CHAPTER 5

DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA I TEORIJA RELATIVNOSTI

U ovom poglavlju ispituju se neka osnovna svojstva krivih i površi. U svakoj tački prostorne krive može se konstruisati pokretni koordinatni sistem koji se sastoji od tangentnog vektora, normalnog vektora i vektora binormale koji je upravan i na tangentni i na normalni vektor. Praćenjem promena ovih vektora duž prostorne krive dolazi se do pojmova krivine i torzije prostorne krive. Krivina je mera promene tangentnog vektora na krivu, a torzija je mera izvijanja krive izvan ravni. Ustanovljava se da prave linije imaju krivinu nula, a ravanske krive imaju torziju nula.

Slično, svakoj glatkoj površi pridružuje se dve površinske koordinatne krive i normalni površinski vektor kroz svaku tačku na površi. Površinske koordinatne krive imaju tangentne vektore koji zajedno sa normalnim površinskim vektorom čine skup baznih vektora. Pomoću ovih vektora definišu se dvodimenzijska površinska metrika i jedan tenzor drugog reda tzv. tenzor krivine. Koordinatne krive imaju tangentne vektore koji zajedno sa površinskom normalom čine koordinatni sistem u svakoj tački površi. Promena ovih površinskih vektora dovodi do pojmova dve različite krivine: normalne krivine i tangentne krivine (geodezijske krivine). Predmet diferencijalne geometrije su relacije koje povezuju ove krivine sa tenzorom krivine, Riman-

Tenzorski račun i mehanika koninuuma, Prvo izdanje. By Branislav S. Bačlić
ISBN x-xxx-xxxxx-x

Kristofelovim tenzorom, kao i druge zanimljive relacije između različitih površinskih vektora i krivina.

U ovom poglavlju dat je kratak uvod u teoriju relativnosti gde se opet pojavljuje Riman-Kristofelov tenzor. Svojstva ovog važnog tenzora razmatraju se zadacima na kraju poglavlja.

5.1 PROSTORNE KRIVE I KRIVINA

Za trodimenzijsku prostornu krivu $x^i = x^i(s)$, $i = 1, 2, 3$, u Rimanovom prostoru V_n sa metričkim tenzorom g_{ij}, i parametrom dužine luka s, vektor $T^i = \frac{dx^i}{ds}$ je tangentni vektor na tu krivu u tački P na krivoj. Vektor T^i je jedinični jer je

$$g_{ij}T^iT^j = g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 1. \tag{5.1}$$

Apsolutnim diferenciranjem relacije (5.1) po dužini dobija se

$$g_{ij}T^i\frac{\delta T^j}{\delta s} + g_{ij}\frac{\delta T^i}{\delta s}T^j = 0, \tag{5.2}$$

što implicira da je

$$g^{ij}T^j\frac{\delta T^i}{\delta s} = 0. \tag{5.3}$$

Otud je vektor $\frac{\delta T^i}{\delta s}$ upravan na tangentni vektor T^i. Ako se definiše jedinični normalni vektor N^i na prostornu krivu u istom pravcu kao i vektor $\frac{\delta T^i}{\delta s}$ i napiše

$$N^i = \frac{1}{\kappa}\frac{\delta T^i}{\delta s} \tag{5.4}$$

gde κ ima ulogu faktora razmere i naziva se krivina, te izabere tako da je

$$g_{ij}N^iN^j = 1 \quad \text{što implicira} \quad g_{ij}\frac{\delta T^i}{\delta s}\frac{\delta T^j}{\delta s} = \kappa^2. \tag{5.5}$$

Recipročna vrednost krivine naziva se radijus krivine. Krivina meri brzinu promene tangentnog vektora na krivu sa promenom dužine luka. Apsolutnim diferenciranjem relacije $g_{ij}T^iN^j = 0$ po dužini luka s, nalazi se

$$g_{ij}T^i\frac{\delta N^j}{\delta s} + g_{ij}\frac{\delta T^i}{\delta s}N^j = 0. \tag{5.6}$$

Posledično, krivina se može odrediti iz relacije

$$g_{ij}T^i\frac{\delta N^j}{\delta s} = -g_{ij}\frac{\delta T^i}{\delta s}N^j = -g_{ij}\kappa N^iN^j = -\kappa \tag{5.7}$$

koja definiše znak krivine. Slično, apsolutnim diferenciranjem relacije (5.5) nalazi se da je

$$g_{ij}N^i\frac{\delta N^j}{\delta s}=0. \tag{5.8}$$

Ova jednačina pokazuje da je vektor $\frac{\delta N^j}{\delta s}$ upravan na jedinični normalu N^i. Jednačina (5.3) pokazuje da je T^i takođe upravan na N^i i zato će i svaka linearna kombinacija ovih vektora biti upravna na N^i. Jedinični vektor binormale definiše se izborom linearne kombinacije

$$\frac{\delta N^j}{\delta s}+\kappa T^j \tag{5.9}$$

te zatim razmerava na jedinični vektor definisanjem

$$B^j=\frac{1}{\tau}\left(\frac{\delta N^j}{\delta s}+\kappa T^j\right) \tag{5.10}$$

gde se skalar τ naziva torzija. Znak od τ bira se tako da vektori T^i, N^i i B^i čine desni sistem sa $\varepsilon_{ijk}T^iN^jB^k=1$, a magnituda od τ se bira tako da je B^i jedinični vektor koji zadovoljava

$$g_{ij}B^iB^j=1. \tag{5.11}$$

Trijada vektora T^i, N^i, B^i u tački na krivoj formira tri ravni. Ravan koja sadrži T^i i B^i naziva se *rektifikaciona ravan*. Ravan koja sadrži N^i i B^i naziva se *normalna ravan*. Ravan koja sadrži T^i i N^i naziva se *oskulatorna ravan*. Recipročna vrednost torzije naziva se radijus torzije. Torzija meri brzinu promene oskulatorne ravni. Vektori T^i, N^i i B^i formiraju desni ortogonalni sistem u tački na prostornoj krivoj i zadovoljavaju relaciju

$$B^i=\varepsilon^{ijk}T_jN_k. \tag{5.12}$$

Pomoću jednačine (5.10) može se pokazati da je B^i upravno i na vektor T^i i na vektor N^i jer je

$$g_{ij}B^iT^j=0 \quad \text{i} \quad g_{ij}B^iN^j=0.$$

Ostavlja se čitaocu za vežbu da pokaže da vektor binormale B^i zadovoljava relaciju $\frac{\delta B^i}{\delta s}=-\tau N^i$. Tri relacije

$$\begin{aligned}\frac{\delta T^i}{\delta s}&=\kappa N^i\\ \frac{\delta N^i}{\delta s}&=\tau B^i-\kappa T^i\\ \frac{\delta B^i}{\delta s}&=-\tau N^i\end{aligned} \tag{5.13}$$

su poznate Frenet-Serret-ove formule u diferencijalnoj geometriji.

