = \dfrac{1}{T}$.

Veza između f i ω: $\omega = 2\pi f$.

Brzina: $v = \dfrac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$.

Ubrzanje: $a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$.

Ubrzanje i pomjeranje nalaze se u **protiv fazi**.

Iz početnih uvjeta određujemo A i ω:

$A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega_0^2}}$, $tg\varphi = -\dfrac{v_0}{\omega x_0}$

Energija harmonijskog oscilovanja

Kvazielastična sila je konzervativna, pa je **ukupna energija harmoničnog titranja konstantna**. **Maksimalna potencijalna energija** se dobije kada se sistem nalazi na najvecem otklonu od ravnotežnog položaja: $(E_p)_{\max} = \dfrac{kA^2}{2}$, $(k = m\omega^2)$.

U momentu prolaska kroz ravnotežni položaj sistem ima maksimalnu brzinu, tj. **maksimalnu kinetičku energiju**: $(E_k)_{\max} = \dfrac{mv_{\max}^2}{2} = \dfrac{mA^2\omega^2}{2}$.

Ukupna energija harmoničnog titranja: $E = E_p + E_k = \dfrac{kA^2}{2} + \dfrac{mA^2\omega^2}{2}$.

Harmonični oscilator

Harmonični oscilator predstavlja sistem koji vrši harmonična titranja oko položaja ravnoteže: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$.

Impuls harmoničnog oscilatora: $p = mv = -mA\omega\sin(\omega t + \varphi)$.

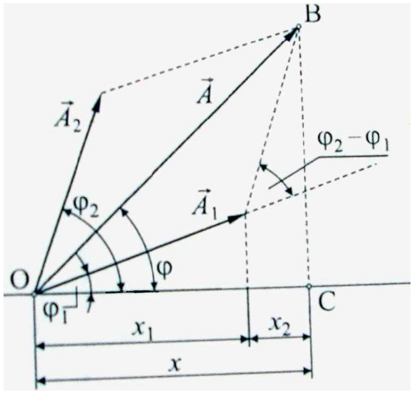
Kvadriranjem i zbrajanjem posljednje dvije jednačine dobijamo: $\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{p^2}{m^2A^2\omega^2} = 1$.

Grafički predstavljen impuls harmoničnog oscilatora u funkciji otklona *x*, daje elipsu.

Ukupna energija harmoničnog oscilatora je proporcionalna površini elipse, pri čemu je koeficijent proporcionalnosti vlastita frekvencija oscilatora: $E = f \cdot S = f\pi A^2 m\omega = f\oint p\,dx$.

Slaganje harmonijskih oscilacija

Pri istovremenom djelovanju više različitih elastičnih sila na oscilator on ce vršiti složeno gibanje, koje ce biti jednako geometrijskom zbiru pojedinih oscilacija. Rješavanje ovih problema znatno se olakšava ako se oscilacije predstave pomoću, tzv. **vektora amplitude**.



Promatrajmo slaganje dva harmonična titranja istog smjera i iste frekvencije. **Rezultirajuće pomjeranje** tijela vršit će se po istoj pravoj tako da je jednako algebarskom zbiru oba pomjeranja:

$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$.

Vektor $\vec{A}$ predstavlja rezultujuće titranje. Primjenom kosinusne teoreme dobijamo:

$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, odnosno,

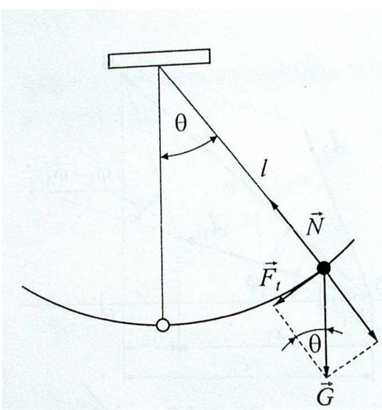
$$tg\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}.$$

Ako je fazna razlika između dva titranja konstantna, titranja se nazivaju koherentna. Ako je fazna razlika jednaka nuli ili $2\pi n$: $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$ i $A = A_1 + A_2$.

Ako je fazna razlika jednaka $(2n+1)\pi$: $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$ i $A = |A_1 - A_2|$.

Matematičko klatno

Matematičko klatno sastoji se od tačkaste mase *m* obješene na nerastegljivu vrlo laganu nit dužine *l*.



