Нека је $\mathcal{L}$ језик првога реда и $T$ теорија првога реда језика $\mathcal{L}$. Претпоставимо да је $\mathcal{L}^*$ језик првога реда који се разликује од језика $\mathcal{L}$ само по томе што садржи функцијски знак $f$ дужине $n+1$ кога нема у језику $\mathcal{L}$. Претпоставимо њош да је $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ формула језика $\mathcal{L}$ таква да је формула

$$\forall x_1 \ldots x_n \exists y \varphi(x_1, \ldots, x_n, y) \tag{1}$$

теорема теорије $T$. Са $T^*$ означимо теорију првог реда језика $\mathcal{L}^*$ која се од теорије $T$ разликује само по томе што има додатну аксиому

$$\forall x_1 \ldots x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)).$$

Тада за ма коју реченицу $\theta$ језика $\mathcal{L}$ важи: $\theta$ је доказиво у теорији $T$ ако и само ако је доказиво у теорији $T^*$.

Заиста, ако је $\theta$ доказиво у $T$, тим пре је доказиво и у $T^*$, јер теорија $T^*$ има све аксиоме које има и теорија $T$. Обрнуто, нека $\theta$ није доказиво у теорији $T$. Тада постоји модел $\mathbb{M}$ теорије $T$ у којој важи $\neg\theta$. Пошто у моделу $\mathbb{M}$ важе аксиоме теорије $T$ у моделу $\mathbb{M}$ важиће и формула (1). Отуда за ма које $a_1, \ldots, a_n$ из скупа носача $M$ модела $\mathbb{M}$ постоји $b$ из $M$ такво да у моделу $\mathbb{M}$ важи формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ при валуацији $v$ за коју је $v(x_i) = a_i$ и $v(y) = b$. Дакле, постоји функција $g : M^n \longrightarrow M$ таква да за ма које $a_1, \ldots, a_n \in M$ и $b = g(a_1, \ldots, a_n)$ у моделу $\mathbb{M}$ важи формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ при валуацији $v$ за коју је $v(x_i) = a_i$ и $v(y) = b$. Ако функцијски симбол $f$ интерпретирамо као функцију $g$, добијамо модел $\mathbb{M}^*$ теорије $T^*$ у коме још важи и $\neg\theta$, Стога $\theta$ није теорема теорије $T^*$.

Пређимо сада на теорију скупова $ZF$ без аксиоме избора и "докажимо" да је аксиома избора њена теорема. Формула

$$\forall x \exists y (((\exists z) z \in x) \Rightarrow y \in x)$$

је ваљана, па је као таква теорема било које теорије језика $\mathcal{L}_{ZF}$, па и теорије $ZF$. Нека је $ZF^*$ теорија која од аксиома има све аксиоме теорије $ZF$ и још аксиому

$$\forall x (((\exists z)(z \in x)) \Rightarrow f(x) \in x).$$

Према претходном, довољно је да докажемо да је аксиома избора теорема теорије $ZF^*$.

Нека је $x$ ма који скуп чији су сви елементи непразни и дисјунктни скупови. Према аксиоми замене постоји скуп $A = \{f(y) : y \in x\}$. За ма које $y \in x$ важи $f(y) \in y$, па $f(y) \in A \cap y$. Са друге стране, ако $z \in A \cap y$, онда је $z = f(y')$ за неко $y' \in x$. Но, због $f(y') \in y'$ важи $z \in y \cap y'$, па је због међусобне дисјунктности елемената скупа $x$ важи $y = y'$ и самим тим $z = f(y)$, одакле је коначно $A \cap y = \{f(y)\}$.

Дакле, доказали смо да за ма који скуп $x$ чији су сви елементи непразни дисјунктни подскупови постоји скуп $A$ који са сваким елементом скупа $x$ има тачно један заједнички елемент.

Где је грешка?