5.2 POVRŠI I KRIVINA

Ovde će se proučiti površi u Dekartovom koordinatnom sistemu, a nakon toga će se rezultati uopštiti na druge koordinatne sisteme. Površ u trodimenzijskom euklidskom prostoru mogu se definisati na nekoliko različitih načina: eksplicitno kao $z = f(x, y)$, implicitno kao $F(x, y, z) = 0$ ili parametarski skupom parametarskih jednačina oblika

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

koji sadrži dva nezavisna parametra u, v koji se nazivaju *površinske koordinate*. Na primer, jednačine

$$x = a \sin\theta \cos\phi, \quad y = a \sin\theta \sin\phi, \quad z = a \cos\theta$$

su parametarske jednačine koje definišu sfernu površ poluprečnika a sa parametrima $u = \theta$ i $v = \phi$ (videti sliku 3.33. u trećem poglavlju). Eliminisanjem parametara u, v može se izvesti implicitni oblik zapisa površi, a rešavanjem po z dobija se eksplicitni oblik zapisa površi. Pomoću parametarskog zapisa može se definisati vektor položaja tačke na površi. Vektor položaja se tada zapisuje preko parametara u, v kao

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\hat{\mathbf{e}}_1 + y(u, v)\hat{\mathbf{e}}_2 + z(u, v)\hat{\mathbf{e}}_3. \tag{5.14}$$

Koordinate (u, v) se nazivaju krivolinijske koordinate tačke na površi. Smatra se da su funkcije $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ realne i diferencijabilne tako da je $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \neq 0$. Krive

$$\vec{r}(u, c_2) \quad \text{i} \quad \vec{r}(c_1, v) \tag{5.15}$$

sa konstanama c_1 i c_2 definišu dve površinske krive tzv. koordinatne krive, koje se seku na površinski koordinatama (c_1, c_2). Familija krivih definisanih jednačinama (5.15) sa ekvidistantnim vrednostima konstanti c_i, $c_i + \Delta c_i$, $c_i + 2\Delta c_i$, ... definiše površinsku koordinatnu mrežu. Vektori $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ i $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ na površi uzeti na površinskim koordinatama (c_1, c_2) su tangentni vektori na koordinatne krive u toj tački i vektori su prirodne baze za svaki vektor koji leži na površi. Stavljanjem $(x, y, z) = (y^1, y^2, y^3)$ i $(u, v) = (u^1, u^2)$ vektor položaja se može zapisati preko konvencije o sabiranju u obliku

$$\vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2) = y^i(u^1, u^2)\hat{\mathbf{e}}_i. \tag{5.16}$$

Tangentni vektori na koordinatne krive u tački P mogu se tada prikazati kao vektori baze

$$\vec{E}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\hat{\mathbf{e}}_i, \quad \alpha = 1, 2 \tag{5.17}$$

gde su parcijalni izvodi uzeti u tački P gde se na površi seku koordinatne krive. Pomoću ovih vektora baze može se konstruisati jedinični vektor normale na površ u tački P putem izračunavanjem vektorskog proizvoda tangentnih vektora $\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ i $\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$. Jedinična normala je tada

$$\hat{n} = \hat{n}(u,v) = \frac{\vec{E}_1 \times \vec{E}_2}{\left|\vec{E}_1 \times \vec{E}_2\right|} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \tag{5.18}$$

i takva je da vektori $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ i $\hat{n}$ čine desni koordinatni sistem.

Ako se izvrši transformacija iz jednog skupa krivolinijskih koordinata (u,v) u drugi skup $(\bar{u},\bar{v})$, preko transformacionih zakona

$$u = u(\bar{u},\bar{v}), \quad v = v(\bar{u},\bar{v}),$$

jednačina površi postaje

$$\vec{r} = \vec{r}(\bar{u},\bar{v}) = x(u(\bar{u},\bar{v}),v(\bar{u},\bar{v}))\hat{\mathbf{e}}_1 + y(u(\bar{u},\bar{v}),v(\bar{u},\bar{v}))\hat{\mathbf{e}}_2 + z(u(\bar{u},\bar{v}),v(\bar{u},\bar{v}))\hat{\mathbf{e}}_3$$

a tangentni vektori na nove koordinatne krive su

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \quad \text{i} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}}.$$

U indeksnoj notaciji ovaj rezultat se može zapisati kao

$$\frac{\partial y^i}{\partial \bar{u}^\alpha} = \frac{\partial y^i}{\partial u^\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha}.$$

što je zakon transformacije dvaju sistema baznih vektora na površi.

Kriva na površi se definiše relacijom $f(u,v) = 0$ među krivolinijskim koordinatama. Alternativni način zapisa krive na površi je zadavanjem parametarskih relacija $u = u(t)$ i $v = v(t)$ u kojima je t parametar. Vektor

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

je tangentan na krivu na površi.

Element kvadrata dužine luka u površinskim koordinatama je

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\beta} du^\alpha du^\beta = a_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \tag{5.19}$$

gde $a_{\alpha\beta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\beta}, \alpha, \beta = 1,2$ definiše površinsku metriku. Ovaj element dužine luka na površi piše se često kao kvadratna forma

$$A = ds^2 = E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2 = \frac{1}{E}(Edu + Fdv)^2 + \frac{EG - F^2}{E} dv^2 \tag{5.20}$$

i naziva se *prva osnovna forma* površi. Zapaziti da je potrebno da veličine E i $EG - F^2$ moraju biti pozitivni da bi ds^2 bilo pozitivno definitno.

Površinska metrika dvodimenzijske površi definisana je sa

$$a_{\alpha\beta} = \vec{E} \cdot \vec{E} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\beta} = \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial yi}{\partial u^\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \tag{5.21}$$

sa konjugovanim metričkim tenzorom $a^{\alpha\beta}$ definisanim tako da je $a^{\alpha\beta} a_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$. Površ je u trodimenzijskom prostoru sa metrikom g_{ij}, a $a_{\alpha\beta}$ je dvodimenzijska površinska metrika. Veličine E, F, G u jednačini (5.20) su funkcije površinskih koordinata u, v i određene su relacijama

$$\begin{aligned} E = a_{11} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial y^i}{\partial u^1} \frac{\partial y^i}{\partial u^1} \\ F = a_{12} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial y^i}{\partial u^1} \frac{\partial y^i}{\partial u^2} \\ G = a_{22} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial y^i}{\partial u^2} \frac{\partial y_i}{\partial u^2} \end{aligned} \tag{5.22}$$

Ovde je i na dalje usvojeno da su indeksi pisani grčkim slovima primaju vrednosti 1 i 2, a indeksi pisani slovima latinice vrednosti 1,2,3.