Matematičko klatno osciluje harmonijski samo za male amplitude, dok je, za veće amplitude, period klatna funkcija amplitude.

Jednadžba gibanja matematičkog klatna glasi:

$$F = ma_t = -mg\sin\theta \Rightarrow ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta.$$

U slučaju malih pomjeranja $\sin\theta \approx \theta$, pa jednačina ima oblik $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$, i predstavlja jednačinu harmoničnog titranja tako da ima rješenje: $\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Period matematičkog klatna za male amplitude: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Prigušene oscilacije

Prigušene oscilacije su one oscilacije kod kojih dolazi do gubitaka energije i prestanka titranja elastične opruge nakon određenog vremena.

Jednadžba gibanja za prigušene oscilacije: $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$, gdje je $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ **vlastita frekvencija** neprigušenog oscilatora, a δ **faktor prigušenja**.

Rješenje prethodne jednadžbe: $x(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

Brzina prigušenih oscilacija: $v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\delta e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi) + A\omega e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi)$

Ubrzanje prigušenih oscFilacija:

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = A\delta^2 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) - 2A\delta\omega e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) - A\omega^2 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) .$$

Amplituda $Ae^{-\delta t}$ opada eksponencijalno s vremenom; što je faktor prigušenja δ veći, to i amplituda brže trne.

Prisilne oscilacije. Rezonancija

Kada vanjska periodična sila djeluje na sistem koji može titrati, nastaje **prisilno titranje.**
Kada se ω približi vlastitoj frekvenciji sistema ω_0, dolazi do **rezonancije**, tj. titranja s vrlo velikim amplitudama.

Jednadžba gibanja prisilnog harmoničnog oscilatora: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_0 \sin \omega t \Rightarrow$

$\Rightarrow \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t = A_0 \sin \omega t$, gdje je A_0 **amplituda vanjskog oscilatora**.

Rješenje prethodne jednadžbe: $x(t) = A(\omega)\sin(\omega t - \varphi)$, gdje je φ **kašnjenje u fazi titranja** vanjskog oscilatora: $tg\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 \omega^2}$.

Amplituda prisilnog osciliranja: $A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$.

Amplituda osciliranja je maksimalna pri rezonantnoj frekvenciji: $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$.

Rezonantna frekvencija, u slučaju prigušenog oscilatora nešto je manja od vlastite frekvencije; rezonantna frekvencija neprigušenog oscilatora jednaka je vlastitoj frekvenciji.

Predavanje 8

MEHANIČKI VALOVI

Proces prostiranja oscilacija u prostoru naziva se **val ili talas**.
Longitudinalni val je takav val kod kojeg čestice osciliraju duž pravca prostiranja.
Transverzalni val je takav val kod kojeg čestice osciliraju u smjeru koji je okomit na pravac prostiranja vala.
Čestice koje jedna od druge stoje na rastojanju vT osciliraju u **istoj fazi**.
Rastojanje izmedu najbližih čestica koje osciliraju u istoj fazi naziva se **valna dužina**: $\lambda = v \cdot T$.
Geometrijsko mjesto tačaka do kojeg dolaze oscilacije u momentu vremena t naziva se **valni front.**
Geometrijsko mjesto tačaka koje osciliraju sa istom fazom naziva se **valna površina** (najjednostavnije su one koje imaju oblik ravni ili sfere).
Pravci duž kojih se šire oscilacije od tačke do tačke zovemo **zrakama vala** i one su okomite na valne površine.

Jednadžba ravnog i sfernog vala

Valna jednadžba je izraz koji daje pomjeranje ψ oscilirajuće tačke kao funkciju njenih koordinata *x*, *y*, *z* i vremena *t*, $\psi = \psi(x, y, z, t)$.
Funkcija **mora da bude periodična** kako u odnosu na vrijeme *t,* tako i u odnosu na koordinate *x*, *y*, *z*.

Jednadžba ravnog vala može se napisati u obliku: $\psi = A\cos\omega(t-\tau) = A\cos\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)$ (val se rasprostire u smjeru rasta x).
Brzina prostiranja vala jeste brzina pomjeranja faze, pa se zove **fazna brzina**.
Jednadžba ravnog vala može se napisati u obliku: $\psi = A\cos(\omega t \pm kx)$, gdje je k **valni broj**, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Veza između valnog broja, kružne frekvencije i fazne brzine: $v = \frac{\omega}{k}$.

