

Verovatnoća i statistika (ABC smerovi)

15. januar 2001.

1. U džepu se nalazi n ključeva od kojih je samo jedan pravi. Prilikom otvaranja vrata se slučajno bira ključ i ako ne otvara vrata, on se

- (a) ne vraća nazad u džep.
- (b) vraća nazad u džep.

Naći raspodelu slučajne promenljive X koja predstavlja broj pokušaja do otvaranja vrata.

2. Slučajna promenljiva X ima Košijevu raspodelu datu funkcijom gustine

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Naći funkciju raspodele za slučajnu promenljivu Y koja je data sa

$$Y = \begin{cases} 1 - X^2, & X \leq 2 \\ \frac{3}{2}X - 6, & X > 2 \end{cases}.$$

3. Data je slučajna promenljiva X koja ima χ_n^2 raspodelu.

- (a) Dokazati da niz slučajnih promenljivih

$$Y_n = \frac{X - n}{\sqrt{2n}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

konvergira ka slučajnoj promenljivoj Z^* koja ima normalnu $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelu.

- (b) Izračunati verovatnoću $P\{\chi_{50}^2 \geq 45, 9\}$.

4. Neka je uzet uzorak obima n iz populacije sa uniformnom raspodelom $\mathcal{U}((0, a))$, $a > 0$.

- (a) Ispitati da li je statistika $\hat{a}_n = \frac{n+1}{n} \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ centrirana ocena parametra a .
- (b) Pokazati da je \hat{a}_n postojana ocena parametra a .
- (c) Naći disperziju slučajne promenljive $2\bar{X}_n$ (\bar{X}_n je aritmetička sredina uzorka). Da li je statistika $2\bar{X}_n$ efikasnija od statistike \hat{a}_n ?

5. Broj prodatih knjiga u toku jednog dana registrovan je u knjižari u periodu od 500 dana. Dobijeni su sledeći rezultati:

x_i	0	1	2	3	4	5	6 i više
f_i	200	186	85	23	5	1	0

x_i —broj prodatih knjiga u toku jednog dana, f_i —frekvencija dana sa x_i prodatih knjiga.

Sa pragom značajnosti $\alpha = 0,05$ testirati hipotezu da je broj prodatih knjiga u toku jednog dana slučajna promenljiva koja ima Poasonovu raspodelu.