Neka se u nekoj tački P na površi konstruiše jedinični normalni vektor $\hat{n}$ i ravan koja sadrži taj vektor. Zapaziti da postoji beskrajan broj ravni koje sadrže takvu jediničnu površinsku normalu. Za početak bira se samo jedna od takvih ravni, a kasnije će se razmotriti skup takvih ravni. Neka $\vec{r} = \vec{r}(s)$ označava vektor položaja koji definiše krivu C dobijenu presekom izabrane ravni i površi, gde je s dužina luka merena duž krive od neke fiksne tačke na krivoj. Treba naći krivinu takve presečne krive. Vektor $\hat{T} = \frac{d\vec{r}}{ds}$, uzet u tački P, je jedinični tangentni vektor na krivu C i leži u tangentnoj ravni na površ u tački P. Ovde je upotrebljeno obično diferenciranje umesto apsolutnog diferenciranja jer se posmatra Dekartov koordinatni sistem. Diferenciranjem relacije $\hat{T} \cdot \hat{T} = 1$, po dužini luka s nalazi se $\hat{T} \cdot \frac{d\hat{T}}{ds} = 0$ što implicira vektor $\frac{d\hat{T}}{ds}$ upravan na tangentni vektor $\hat{T}$. Kako je koordinatni sistem Dekartov, presečna kriva C se može smatrati prostornom krivom, pa se vektor $\vec{K} = \frac{d\hat{T}}{ds}$, uzet u tački P, definiše kao vektor krivine sa krivinom $\left|\vec{K}\right| = \kappa$ i radijusom krivine $R = 1/\kappa$. Jedinična normala $\hat{N}$ na prostornu krivu uzeta je u istom pravcu kao i $\frac{d\hat{T}}{ds}$ tako da je krivina uvek pozitivna. Tada se može pisati $\vec{K} = \kappa\hat{N} = \frac{d\hat{T}}{ds}$. U skladu sa slikom 5.1. definiše se na površi jedinični vektor surface $\hat{u} = \hat{n} \times \hat{T}$ upravan i na površinski tangentni vektor $\hat{T}$ i na površinski normalni vektor $\hat{n}$, tako da vektori T^i, u^i i n^i formiraju desni sistem.

Pravac od $\hat{u}$ u odnosu na $\hat{T}$ je u istom smislu kao i površinske tangente $\vec{E}_1$ i $\vec{E}_2$. Zapaziti da je vektor $\frac{d\hat{T}}{ds}$ upravan na tangentni vektor $\hat{T}$ i leži u ravni koja sadrži vektore $\hat{n}$ i $\hat{u}$. Zato se vekor krivine $\vec{K}$ može zapisati u komponentnoj formi

$$\vec{K} = \frac{d\hat{T}}{ds} = \kappa_{(n)}\hat{n} + \kappa_{(g)}\hat{u} = \vec{K}_n + \vec{K}_g \tag{5.23}$$

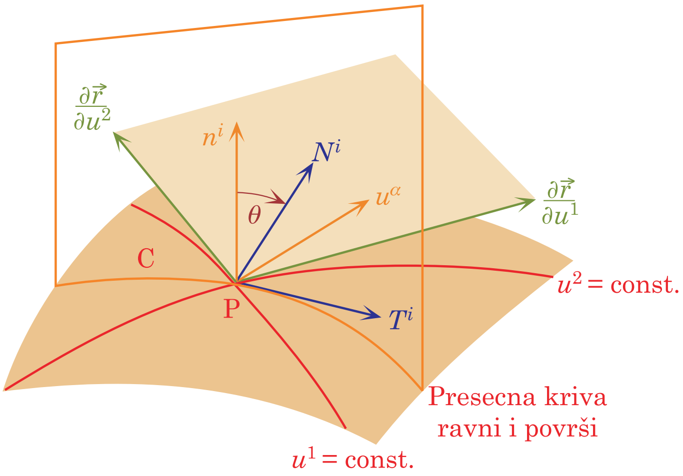

Figure 5.1. Površinska kriva sa tangentnom ravni i normalnom ravni.

gde se $\kappa_{(n)}$ naziva *normalna krivina*, a $\kappa_{(g)}$ se naziva *geodezijska krivina*, a indekse ovde treba posmatati samo kao oznake. Ove krivine se mogu izračunati na slede način. Iz uslova ortogonalnosti $\hat{n}\cdot\hat{T}=0$ dobija se diferenciranjem po dužini luka s rezultat $\hat{n}\cdot\frac{d\hat{T}}{ds}+\hat{T}\frac{d\hat{n}}{ds}=0$, te je posledično, normalna krivina određena skalarnim proizvodom

$$\hat{n}\cdot\vec{K}=\kappa_{(n)}=-\hat{T}\frac{d\hat{n}}{ds}=-\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{d\hat{n}}{ds}. \tag{5.24}$$

Skalarnim proizvodom $\hat{u}$ i jednačine (5.23) nalazi se geodezijska krivina kao trostruki skalarni proizvod:

$$\kappa_{(g)}=\hat{u}\cdot\frac{d\hat{T}}{ds}=(\hat{n}\times\hat{T})\cdot\frac{d\hat{T}}{ds}. \tag{5.25}$$

5.3 NORMALNA KRIVINA

Jednačina (5.24) se može izraziti kao kvadratna forma pišući

$$\kappa_{(n)}ds^2=-d\vec{r}\cdot d\hat{n}. \tag{5.26}$$

Jedinična normala na površ $\hat{n}$ i vektor položaja $\vec{r}$ su funkcije površinskih koordinata u, v, te su im diferencijali

$$d\vec{r}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}du+\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}dv \quad \text{i} \quad d\hat{n}=\frac{\partial\hat{n}}{\partial u}du+\frac{\partial\hat{n}}{\partial v}dv. \tag{5.27}$$

Neka se definiše kvadratna forma

$$B = -d\vec{r}\cdot d\hat{n} = -\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}dv\right)\cdot\left(\frac{\partial \hat{n}}{\partial u}du + \frac{\partial \hat{n}}{\partial v}dv\right)$$
$$B = e(du)^2 + 2fdudv + g(dv)^2 = b_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta \tag{5.28}$$

gde su

$$e = -\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \hat{n}}{\partial u}, \quad 2f = -\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \hat{n}}{\partial v} + \frac{\partial \hat{n}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right), \quad g = -\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \hat{n}}{\partial v}, \tag{5.29}$$

a $b_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$ se naziva *tenzor krivine*, dok je $a^{\alpha\gamma}b_{\alpha\beta} = b^\gamma_\beta$ pridruženi tenzor krivine. Kvadaratna forma iz jednačine (5.28) naziva se *druga osnovna kvadratna forma površi*. Koeficijenti ove kvadratne forme mogu se izračunati na nekoliko alternativnih načina. Jedinična površinska normala je upravna na tangentne vektore koordinatnih krivih u tački P te važe relacije ortogonalnosti

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\cdot\hat{n} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\cdot\hat{n} = 0. \tag{5.30}$$

Diferenciranjem ovih jednačina po u i v, nalazi se

$$e = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}\cdot\hat{n} = -\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \hat{n}}{\partial u} = b_{11}$$
$$f = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u\partial v}\cdot n = -\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \hat{n}}{\partial v} = -\frac{\partial \hat{n}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = b_{21} = b_{12} \tag{5.31}$$
$$g = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2}\cdot n = -\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \hat{n}}{\partial v} = b_{22}$$

te se posledično tenzor krivine može izraziti kao

$$b = -\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\alpha}\frac{\partial \hat{n}}{\partial u^\beta}. \tag{5.32}$$

Kvadratne forme iz jednačina (5.20) i (5.28) omogućuju da se normalna krivina izrazi kao odnos kvadratnih formi. Normalna krivina u pravcu $\frac{du}{dv}$ je, iz jednačine (5.26),

$$\kappa_{(n)} = \frac{B}{A} = \frac{e(du)^2 + 2fdudv + g(dv)^2}{E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2}. \tag{5.33}$$

Ako se jedinični tangentni vektor na krivu napiše u obliku $\hat{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\alpha}\frac{du^\alpha}{ds}$, a izvod jedinične površinske normale po dužini luka izrazi kao $\frac{d\hat{n}}{ds} = \frac{\partial \hat{n}}{\partial u^\beta}\frac{du^\beta}{ds}$, tada se normalna krivina može izraziti u obliku

$$\kappa_{(n)} = -\hat{T}\cdot\frac{d\hat{n}}{ds} = -\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial \hat{n}}{\partial u^\beta}\right)\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds}$$
$$= \frac{b_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta}{ds^2} = \frac{b_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta}{a_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta}. \tag{5.34}$$

Zapaziti da je tenzor krivine simetrični tenzor drugog reda.