Jednadžba sfernog vala ima oblik: $\psi = \frac{A}{r}\cos\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)$.

Jednadžba ravnog vala koji se prostire u proizvoljnom smjeru

Jednadžba ravnog vala koji se prostire u pravcu koji sa osama *x*, *y*, *z* obrazuje uglove α, β, γ: $\psi(x, y, z, t) = A\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$, gdje je $k_x = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha$, $k_y = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\beta$, $k_z = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\gamma$.
Jednadžba ravnog vala ponekad se piše i u obliku: $\psi = Ae^{i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)}$, pri čemu se koristi samo realni dio izraza.

Valna jednadžba

Jednadžba bilo kojeg vala je rješenje diferencijalne jednadžbe koju zovemo **valna jednadžba**.

Posmatrajmo ravni val u smjeru x-ose: $\psi(x,t) = \psi = A\cos(\omega t - kx)$.
Nađimo drugu parcijalnu derivaciju po koordinatama i vremenu:
$\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t - kx) = -\omega^2\psi$, $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -k^2 A\cos(\omega t - kx) = -k^2\psi$.
Iz prethodne dvije jednadžbe dobijamo valnu jednadžbu: $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \dfrac{k^2}{\omega^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \Rightarrow \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$.
Valna jednadžba u tri dimenzije ima oblik: $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$.

Brzina prostiranja elastičnih valova

Brzina longitudinalnih valova jednaka je kvadratnom korijenu iz Youngovog modula podijeljenog s gustoćom sredine: $v = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$.

Youngov modul: $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon} = \dfrac{F}{s \cdot \varepsilon}$, gdje je σ **normalno naprezanje**, a ε **srednja relativna deformacija**.

Brzina transverzalnih valova: $v = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$, gdje je G **modul smicanja**.

Energija elastičnog vala

Potencijalna energija vala: $E_p = \dfrac{E \cdot V}{2}\varepsilon^2$.

Izraz za **potencijalnu energiju elementarnog volumena**: $\Delta E_p = \dfrac{\rho v^2}{2}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 \Delta V$, gdje je $E = \rho v^2$ Youngov modul elastičnosti, a $\varepsilon = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ relativna deformacija.

Izraz za **kinetičku energiju elementarnog volumena**: $\Delta E_k = \dfrac{\rho\Delta V}{2}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2$, gdje je $\Delta m = \rho\Delta V$ masa i $v = \dfrac{\partial\psi}{\partial t}$ brzina datog elementa.

Ukupna energija: $\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = \dfrac{\Delta V\rho}{2}\left[\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right]$.

Gustoća energije: $\dfrac{\Delta E}{\Delta V} = u = \dfrac{\rho}{2}\left[\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right] = \dfrac{\rho}{2}A^2\omega^2 2\sin^2\omega\left(t - \dfrac{x}{v}\right)$.

Srednja vrijednost gustoće energije po volumenu: $\overline{u} = \frac{\rho}{2} A^2 \omega^2$.

Val sa sobom prenosi energiju.
Količina energije koju prenosi val kroz neku površinu u jedinici vremena naziva se **tok energije ili fluks** kroz površinu.

Gustoća toka energije: $\vec{j} = u \cdot \vec{v}$.

Srednja vrijednost vektora gustoće toka energije: $\vec{j}_{sr} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \vec{v}$.

Intenzitet vala jednak je srednjoj vrijednosti energije, koju val prenosi kroz jediničnu površinu u jedinici vremena, a to je skalarna vrijednost vektora $\vec{j}_{sr}$, tj. $I = \frac{1}{2} \rho v A^2 \omega^2$.

Interferencija valova

Ako se u sredini istovremeno prostire nekoliko valova, onda će oscilacije čestica sredine biti jednake geometrijskoj sumi oscilacija koje bi vršile čestice pri prostiranju svakog vala pojedinačno. Ovaj princip naziva se **princip superpozicije valova**.
U slučaju kada oscilacije, uvjetovane pojedinim valovima u svakoj tački sredine, imaju konstantnu razliku faza valovi se zovu **koherentni**. Pri slaganju koherentnih valova dolazi do pojave **interferencije**, koja se sastoji u tome da se oscilacije u jednim tačkama pojačavaju a u drugim slabe.

