Дефиниција 1 *Нека је x било који реалан број. Са $\lfloor x \rfloor$ означићавамо највећи сео број m такав да је $m \leqslant x$.*

Очигледно за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1,$$

као и

$$\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$

за ма који цео број n.

Лема 1 *За ма који цео број m и природан број n важи*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{m+k}{n} \right\rfloor = m.$$

Доказ: Нека је

$$a_m = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{m+k}{n} \right\rfloor, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Очигледно је $a_0 = 0$, као и

$$a_{m+1} - a_m = \left\lfloor \frac{m+n}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m}{n} + 1 \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + 1 - \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor = 1.$$

Ово је могуће само у случају да је $a_m = m$ за све $m \in \mathbb{Z}$. QED

Ми ћемо претходну лему користити у посебном случају за $n = 2$. Наиме,

$$\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor = m$$

важи за свако $m \in \mathbb{Z}$. Ова једнакост се може записати и у следећим еквивалентним облицима:

$$m - \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor, \quad m - \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor.$$

Надаље ћ n бити произвољан фиксиран природан број.

Дефиниција 2 *Нека су $x, y \in \mathbb{Z}$ такви да важи*

$$0 \leqslant x \leqslant y < n.$$

Дефинишимо функције u, v, f на следећи начин:

$$u(x,y) = \begin{cases} y - x, & y - x \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\ \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - x, & y - x > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \end{cases} \qquad v(x,y) = \begin{cases} x, & y - x \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\ y, & y - x > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \end{cases}$$

$$f(x,y) = n \cdot u(x,y) + v(x,y).$$

Став 1 *Нека су $x, y \in \mathbb{Z}$ такви да важи*

$$0 \leqslant x \leqslant y < n.$$

Тада важи

$$0 \leqslant f(x,y) < \frac{n(n+1)}{2}, \quad 0 \leqslant u(x,y), \quad 0 \leqslant v(x,y) < n.$$

Такође, $y - x \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ је еквивалентно са $u(x,y) + v(x,y) < n$.

Доказ:

Случај $y-x \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$: Очигледно је

$$u(x,y) = y-x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant v(x,y) = x < n.$$

$$u(x,y)+v(x,y) = (y-x)+x = y < n.$$

Са друге стране је

$$\begin{aligned} 0 \leqslant f(x,y) &= n(y-x)+x = (n-1)(y-x)+y-x+x = (n-1)(y-x)+y \\ &\leqslant (n-1)\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n - 1 = (n-1)\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) \leqslant (n-1)\left(\frac{n}{2}+1\right) \\ &= \frac{(n-1)(n+2)}{2} = \frac{n^2+n-2}{2} < \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Случај $y-x > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$: Обзиром да су $y-x$ и $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ цели бројеви, из услова $y-x > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ следи да је

$$y-x \geqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Одавде следи да је

$$x \leqslant y - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \leqslant n-1-\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 = n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2 = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 2 = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 1,$$

па је свакако

$$u(x,y) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - x \geqslant 1.$$

Очигледно је

$$0 \leqslant v(x,y) = y < n.$$

Такође, важи

$$u(x,y)+v(x,y) = \left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - x\right) + y = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + (y-x) \geqslant \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 = (n-1)+1 = n.$$

Напокон, закључујемо да је

$$0 \leqslant f(x,y) = n\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - x\right) + y < n\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + n \leqslant n\frac{n-1}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

QED

Дефиниција 3 *Нека је $k \in \mathbb{Z}$ такав да је*

$$0 \leqslant k < \frac{n(n+1)}{2}.$$

Дефинишимо функције s_1, s_2, X, Y на следећи начин:

$$s_1(k) = \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor, \quad s_2(k) = k - \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor,$$

$$X(k) = \begin{cases} s_2(k), & s_1(k)+s_2(k) < n, \\ \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - s_1(k), & s_1(k)+s_2(k) \geqslant n, \end{cases} \qquad Y(k) = \begin{cases} s_1(k)+s_2(k), & s_1(k)+s_2(k) < n, \\ s_2(k), & s_1(k)+s_2(k) \geqslant n. \end{cases}$$

Теорема 1 *За ма које целе бројеве* x, y *за које је* $0 \leqslant x \leqslant y < n$ *важи*

$$X(f(x,y)) = x, \quad Y(f(x,y)) = y.$$

Такође, за ма који цео број k *за који је* $0 \leqslant k < \frac{n(n+1)}{2}$ *важи*

$$f(X(k), Y(k)) = k.$$

Доказ: Нека су x, y цели бројеви за које је $0 \leqslant x \leqslant y < n$. Обзиром да је $u(x,y) \geqslant 0$, $0 \leqslant v(x,y) < n$ и $f(x,y) = n \cdot u(x,y) + v(x,y)$, важи

$$s_1(f(x,y)) = u(x,y), \quad s_2(f(x,y)) = v(x,y).$$

У случају да је $y - x < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ важи

$$s_1(f(x,y)) + s_2(f(x,y)) = u(x,y) + v(x,y) < n,$$

а самим тим и

$$X(f(x,y)) = s_2(f(x,y)) = v(x,y) = x, \quad Y(f(x,y)) = s_1(f(x,y)) + s_2(f(x,y)) = u(x,y) + v(x,y) = y.$$

У случају да је $y - x \geqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ важи

$$s_1(f(x,y)) + s_2(f(x,y)) = u(x,y) + v(x,y) \geqslant n,$$

а самим тим и

$$X(f(x,y)) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - s_1(f(x,y)) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - v(x,y) = x, \quad Y(f(x,y)) = s_2(f(x,y)) = v(x,y) = y.$$

Функција f је пресликавање скупа A у скуп B, где је

$$A = \{(x,y) \,:\, x, y \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant x \leqslant y < n\}, \quad B = \{k \in \mathbb{Z} \,:\, 0 \leqslant k < n(n+1)/2\}.$$

Дефинишимо пресликавање $Z : B \longrightarrow A$ са

$$Z(k) = (X(k), Y(k)).$$

Управо смо доказали да је $Z \circ f$ идентитет на скупу A, па самим тим и инјекција. Одатле следи да је f инјекција. Обзиром да су скупови A и B коначни и са истим бројем елемената и да је f пресликава скуп A у скуп B инјективно, функција f је такође бијекција, па постоји инверына функција f^{-1}. Отуда је

$$f^{-1} = id_A \circ f^{-1} = Z \circ f \circ f^{-1} = Z \circ id_B = Z,$$

чиме је и последњи део теореме доказан. QED