U prethodnom razmatranju uzeta je proizvoljna ravan koja sadrži jedinični normalni vektor. Sada će se razmotriti sve takve ravni koje prolaze kroz jediničnu površinsku normalu. Variranjem ravni koja sadrži jediničnu površinsku normalu $\hat{n}$ u tački P dobijaju se različite presečne krive sa površi. Svaka od tih krivih ima svoju krivinu. Ispitivanjem svih takvih ravni mogu se naći najveća i najmanja normalna krivina provrši. Jednačina (5.33) se može napisati u obliku

$$\kappa_{(n)} = \frac{e + 2f\lambda + g\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2} \tag{5.35}$$

gde je $\lambda = \frac{dv}{du}$. Ova jednačina se na osnovu teorije proporcija može napisati i u obliku

$$\kappa_{(n)} = \frac{(e + f\lambda) + \lambda(f + g\lambda)}{(E + F\lambda) + \lambda(F + G\lambda)} = \frac{f + g\lambda}{F + G\lambda} = \frac{e + f\lambda}{E + F\lambda}. \tag{5.36}$$

Posledično, krivina zadovoljava diferencijalne jednačine

$$(e - \kappa E)du + (f - \kappa F)dv = 0 \quad \text{i} \quad (f - \kappa F)du + (g - \kappa G)dv = 0. \tag{5.37}$$

Najveća i najmanja krivina javljaju se u pravcima gde je $\frac{d\kappa_{(n)}}{d\lambda} = 0$. Izračunavanjem izvoda $\kappa_{(n)}$ po λ i izjednačavanjem izvoda sa nulom dobija se kvadratna jednačina po λ

$$(Fg - Gf)\lambda^2 + (Eg - Ge)\lambda + (Ef - Fe) = 0, \quad (Fg - Gf) \neq 0.$$

Dva korena λ_1 i λ_2 ove jednačine zadovoljavaju

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{Eg - Ge}{Fg - Gf} \quad \text{i} \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{Ef - Fe}{Fg - Gf}, \tag{5.38}$$

gde $Fg - Gf \neq 0$. Krivine $\kappa_{(1)}$, $\kappa_{(2)}$ koje odgovaraju korenima λ_1 i λ_2 nazivaju se *glavne krivine* u tački P. Preko glavnih krivina $\kappa_{(1)}$ i $\kappa_{(2)}$ izražavaju se: (1) glavni radijusi krivine $R_i = 1/\kappa_i$, $i = 1, 2$, i (2) srednja krivina $H = \frac{1}{2}(\kappa_{(1)} + \kappa_{(2)})$ i totalna ili Gausova krivina $K = \kappa_{(1)}\kappa_{(2)}$ površi. Zapaziti da koreni λ_1 i λ_2 određuju na površi dva pravca

$$\frac{d\vec{r}_1}{du} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\lambda_1 \quad \text{i} \quad \frac{d\vec{r}_2}{du} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\lambda_2.$$

Ako su ovi pravci ortogonalni biće

$$\frac{d\vec{r}_1}{du} \cdot \frac{d\vec{r}_2}{du} = (\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\lambda_1) \cdot (\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\lambda_2) = 0.$$

Ovo zahteva da je

$$G\lambda_1\lambda_2 + F(\lambda_1 + \lambda_2) + E = 0. \tag{5.39}$$

Ostavlja se čitaocu za vežbu da pokaže da pravci određeni glavnim krivinama moraju biti ortogonalni. U slučaju kada je $Fg - Gf = 0$ mora biti $F = 0$ i $f = 0$ jer su koordinatne krive ortogonalne i G mora biti pozitivno. U ovom specijalnom slučaju još ostaju dva pravca određena diferencijalnim jednačinama (5.37) za $dv = 0$ i du proizvoljno, kao i za $du = 0$ i proizvoljno dv. Iz diferencijalnih jednačina (5.37) nalazi se da ovi pravci odgovaraju glavnim krivinama

$$\kappa_{(1)} = \frac{e}{E} \quad \text{i} \quad \kappa_{(2)} = \frac{g}{G}.$$

Neka $\lambda^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds}$ označava jedinični vektor na površi koji zadovoljava $a_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = 1$. Tada se jednačina (5.34) može napisati u obliku $\kappa_{(n)} = b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta$ ili se može pisati $(b_{\alpha\beta} - \kappa_{(n)}a_{\alpha\beta})\lambda^\alpha\lambda^\beta = 0$. Najveća ili najmanja normalna krivina biće u pravcima λ^α gde je

$$(b_{\alpha\beta} - \kappa_{(n)}a_{\alpha\beta})\lambda^\alpha = 0,$$

te $\kappa_{(n)}$ mora biti koren jednačine $\left|b_{\alpha\beta} - \kappa_{(n)}a_{\alpha\beta}\right| = 0$ ili

$$\left|a^{\alpha\gamma}b_{\alpha\beta} - \kappa_{(n)}\delta^\gamma_\beta\right| = \begin{vmatrix} b^1_1 - \kappa_{(n)} & b^1_2 \\ b^2_1 & b^2_2 - \kappa_{(n)} \end{vmatrix} = \kappa^2_{(n)} - b_{\alpha\beta}a^{\alpha\beta}\kappa_{(n)} + \frac{b}{a} = 0. \tag{5.40}$$

Ovo je kvadratna jednačina po $\kappa_{(n)}$ oblika $\kappa^2_{(n)} - (\kappa_{(1)} + \kappa_{(2)})\kappa_{(n)} + \kappa_{(1)}\kappa_{(2)} = 0$. Drugim rečima glavne krivine $\kappa_{(1)}$ i $\kappa_{(2)}$ su sopstvene vrednosti matrice sa elementima $b^\gamma_\beta = a^{\alpha\gamma}b_{\alpha\beta}$. Zapaziti da se iz determinantne jednačine po $\kappa_{(n)}$ može direktno naći totalna krivina ili Gausova krivina koja je invarijanta data sa $K = \kappa_{(1)}\kappa_{(2)} = \left|b^\alpha_\beta\right| = |a^{\alpha\gamma}b_{\gamma\beta}| = b/a$. Srednja krivina je takođe invarijanta koja se dobija iz $H = \frac{1}{2}(\kappa_{(1)} + \kappa_{(2)}) = \frac{1}{2}a^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}$, gde su $a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ i $b = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$ determinante formirane od površinskog metričkog tenzora i komponenata tenzora krivine.