Maksimalno osciliranje dobivamo na mjestima gdje je razlika u fazi:
$k(r_2 - r_1) = \pm 2\pi n, n = 0,1,2,3,...$
Na tim mjestima oba osciliranja su u fazi i dobivamo tzv. **konstruktivnu interferenciju**, s amplitudom $A_1 + A_2 = 2A$.

U tačkama u kojima je razlika u fazi: $k(r_2 - r_1) = \pm 2\pi \left(n + \frac{1}{2} \right), n = 0,1,2,3,...$ dobivamo minimalno osciliranje, odnosno **destruktivnu interferenciju**, s amplitudom $A = |A_2 - A_1|$.

Navedeni uvjeti svode se na to da geometrijsko mjesto tačaka u kojima se oscilacije pojačavaju ili oslabljuju predstavlja porodicu hiperbola: $\vec{r_2} - \vec{r_1} = const.$

Difrakcija valova

Kada na svom kretanju valovi susretnu prepreku, oni je obilaze. Ta pojava naziva se **difrakcija**.
Nastajanje difrakcije može se objasniti pomoću **Huygensovog principa**: svaka tačka do koje dolazi valno kretanje, postaje centar sekundarnih valova koji su u homogenoj i izotropnoj sredini sferni.

Stojeći valovi

Kada imamo interferenciju dva ravna vala jednakih amplituda koji se kreću jedan nasuprot drugoga, oscilatorni proces koji pri tome nastaje naziva se **stojeći val**.

Jednačina stojećeg vala: $\psi = |2A \cos kx| \cos \omega t$.

U tačkama gdje je $x_{TR} = \pm n\frac{\lambda}{2}$, amplituda oscilacija dostiže maksimalnu vrijednost 2A (**trbusi** stojećeg vala).

U tačkama gdje je $x_{ČV} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$, amplituda oscilacija pretvara se u nulu (**čvorovi** stojećeg vala).

Refleksija valova

Kad val upada na granicu između dvije sredine, jedan dio energije vala se reflektira, a ostatak prelazi u drugu sredinu: od upadnog vala nastaje **reflektirani** (odbijeni) i **transmitirani** (propušteni) val.

Pri refleksiji na gušćoj sredini reflektirani val je pomaknut u fazi za π prema upadnom, dok **pri refleksiji na rjeđoj sredini** nema pomaka u fazi. Posebno, **pri refleksiji od čvrste prepreke** nema transmitiranog vala, reflektirani val ima istu amplitudu kao upadni ali je pomaknut u fazi za π; **pri refleksiji na slobodnom kraju** upadni i reflektirani val imaju jednake amplitude i faze. **Pri odbijanju talasa od ravne površine** upadni i odbojni ugao međusobno su jednaki.

Zakon odbijanja valova: Upadni ugao jednak je odbojnom uglu, a upadni zrak, normala i odbojni zrak leže u istoj ravni.

Refrakcija (prelamanje) valova

Zakon prelamanja valova: Odnos sinusa upadnog i prelomnog ugla jednak je odnosu brzina u te dvije sredine, a upadni zrak, normala i prelomni zrak leže u istoj ravni: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = n_{1.2}$, gdje je $n_{1.2}$ **indeks prelamanja** druge sredine u odnosu na prvu sredinu.

Predavanje 9

ZVUK

U fizici pod **zvukom** podrazumijevamo sve pojave vezane za mehaničke oscilacije čije se frekvencije kreću u granicama osjetljivost čula sluha.
Granica čujnosti nalazi se približno na 20 Hz i 20.000 Hz. Mehaničke oscilacije koje prelaze 20.000 Hz nazivaju se **ultrazvuk**, a oscilacije čija je frekvencija ispod 20 Hz nazivaju se **infrazvuk**.

Zvučni valovi

Zvučni valovi u gasovima i tečnostima mogu biti samo longitudinalni dok u čvrstim tijelima mogu biti i longitudinalni i transverzalni.

Promjena pritiska pri prostiranju longitudinalnog vala kroz plinovitu sredinu je sinusna funkcija: $\Delta p = -p_0 \sin(\omega t - kx)$.
Snaga koja se prenosi valom, jednaka je količini energije koju prenosi zvučni val u jedinici vremena kroz jediničnu površinu, normalnu na pravac prostiranja vala: $P = p_0 AS\omega \sin^2(\omega t - kx)$.
Srednja snaga proporcionalna je kvadratu amplitude promjene pritiska: $P_{SR} = \frac{1}{2}\frac{p_0^2}{\rho v}S = const \cdot p_0^2$.

