Извођење Лоренцових трансформација

Недељко Стефановић

12. IX 2007.

Нека су S, S'' и S'' синхронизовани (што ће се убудуће подразумевати) референтни системи са истим смером протицања времена (што ћемо такође убудуће подразумевати), при чему S и S' имају исту орјентацију x-осе, а S'' супротну орјентацију x осе у односу на њих. Нека се они налазе у међусобном равномерном праволинијском кретању. Услов да је кретање равномерно и праволинијско значи да су њихове просторвременске координате повезане линеарним трансформацијама.

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta t' + p, \\ t &= \gamma x' + \delta t' + q. \end{aligned} \tag{1}$$

Услов синхронизованости значи да је

$$(x = 0 \wedge t = 0) \Leftrightarrow (x' = 0 \wedge t' = 0),$$

односно $p = q = 0$, па се једначине (1) своде на

$$\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \tag{2}$$

при чему A мора бити инверзибилна матрица да би постојала и обрнута трансформација.

Претпоставимо још да се систем S'' креће у систему S истом брзином, али у супротном смеру. Пошто су сви смерови равноправни, координате система S и S'' морају бити повезане једначинама

$$\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = DA \begin{bmatrix} x'' \\ t'' \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Пишући X уместо $[x\ t]^T$, X' уместо $[x'\ t']^T$ и X'' уместо $[x''\ t'']^T$ и узимајући у обзир да је $D^{-1} = D$, добијамо да је

$$X' = A^{-1}DX = A^{-1}DAX'', \quad X'' = A^{-1}X = A^{-1}DAX',$$

односно

$$X' = BX'', \quad X'' = BX', \quad B = A^{-1}DA. \tag{4}$$

Из особина трага и детерминанте матрице добијамо да је

$$\begin{gathered} \mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}((A^{-1}D)A) = \mathrm{Tr}(A(A^{-1}D)) = \mathrm{Tr}(D) = 0, \\ \det(B) = \det(A^{-1}AD) = \det(A^{-1})\det(D)\det(A) = -\det(A)^{-1}\det(A) = (-1). \end{gathered} \tag{5}$$

Стога матрица B мора имати облик

$$B = \begin{bmatrix} a & -b \\ c & -a \end{bmatrix}, \tag{6}$$

за неке вредности a, b, c за које је $bc = a^2 - 1$ (због услова $\det(B) = (-1)$). Ако би било $a = 0$, онда не би време могло да протиче само у једном смеру, а да се просторна координата може мењати у оба смера. Зато, нека је $a \neq 0$.

Нека је S''' систем који се од S'' разликује само по томе што има обрнут смер x-осе. Дакле, уз ознаку $X''' = [x''' \;\; t''']^T$ нека је

$$X'' = DX'''.$$

Тада је

$$X' = BX'' = CX''', \quad C = BD = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}.$$

Ако нека тачка мирује у систему S''', то јест, важи $dx''' = 0$, онда је

$$dx' = b\,dt''', \quad dt' = a\,dt''',$$

па је брзина те тачке у систему S' једнака

$$v = \frac{dx'}{dt'} = \frac{b}{a},$$

односно, узимајући у обзир да је $bc = a^2 - 1$ и $a \neq 0$

$$b = av, \quad c = \frac{a^2 - 1}{av}.$$

Стога, матрица C преласка са координата система S''' на координате система S' има облик

$$C = \begin{bmatrix} a & av \\ \frac{a^2-1}{av} & a \end{bmatrix}.$$

Опет, због равноправности смерова, величина a може зависити само од брзине v кретања система S''' у систему S'.

Брзина v је са друге стране, функција само брзине кретања система S' у систему S (односно система S'' у систему S у супротном смеру. Претпоставили смо да су те брзине исте), непрекидно зависи од ње, већа је од ње и када је она блиска нули и брзина v је блиска нули. То значи да v може бити било која брзина из интервала $(-V, V)$, ако је V такво да је свака од брзина из тог интервала могућа брзина узајамног кретања два референтна система.

Ако бисмо одредили функцију $a(v)$, знали бисмо општи облик трансформације координата између два референтна система исте орјентације x оса, који се узајамно крећу равномерно и праволинијски.

Нека је v' било која "допустива" брзина. Можемо замислити неке координатне системе S_1, S_2, S_3 исте орјентације x оса, при чему је брзина кретања система S_2 у систему S_1 једнака v, система S_3 у систему v' и система S_3 у систему S_1. Под тим претпоставкама уз ознаке $a = a(v)$, $a' = a(v')$ и $a'' = a(v'')$ важи

$$\begin{bmatrix} a'' & a''v'' \\ \frac{a''^2-1}{a''v''} & a'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & a'v' \\ \frac{a'^2-1}{a'v'} & a' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & av \\ \frac{a^2-1}{av} & a \end{bmatrix}$$

односно

$$\begin{bmatrix} a'' & a''v'' \\ \frac{a''^2-1}{a''v''} & a'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + \frac{a'v'(a^2-1)}{av} & aa'(v+v') \\ \frac{(a'^2-1)a}{a'v'} + \frac{(a^2-1)a'}{av} & aa' + \frac{av(a'^2-1)}{a'v'} \end{bmatrix}.$$

Пошто је

$$aa' + \frac{a'v'(a^2-1)}{av} = a'' = aa' + \frac{av(a'^2-1)}{a'v'}$$

важи

$$\frac{a'v'(a^2-1)}{av} = \frac{av(a'^2-1)}{a'v'},$$

односно

$$\frac{(a(v))^2-1}{(a(v)v)^2} = \frac{(a'(v'))^2-1}{(a'(v')v')^2}.$$

Пошто горња једнакост важи за ма које допустиве брзине v и v', постоји константа K таква да је

$$\frac{(a(v))^2-1}{(a(v)v)^2} = K,$$

за ма коју допустиву брзину v или еквивалентно

$$(a(v))^2 = \frac{1}{1-Kv^2}.$$

Услов да координатни системи имају исту орјентацију x оса се своди на $a(v) > 0$, одакле следи

$$a(v) = \frac{1}{\sqrt{1-Kv^2}},$$

па се матрица C своди на матрицу

$$T(v) = \frac{1}{\sqrt{1-Kv^2}} \begin{bmatrix} 1 & v \\ Kv & 1 \end{bmatrix}.$$

Нека је $v_1 * v_2 = \frac{v_1+v_2}{1+Kv_1v_2}$. Лако се проверава да је

$$T(v_1)T(v_2) = T(v_1 * v_2), \quad v * 0 = v, \quad v * (-v) = 0,$$

као и да је $T(0)$ јединична матрица, одакле следи да је скуп свих матрица облика $T(v)$ група. Међутим, ту ипак постоји једна "замка". Ако је $K < 0$, онда брзина $v = (-K)^{-1/2}$ није допустива, јер би у супротном допустива брзина $v * v$ била недефинисана. Стога, скуп допустивих брзина у том случају мора бити интервал са крајевима $-V$ и V за неко $V \in (0, (-K)^{-1/2})$. Међутим, ниједан од таквих скупова не може бити затворен за операцију $*$ јер за $K < 0$ и $|v| < (-K)^{-1/2}$ важи $v * v > 2v$. Стога, скуп свих матрица облика $T(v)$ за вредности v из неког скупа који обухвата барем једну околину нуле не може бити група. Стога је $K \geqslant 0$.

За $K = 0$ добијају се Галилејеве трансформације, а за $K > 0$ и $c = K^{-1/2}$ Лоренцове. У првом случају је скуп свих допустивих брыина неограничен, а у другом је интервал $(-c, c)$.