5.4 JEDNAČINE GAUSS-A, WEINGARTEN-A I CODAZZI-A

U svakoj tački prostorne krive mogu se konstruisati jedinična tangenta $\vec{T}$, jedinična normala $\vec{N}$ i jedinična binormala $\vec{B}$. Izvodi ovih vektora po dužini luka mogu se takođe prikazati kao linearne kombinacije baznih vektora $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ [vidi na primer, Frenet-Serret-ove formule u (5.13)]. Na sličan način površinski vektori $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, $\hat{n}$ formiraju bazu, a izvodi ovih baznih vektora po površinskim koordinatama u, v mogu se takođe izraziti kao linearne kombinacije baznih vektora $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, $\hat{n}$. Na primer, izvodi

$\vec{r}_{uu}$, $\vec{r}_{uv}$, $\vec{r}_{vv}$ mogu se izraziti kao linearne kombinacije od $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, $\hat{n}$:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{uu} &= c_1\vec{r}_u + c_2\vec{r}_v + c_3\hat{n} \\ \vec{r}_{uv} &= c_4\vec{r}_u + c_5\vec{r}_v + c_6\hat{n} \\ \vec{r}_{vv} &= c_7\vec{r}_u + c_8\vec{r}_v + c_9\hat{n} \end{aligned} \tag{5.41}$$

gde konstante c_1, ..., c_9 treba odrediti. Lako je pokazati (vidi zadatak 8 na kraju ovog poglavlja) da se ove jednačine mogu napisati u indeksnoj notaciji kao

$$\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\ \beta \end{matrix} \right\} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\gamma} + b_{\alpha\beta}\hat{n}. \tag{5.42}$$

Ove jednačine su poznate pod nazivom Gauove jednačine.

Na sličan način se izvodi vektora normale mogu prikazati kao linearne kombinacije površinskih baznih vektora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{n}}{\partial u} &= c_1\vec{r}_u + c_2\vec{r}_v \\ \frac{\partial \hat{n}}{\partial v} &= c_3\vec{r}_u + c_4\vec{r}_v \end{aligned} \qquad \text{ili} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} &= c_1^*\frac{\partial \hat{n}}{\partial u} + c_2^*\frac{\partial \hat{n}}{\partial v} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} &= c_3^*\frac{\partial \hat{n}}{\partial u} + c_4^*\frac{\partial \hat{n}}{\partial v} \end{aligned} \tag{5.43}$$

gde su c_1, ..., c_4 i c_1^*, ..., c_4^* konstante. Ove jednačine se nazivaju Weingarten-ove jednačine. Lako se pokazuje (vidi zadatak 9 na kraju ovog poglavlja) da se Weingarten-ove jednačine mogu zapisati u sledećem indeksnom obliku

$$\frac{\partial \hat{n}}{\partial u^\alpha} = -b_\alpha^\beta \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\beta} \tag{5.44}$$

gde je $b_\alpha^\beta = a^{\alpha\gamma} b_{\gamma\alpha}$ mešoviti oblik tenzora krivine drugog reda.

Gausove jednačine daju sistem parcijanih diferencijalnih jednačina koje defiinišu površinske koordinate x^i kao funkcije krivolinijskih koordinata u i v. Jednačine nisu nezavisne jer moraju biti zadovoljene neki uslovi kompatibilnosti. Naime, zahteva se da mešoviti parcijalni izvodi moraju zadovoljiti

$$\frac{\partial^3\vec{r}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta \partial u^\delta} = \frac{\partial^3\vec{r}}{\partial u^\alpha \partial u^\delta \partial u^\beta}.$$

Kada se izračuna

$$\frac{\partial^3\vec{r}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta \partial u^\delta} = \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\ \beta \end{matrix} \right\} \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u^\gamma \partial u^\delta} + \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} \gamma \\ \alpha\ \beta \end{smallmatrix} \right\}}{\partial u^\delta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\gamma} + b_{\alpha\beta}\frac{\partial \hat{n}}{\partial u^\delta} + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta}\hat{n}$$

i upotrebe jednačine Gauss-a i Weingarten-a dobija se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3\vec{r}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta \partial u^\delta} &= \left[\frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} \omega \\ \alpha\ \beta \end{smallmatrix} \right\}}{\partial u^\delta} + \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\ \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \omega \\ \gamma\ \delta \end{matrix} \right\} - b_{\alpha\beta} b_\delta^\omega \right] \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\omega} \\ &\quad + \left[\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\ \beta \end{matrix} \right\} b_{\gamma\delta} + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta} \right] \hat{n}. \end{aligned}$$

Formiranjem razlike

$$\frac{\partial^3 \vec{r}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta \partial u^\delta} - \frac{\partial^3 \vec{r}}{\partial u^\alpha \partial u^\delta \partial u^\beta} = 0$$

nalazi se da koeficijenti uz nezavisne vektore $\hat{n}$ i $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\omega}$ moraju biti nule. Izjednačavanjem koeficijenta uz $\hat{n}$ sa nulom dobijaju se Codazzi-eve jednačine

$$\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\ \beta \end{matrix} \right\} b_{\gamma\delta} - \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\ \delta \end{matrix} \right\} b_{\gamma\beta} + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta} - \frac{\partial b_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} = 0. \tag{5.45}$$

Ove jednačine se sreću i pod imenom Mainardi-Codazzi-eve jednačine. Izjednačavanjem koeficijenta uz $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\omega}$ sa nulom nalazi se da je $R^\delta_{\alpha\gamma\beta} = b_{\alpha\beta} b^\delta_\gamma - b_{\alpha\gamma} b^\delta_\beta$ ili nakon zamene indeksa dobija kovarijantna forma

$$a_{\omega\delta} R^\delta_{\alpha\beta\gamma} = R_{\omega\alpha\beta\gamma} = b_{\omega\beta} b_{\alpha\gamma} - b_{\omega\gamma} b_{\alpha\beta}, \tag{5.46}$$

gde je

$$R^\delta_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial}{\partial u^\gamma} \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \alpha\ \beta \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial u^\beta} \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \alpha\ \gamma \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \omega \\ \alpha\ \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \omega\ \gamma \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \omega \\ \alpha\ \gamma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \omega\ \beta \end{matrix} \right\} \tag{5.47}$$

mešoviti Riemann-ov tenzor krivine.

PRIMER 54 Pokazati da Gausova ili totalna krivina $K = \kappa_{(1)} \kappa_{(2)}$ zavisi samo od metrike $a_{\alpha\beta}$ i iznosi $K = R_{1212}/a$ gde je $a = \det[a_{\alpha\beta}]$.
Rešenje. Pomoću dvodimenzijskog alternirajućeg tenzora $e^{\alpha\beta}$ i svojstva determinanti može se pisati $e^{\gamma\delta} K = e^{\alpha\beta} b^\gamma_\alpha b^\delta_\beta$ gde je $K = \left| b^\gamma_\beta \right| = |a^{\alpha\gamma} b_{\alpha\beta}|$. Ako se to pomnoži sa $e_{\gamma\zeta}$ i izvrši kontrakcija dobija se

$$e_{\gamma\delta} e^{\gamma\delta} K = e_{\gamma\delta} e^{\alpha\beta} b^\gamma_\alpha b^\delta_\beta = 2K$$
$$2K = e_{\gamma\delta} e^{\alpha\beta} (a^{\gamma\mu} b_{\alpha\mu})(a^{\delta\nu} b_{\beta\nu})$$