Brzina zvučnih valova u plinovima

Brzina zvuka u plinovitoj sredini: $v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}$.

Uvrštavanjem $\rho = \frac{pM}{RT}$ u prethodni izraz dobivamo: $v = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}} = const\sqrt{T}$ (gdje je gdje je $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ odnos specifične toplote gasa pri stalnom pritisku i specifične toplote pri stalnoj zapremini, M - molekulska masa, R = 8,314. J/mol K, univerzalna plinska konstanta i T - apsolutna temperatura) ili $v = v_0\sqrt{\frac{T}{T_0}} = 331\sqrt{\frac{T}{273}}$ (gdje je v_0= 331 m/s, brzina zvuka u zraku na temperaturi T_0= 273 K).

Dopplerov efekat

Kada se zvučni izvor, ili slušalac, ili oboje kreću u odnosu na zrak, visina (frekvencija) zvuka koju čuje slušalac neće u općem slučaju biti ista kao kad bi izvor i slušalac mirovali. Ova pojava se naziva **Dopplerov efekat**. Ovisno o relativnoj brzini prema izvoru, promatrač će izmjeriti različitu frekvenciju izvora.

Dopplerov efekat formulom možemo prikazati na sljedeći način:

$$f_p = f_i \frac{u + v_p}{u - v_i},$$

gdje je v_p pozitivno ako se prijemnik približava izvoru, a negativno ako se prijemnik udaljava od izvora. Slično tome, brzina izvora v_i je pozitivna ako se izvor kreće u pravcu prijemnika a negativna ako se izvor udaljava od prijemnika. Pri tome pretpostavljamo da se izvor i prijemnik kreću duž pravca koji ih povezuje.

Specijalni slučajevi:

1. Posmatrač miruje, izvor se kreće prema posmatraču: $f_p = f_i \frac{u}{u - v_i}; f_p > f_i$,
2. Posmatrač miruje, izvor se kreće od posmatrača: $f_p = f_i \frac{u}{u + v_i}; f_p < f_i$,
3. Izvor miruje, posmatrač se kreće prema izvoru: $f_p = f_i \frac{u + v_p}{u}; f_p > f_i$,
4. Izvor miruje, posmatrač se kreće od izvora: $f_p = f_i \frac{u - v_p}{u}; f_p < f_i$.

U slučaju $u = v_i$ svi valovi se dodiruju u tački gdje se nalazi izvor. U toj tački nalazi se akumulirana oscilatorna energija i to je tzv. **zvučni zid**. Ako je $u < v_i$ dolazi do zvučne eksplozije.

Zvučni izvori

Svaki mehanički oscilator koji pravilno oscilira u opsegu frekvencije zvuka naziva se **zvučni izvor**. Kao najčešći zvučni izvori susreću se **zategnute žice i zračni stubovi**.

Zategnute žice osciliraju transverzalnim oscilacijama. Stojeći val će se formirati ako dužina žice iznosi: $l = n\frac{\lambda_n}{2}, n = 1,2,3,...$ Frekvencija je $f_n = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$. Za n=1 imamo **osnovni ton**.

Osciliranje zračnih stubova može se ostvariti u cijevima koje mogu biti otvorene na jednom kraju ili na oba kraja. Ako je cijev otvorena na jednom kraju, onda će se uvijek na otvorenom kraju formirati trbuh, a na zatvorenom čvor stojećeg vala. U zračnih stubovima mogu se obrazovati samo longitudinalni stojeći valovi.

Valna dužina zvuka u zatvorenim stubovima: $\lambda_n = \frac{4l}{2n+1}, (n = 0,1,2,...)$, a frekvencija: $f_n = \frac{2n+1}{4l} \cdot v$. Za otvorene stubove vrijedi da je $\lambda_n = \frac{2l}{n}$, pa je frekvencija: $f_n = \frac{n}{2l} \cdot v, (n = 1,2,3,...)$.

