ALGEBRA 1 **septembar 2005.**

$\boxed{\textbf{A}}$ Neka je $S_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$ i $A_{a,b} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

A1. Dokazati da je skup

$$G = \{A_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0\}$$

grupa u odnosu na množenje matrica.

A2. Dokazati da je

$$H = \{S_\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$$

jedna normalna podgrupa grupe G.

A3. Prvo dokazati da je $S_\theta S_\omega = S_{\theta+\omega}$, a zatim odrediti S_θ^n za $n \in \mathbb{N}$.

A4. Dokazati da za svaki prirodan broj n podgrupa H ima bar jedan element reda n.

$\boxed{\textbf{B}}$

B1. Ako su H i K normalne podgrupe grupe G dokazati da je i HK normalna podgrupa grupe G.

B2. Ako je G grupa reda 140 prvo dokazati da ona ima normalne podgrupe A i B reda 5 i 7, a zatim da ima i bar jednu normalnu podgrupu H reda 35.

B3. Dokazati da uočena grupa G ima bar jednu normalnu podgrupu reda 70.

B4. Da li je grupa G/H komutativna? Dokazati da podgrupa H sadrži izvod G' grupe G.

$\boxed{\textbf{C}}$ Neka je $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p$ polje ostataka po modulu prostog broja p. Dokazati da u $\mathbb{F}$ važi:

C1. $\binom{p-1}{k} = (-1)^k$;

C2. $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{p-1} \in \{0, 1\}$;

C3. Preslikavanje $f : \mathbb{F} \mapsto \mathbb{F}$ definisano sa $f(x) = x^p$ je automorfizam polja $\mathbb{F}$.

$\boxed{\textbf{D}}$ Dati su brojevi $a = \sqrt[3]{2}$ i $b = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$.

D1. Dokazati da su ovi brojevi algebarski nad poljem $\mathbb{Q}$ i odrediti njihove minimalne polinome nad poljem $\mathbb{Q}$.

D2. Dokazati da je $\mathbb{Q}(a) = \mathbb{Q}(a, b)$ i odrediti $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$.

D3. Element $\dfrac{1}{b}$ izraziti u obliku $q(a)$, gde je $q \in \mathbb{Q}[X]$ i $\deg q < 3$.