Medjutim, kako je $e_{\gamma\delta} a^{\gamma\mu} a^{\delta\nu} = a e^{\mu\nu}$ biće $2K = e^{\alpha\beta} a e^{\mu\nu} b_{\alpha\mu} b_{\beta\nu}$. Pomoću $\sqrt{a} e^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu}$ dobija se $2K = \varepsilon^{\mu\nu} \varepsilon^{\alpha\beta} b_{\alpha\mu} b_{\mu\nu}$, a zamenom indeksa

$$2K = \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\omega\alpha} b_{\omega\beta} b_{\alpha\gamma} \quad \text{i} \quad 2K = \varepsilon^{\gamma\beta} \varepsilon^{\omega\alpha} b_{\omega\gamma} b_{\alpha\beta}.$$

Sabiranjem poslednja dva rezultata nalazi se $4K = \varepsilon^{\beta\gamma} \varepsilon^{\omega\gamma} (b_{\omega\beta} b_{\alpha\gamma} - b_{\omega\gamma} b_{\alpha\beta}) = \varepsilon^{\beta\gamma} \varepsilon^{\omega\gamma} R_{\omega\alpha\beta\gamma}$. Kada se obe strane pomnože sa $\varepsilon_{\sigma\tau} \varepsilon_{\lambda\nu}$ dobija se $4K \varepsilon_{\sigma\tau} \varepsilon_{\lambda\nu} = \delta^{\beta\gamma}_{\sigma\tau} \delta^{\omega\alpha}_{\lambda\nu} R_{\omega\alpha\beta\gamma}$. Na osnovu zadataka 16 na kraju ovog poglavlja, Riemann-ov tenzor krivine R_{ijkl} je koso-simetričan po (i,j), (k,l) i simetričan je po parovima indeksa (ij), (kl). Posledično, $\delta^{\beta\gamma}_{\sigma\tau} \delta^{\omega\alpha}_{\lambda\nu} R_{\omega\alpha\beta\gamma} = 4R_{\lambda\nu\sigma\tau}$ i otud $R_{\lambda\nu\sigma\tau} = K \varepsilon_{\sigma\tau} \varepsilon_{\lambda\nu}$ te je specijalni slučaj $K \sqrt{a} e_{12} \sqrt{a} e_{12} = R_{1212}$ ili $K = R_{1212}/a$. Mnogo jednostavniji način da se dobije ovaj rezultat je da se posmatra $K = b/a$ i zapazi iz jednačine (5.46) da je $R_{1212} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = b$.

Zapaziti da je na površi $ds^2 = a_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$ gde su $a_{\alpha\beta}$ površinske metrike. Kako je $a_{\alpha\beta}$ tenzor i zadovoljava $\bar{a}_{\gamma\delta} = a_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\gamma} \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\delta}$, deteminanta ovog izraza daje

$$\bar{a} = |\bar{a}_{\gamma\delta}| \left| \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\gamma} \right| \left| \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\delta} \right| = aJ^2$$

gde je J jakobijan transformacije površinskih koordinata. Ovde tenzor krivine za površinu $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ima samo jednu nezavisnu komponentu jer je $R_{1212} = R_{2121} = -R_{1221} = -R_{2112}$ (vidi zadatke 20 i 21). Iz transformacionog zakona

$$\bar{R}_{\varepsilon\eta\lambda\mu} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\varepsilon} \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\eta} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\lambda} \frac{\partial u^\delta}{\partial \bar{u}^\mu}$$

sabiranjem po ponovljenim indeksima pokazuje se da je $\bar{R}_{1212} = R_{1212} J^2$ i posledično

$$\frac{\bar{R}_{1212}}{\bar{a}} = \frac{R_{1212}}{a} = K$$

što pokazuje da je Gausova krivina skalarna invarijanta u V_2.

5.5 GEODEZIJSKA KRIVINA

Vektor krivine $\vec{K}$ neke krive C na površi je vektorski zbir normalne krivine $\kappa_{(n)}\hat{n}$ i geodezijske krivine $\kappa_{(g)}\hat{u}$ i leži u ravni koja je upravna na tangentni vektor na površinsku krivu. Geodezijska krivina $\kappa_{(g)}$ se nalazi iz jednačine (5.25) i može se zapisati kao

$$\kappa_{(g)} = \hat{u} \cdot \vec{K} = \hat{u} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = (\hat{n} \times \vec{T}) \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = \left(\vec{T} \times \frac{d\vec{T}}{ds} \right) \cdot \hat{n}.$$

Kada se u ovaj izraz zamene vektori

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}$$
$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{K} = \vec{r}_{uu}(u')^2 + 2\vec{r}_{uv}u'v' + \vec{r}_{vv}(v')^2 + \vec{r}_u u'' + \vec{r}_v v'',$$

gde je $' = \frac{d}{ds}$, i iskoriste rezultati iz zadatka 10 na kraju ovog poglavlja, nalazi se geodezijska krivina u obliku

$$\begin{aligned}\kappa_{(g)} = &\left[\left\{ {2 \atop 2\ 1} \right\}(u')^3 + \left(2\left\{ {2 \atop 1\ 2} \right\} - \left\{ {1 \atop 1\ 1} \right\}\right)(u')^2 v' + \right.\\ &+ \left(\left\{ {2 \atop 2\ 2} \right\} - 2\left\{ {1 \atop 1\ 2} \right\}\right) u'(v')^2 \\ &\left. - \left\{ {1 \atop 2\ 2} \right\}(v')^3 + (u'v'' - u''v')\right] \sqrt{EG - F^2}. \qquad (5.48)\end{aligned}$$

Ova jednačina pokazuje da je geodezijska krivina funkcija samo od površinskih metrika E, F, G i izvoda u', v', u'', v''. Kriva za koju je geodezijska krivina nula naziva se *geodezijska kriva*. Takve krive su često, ali ne uvek, linije najkraćeg rastojanja između dve tačke na površi. Na primer, veliki krug na sferi koji prolazi kroz dve zadate tačke na sferi je geodezijska kriva. Ako se obriše onaj deo kruga koji predstavlja najkraće rastojanje između dve tačke na krugu ostaje geodezijska kriva koja spaja dve tačke, ali ona tada nije najkraće dužine između tih dvaju tačaka.

Za ravanske krive sa $u = x$ i $v = y$ geodezijska krivina se svodi na

$$k_{(g)} = u'v'' - u''v' = \frac{d\phi}{ds}$$

gde je ϕ ugao između tangente $\vec{T}$ na krivu i jediničnog vektora $\hat{\mathbf{e}}_1$.