Osjećaj zvuka

Čovjek prima zvuk pomoću čula sluha, uha. Postojanje dva organa sluha omogućava čovjeku da ocijeni pravac prostiranja zvuka.
Kod subjektivnog osjećaja zvuka, razlikuju se tri njegove osobine: **visina, boja i intenzitet (jačina zvuka).** Svaki realni zvuk predstavlja superpoziciju harmoničnih oscilacija, koje se nalaze u danom zvuku, i naziva se **akustički spektar**. Ako se u zvuku nalaze oscilacije svih frekvencija u nekom intervalu od f' do f'', tada se spektar naziva **kontinuiran**. Ako se zvuk sastoji iz diskretnih oscilacija (odvojenih konačnim intervalima) sa frekvencijama $f_1, f_2, ...$ spektar se naziva **linijski.**

Jačina zvuka

Jačina ili intenzitet zvuka određuje se količinom energije koju prenosi val u jedinici vremena kroz površinu normalnu na pravac prostiranja vala: $I = \frac{P_{SR}}{S} = \frac{p_0^2}{2\rho v}$.

Jedinica intenziteta zvuka u SI sistemu je $\frac{W}{m^2}$.

Prema **Weber - Fechnerovom zakonu** čulo sluha osjećaja gradaciju jačine zvuka približno kao logaritam intenziteta zvuka. Zvučni val koji još može izazvati osjećaj zvuka mora imati minimalnu vrijednost I_o koja se naziva **prag čujnosti** i iznosi približno $10^{-12} \frac{W}{m^2}$ pri frekvenciji 1000 Hz.

Nivo jačine zvuka: $L = k \log \frac{I}{I_0}$, gdje je k koeficijent proporcionalnosti.

Stavljanjem $k=1$ nivo jačine je izražen u **belima** (B). Međutim, u praksi se koristi deset puta manja jedinica, **decibel** (dB): $L = 10 \log \frac{I}{I_0} = 20 \log \frac{p}{p_0}$.

Pri intenzitetima od 120 dB i više, uho prestaje da prima val kao zvuk i nastaje osjećaj bola ili pritiska (**prag osjećaja bola**).
Za subjektivnu jačinu zvuka uvedena je logaritamska skala sa jedinicom koja se zove **fon**.

Apsorpcija zvuka

Kada dođe na granicu između dvije sredine, zvučni val se u općem slučaju djelomično odbija od granice, a djelomično prodire u drugu sredinu i produžuje u njoj da se prostire. Val postepeno slabi pri prostiranju kroz danu sredinu i energija osciliranja prelazi u druge oblike energije.
Pri proračunu akustičkih osobina prostorija upotrebljava se vrijeme u toku koga se energija zvuka smanji na 10^{-6} dio prvobitne vrijednosti, tj. $W = 10^{-6} W_0$, ovo vrijeme se naziva **vrijeme reverberacije (jeke)**.
Gustoća zvučne energije opada sa vremenom po eksponencijalnom zakonu: $u = u_0 e^{-\alpha n t}$, gdje je u_0 gustoća zvučne energije u početnom trenutku, α koeficijent apsorpcije pri odbijanju, a n broj odbijanja u jedinici vremena.
Vrijeme reverberacije: $t_r = -\frac{4V}{\alpha v S} \ln 10^{-6}$. Stavljajući za $v = 340 \frac{m}{s}$ dobivamo: $t_r = 0{,}163 \frac{4V}{\alpha \cdot S}$.

Ultrazvuk

Za dobivanje ultrazvučnih valova koriste se uglavnom dva fizikalna efekta: **efekt magnetosrikcije** (feromagnetni materijali pri djelovanju promjenjivog magnetnog polja se lagano deformiraju) i **piezoelektrični efekt** (inverzni piezoelektrični efekt: pločice nekih metala pod djelovanjem električnog polja se deformiraju).

Osnovno svojstvo ultrazvuka po kojem se on razlikuje od zvuka je gotovo **pravolinijsko prostiranje**.
Energija ultrazvučnog vala visoke frekvencije je znatno veća od energije zvučnog vala niske frekvencije iste amplitude.
Značajna osobina, koja je bitna za korištenje ultrazvuka, je **mala apsorpcija pri prolazu ultrazvuka kroz čvrsta i tečna tijela**.
Sve primjene ultrazvuka u tečnostima zasnivaju se na djelovanju **kavitacije**, koja nastupa pri određenom intenzitetu. Pod kavitacijom u hidrodinamici se podrazumijeva obrazovanje mjehurića u fluidu, uslijed vrtloženja i zagrijavanja.