Geodezijske krive na površi geodezijsku krivinu jednaku nuli. Kako je $k_{(g)} = 0$ duž geodezijske krive, to znači je normala $\vec{N}$ na površinsku krivu u bilo kojoj tački u istom pravcu kao i normala $\hat{n}$ na površ. U tom slučaju je $\vec{r}_u \cdot \hat{n} = 0$ i $\vec{r}_v \cdot \hat{n} = 0$ što se svodi na

$$\frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{r}_u = 0 \quad \text{i} \quad \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{r}_v = 0. \qquad (5.49)$$

jer vektori $\hat{n}$ i $\frac{d\vec{T}}{ds}$ imaju isti pravac. Kako se može pisati

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\frac{dv}{ds} = \vec{r}_u u' + \vec{r}_v v' \\ \frac{d\vec{T}}{ds} &= \vec{r}_{uu}(u')^2 + 2\vec{r}_{uv}u'v' + \vec{r}_{vv}(v')^2 + \vec{r}_u u'' + \vec{r}_v v''\end{aligned}$$

jednačine (5.49) postaju

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{r}_u &= (\vec{r}_{uu} \cdot \vec{r}_u)(u')^2 + 2(\vec{r}_{uv} \cdot \vec{r}_u)u'v' + (\vec{r}_{vv} \cdot \vec{r}_u)(v')^2 + Eu'' + Fv'' = 0 \\ \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{r}_v &= (\vec{r}_{uu} \cdot \vec{r}_v)(u')^2 + 2(\vec{r}_{uv} \cdot \vec{r}_v)u'v' + (\vec{r}_{vv} \cdot \vec{r}_v)(v')^2 + Fu'' + Gv'' = 0.\end{aligned}$$

(5.50)

Pomoću rezultata iz zadataka 4, 5 i 6 sa kraja ovog poglavlja može se eliminisati v'' i jednačina (5.50) i dobiti

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1\ 1 \end{matrix} \right\} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2\ 2 \end{matrix} \right\} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 0,$$

a eliminisanjem u'' iz jednačina (5.50) dobija se jednačina

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1\ 1 \end{matrix} \right\} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2\ 2 \end{matrix} \right\} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 0.$$

U tenzorskom obliku, poslednje dve jednačine mogu se zapisati kao

$$\frac{d^2u^\alpha}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\ \gamma \end{matrix} \right\}_a \frac{du^\beta}{ds}\frac{du^\gamma}{ds} = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2 \tag{5.51}$$

gde su $u = u^1$ i $v = u^2$. Jednačine (5.51) su diferencijalne jednačine koje definišu geodezijsku krivu na površi. Videće se da se isti tip jednačina javlja u razmatranju najkraćeg rastojanja između dve tačke u generalisanom koordinatnom sistemu. Videti, na primer, zadatak 18 u drugom poglavlju drugog dela.

5.6 TENZORSKI IZVODI

Neka $u^\alpha = u^\alpha(t)$ označava parametarske jednačine krive na površi definisanoj parametarskim jednačinama $x^i = x^i(u^1, u^2)$. Površinska kriva se može prikazati u prostornim koordinatama sa $x^i = x^i(u^1(t), u^2(t)) = x^i(t)$. Potrebno je podsetiti se da je za datu krivu C zadatu sa $x^i = x^i(t)$, apsolutni izvod vektorskog polja A^i duž C defonisan kao unutrašnji proizvod kovarijantnog izvoda vektorskog polja sa tangentnim vektorom na krivu. Apsolutni izvod je

$$\frac{\delta A^i}{\delta t} = A^i_{,j}\frac{dx^j}{dt} = \left[\frac{\partial A^i}{\partial x^j} + \left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\}_g A^k \right] \frac{dx^j}{dt}$$

ili

$$\frac{\delta A^i}{\delta t} = \frac{dA^i}{dt} + \left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\}_g A^k \frac{dx^j}{dt}$$

gde indeks g označava da je Kristofelov simbol formiran od prostorne metrike g_{ij}. Ako je A^α površinski vektor definisan duž krive C, apsolutni izvod je

$$\frac{\delta A^\alpha}{\delta t} = A^\alpha_{,\beta}\frac{du^\beta}{dt} = \left[\frac{\partial A^\alpha}{\partial u^\beta} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\ \gamma \end{matrix} \right\}_a A^\gamma \right] \frac{du^\beta}{dt}$$

ili

$$\frac{\delta A^\alpha}{\delta t} = \frac{dA^\alpha}{dt} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\ \gamma \end{Bmatrix}_a A^\gamma \frac{du^\beta}{dt}$$

gde indeks a označava da je Kristofelov simbol formiran od površinske metrike $a_{\alpha\beta}$.

Slično su formule za apsolutni izvod kovarijantnog prostornog vektora A_i i kovarijantnog površinskog vektora A_α date sa

$$\frac{\delta A_i}{\delta t} = \frac{dA_i}{dt} - \begin{Bmatrix} k \\ i\ j \end{Bmatrix}_g A_k \frac{dx^j}{dt}$$

i

$$\frac{\delta A_\alpha}{\delta t} = \frac{dA_\alpha}{dt} - \begin{Bmatrix} \gamma \\ \alpha\ \beta \end{Bmatrix}_a A_\alpha \frac{du^\beta}{dt}.$$

Neka se posmatra mešoviti tenzor T^i_α koji je kontravarijantan u odnosu na transformaciju prostornih koordinata x^i i kovarijantan u odnosu na transformaciju površinskih koordinata u^α. Tenzor T^i_α je definisan nad površinskom krivom C koja se može posmatarati i kao prostorna kriva. Neka je dalje definisana skalarna invarijanta $\Psi = \Psi(t) = T^i_\alpha A_i B^\alpha$ gde je A_i paralelno vektorsko polje duž krive C kada se ona posmatra kao prostorna kriva, a B^α je paralelno vektorsko polje duž krive C kada se ona posmatra kao površinska kriva. Podsetiti se da paralelna vektorska polja moraju zadovoljavati diferencijalne jednačine

$$\frac{\delta A^i}{\delta t} = \frac{dA^i}{dt} - \begin{Bmatrix} k \\ i\ j \end{Bmatrix}_g A_k \frac{dx^j}{dt} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\delta B^\alpha}{\delta t} = \frac{dB^\alpha}{dt} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\ \gamma \end{Bmatrix}_a B^\gamma \frac{du^\beta}{dt} = 0. \tag{5.52}$$

Skalarna invarijanta Ψ je funkcija parametra t prostorne krive jer su i tenzorsko polje i paralelno vektorsko polje uzeti duž krive C. Diferenciranjem funkcije Ψ po parametru t dobija se

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{dT^i_\alpha}{dt} A_i B^\alpha + T^i_\alpha \frac{dA_i}{dt} B^\alpha + T^i_\alpha A_i \frac{dB^\alpha}{dt}. \tag{5.53}$$

Međutim vektori A_i i B^α su paralelna vektorska polja i moraju zadovoljavati relacije date jednačinama (5.52). To implicira da se jednačina (5.53) može napisati u obliku

$$\frac{d\Psi}{dt} = \left[\frac{dT^i_\alpha}{dt} + \begin{Bmatrix} i \\ k\ j \end{Bmatrix}_g T^k_\alpha \frac{dx^j}{dt} - \begin{Bmatrix} \gamma \\ \beta\ \alpha \end{Bmatrix}_a T^i_\gamma \frac{du^\beta}{dt} \right] A_i B^\alpha. \tag{5.54}$$

Veličina u uglastim zagradama jednačine (5.54) definiše se kao apsolutni tenzorski izvod po parametru t duž krive C. Ovaj prâvi tenzorski izvod može se pisati u obliku

$$\frac{\delta T^i_\alpha}{dt} = \frac{dT^i_\alpha}{dt} + \left\{ \begin{matrix} i \\ k\ j \end{matrix} \right\}_g T^k_\alpha \frac{dx^j}{dt} - \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \beta\ \alpha \end{matrix} \right\}_a T^i_\gamma \frac{du^\beta}{dt}. \tag{5.55}$$

Prostorni zapis krive C povezan je sa površinskim zapisom krive C preko definicionih jednačina, te se zato jednačina (5.55) može izraziti u obliku

$$\frac{\delta T^i_\alpha}{dt} = \left[\frac{\partial T^i_\alpha}{du^\beta} + \left\{ \begin{matrix} i \\ k\ j \end{matrix} \right\}_g T^k_\alpha \frac{dx^j}{\partial u^\beta} - \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \beta\ \alpha \end{matrix} \right\}_a T^i_\gamma \right] \frac{du^\beta}{dt} \tag{5.56}$$

Veličina u uglastim zagradama je mešoviti tenzor i definiše se kao *tenzorski izvod* od T^i_α po površinskim koordinatama u^β. Tenzorski izvod mešovitog tenzora T^i_α po površinskim koordinatama u^β zapisuje se sa

$$T^i_{\alpha,\beta} = \frac{\partial T^i_\alpha}{\partial u^\beta} + \left\{ \begin{matrix} i \\ k\ j \end{matrix} \right\}_g T^k_\alpha \frac{dx^j}{\partial u^\beta} - \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \beta\ \alpha \end{matrix} \right\}_a T^i_\gamma.$$

U opštem slučaju, za dati mešoviti tenzor $T^{i\ldots j}_{\alpha\ldots\beta}$ koji je kontravarijantan po transformacijama prostornih koordinata i kovarijantan po transformacijama površinskih koordinata, može se definisati skalarno polje duž krive C kao

$$\Psi(t) = T^{i\ldots j}_{\alpha\ldots\beta} A_i \ldots A_j B^\alpha \ldots B^\beta \tag{5.57}$$

gde su $A_i, \ldots, A_j$ i $B^\alpha, \ldots, B^\beta$ paralelna vektorska polja duž krive C. Apsolutni tenzorski izvod se tada izvodi diferenciranjem jednačine (5.57) po parametru t.

Tenzorski izvodi metričkih tenzora g_{ij}, $a_{\alpha\beta}$ kao i alternirajućih tenzora ε_{ijk}, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ i njihovih pridruženih tenzora su svi jednaki nuli. Zato se oni mogu smatrati konstantama tokom procesa tenzorskog diferenciranja.

5.7 UOPŠTENJA

U Rimanovom prostor V_n sa metrikom g_{ij} i krivolinijskim koordinatama x^i, $i = 1, 2, 3$, mogu se napisati jednačine površi u parametarskom obliku $x^i = x^i(u^1, u^2)$ gde su u^α, $\alpha = 1, 2$ krivolinijske koordinate površi. Kako je

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} du^\alpha \tag{5.58}$$

mala promena du^α na površi rezultuje promenom dx^i u prostornim koordinatama. Zato se element dužine luka na površi može izraziti preko krivolinijskih koordinata površi. Taj isti element dužine luka može se izraziti i preko krivolinijskih koordinata prostora. Dakle, kvadrat elementa dužine izražen preko površinskih koordinata je

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \tag{5.59}$$

gde je $a_{\alpha\beta}$ metrika površi, a taj isti delić posmatran kao prostorni element je

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \tag{5.60}$$

Izjednačavanjem jednačina (5.59) i (5.60) nalazi se

$$g_{ij} dx^i dx^j = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} du^\alpha du^\beta = a_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta. \tag{5.61}$$

Jednačina (5.61) pokazuje da je površinska metrika u relaciji sa prostornom metrikom i da se može izračunati iz $a_{\alpha\beta} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}$. U slučaju Dekartovih koordinata ova jednačina se svodi na jednačinu (5.21). U površinskim koordinatama definiše se kvadratna forma $A = a_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$ kao *prva osnovna kvadratna forma površi*. Tangentni vektori na koordinatne krive koje definišu površi su $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$ i mogu se posmatrati bilo kao kovarijantni površinski vektori, bilo kao kontravarijantni prostorni vektori. Takav vektor definše se sa

$$x^i_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2. \tag{5.62}$$

Svaki vektor koji je linearna kombinacija tangentnih vektora na koordinatne krive naziva se površinski vektor. Površinski vektor A^α može se posmatrati i kao prostorni vektor A^i. Veza između prostornog zapisa i površinskog zapisa je $A^i = A^\alpha x^i_\alpha$. Površinski zapis A^α, $\alpha = 1, 2$ i prostorni zapis A^i, $i = 1, 2, 3$ definišu isti pravac i magnitudu jer je

$$g_{ij} A^i A^j = g_{ij} A^\alpha x^i_\alpha A^\beta x^j_\beta = g_{ij} x^i_\alpha x^j_\beta A^\alpha A^\beta = a_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta.$$

Neka se posmatraju dva površinska vektora A^α i B^β i njihovi prostorni zapisi A^i i B^i gde su

$$A^i = A^\alpha x^i_\alpha \quad \text{i} \quad B^i = B^\alpha x^i_\alpha. \tag{5.63}$$

Ovi vektori su tangentni na površ te se jedinični normalni vektor na površ može definisati vektorskim proizvodom

$$n_i AB \sin\theta = \varepsilon_{ijk} A^j B^k \tag{5.64}$$

gde su A, B magnitude od A^i, B^i a θ je ugao između vektora kada se njihova ishodišta poklapaju. Zamenom jednačina (5.63) u jednačinu (5.64) nalazi se

$$n_i AB \sin\theta = \varepsilon_{ijk} A^\alpha x^j_\alpha B^\beta x^k_\beta. \tag{5.65}$$

Izraženo preko površinske metrike je $AB \sin\theta = \varepsilon_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta$, te se jednačina (5.65) može prepisati u obliku

$$(n_i \varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{ijk} x^j_\alpha x^k_\beta) A^\alpha B^\beta = 0 \tag{5.66}$$

što za proizvoljne površinske vektore implicira

$$n_i \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{ijk} x^j_\alpha x^k_\beta \quad \text{ili} \quad n_i = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{ijk} x^j_\alpha x^k_\beta. \tag{5.67}$$

Jednačina (5.67) definiše jedinični normalni vektor na površ preko tangentnih vektora na koordinatne krive. Ovaj jedinični normalni vektor je u vezi sa kovarijantnim izvodom površinskih tangenata što će se sada pokazati. Korišćenjem rezultata iz jednačine (5.50), tenzorski izvod jednačine (5.59) po površinskim koordinatama, dovodi do

$$x^i_{\alpha,\beta} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + \begin{Bmatrix} i \\ p\ q \end{Bmatrix}_g x^p_\alpha x^q_\beta - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \alpha\ \beta \end{Bmatrix}_a x^i_\sigma \tag{5.68}$$

gde indeksi na Kristofelovom simbolima označavaju metriku iz koje su izračunati. Tenzorski izvod jednačine (5.57) daje rezultat

$$g_{ij} x^i_{\alpha,\gamma} x^j_\beta + g_{ij} x^i_\alpha x^j_{\beta,\gamma} = a_{\alpha\beta,\gamma} = 0, \tag{5.69}$$

a cikličnom promenom indeksa α, β, γ u ovoj jednačini pokazuje se da je

$$g_{ij} x^i_{\alpha,\beta} x^j_\gamma = 0. \tag{5.70}$$

Jednačina (5.70) govori da je u protornim koordinatama vektor $x^i_{\alpha,\beta}$ upravan na površinski tangentni vektor x^j_γ i zato mora imati isti pravac kao jedinična površinska normala n^i. Zato mora postojati tenzor drugog reda $b_{\alpha\beta}$ takav da je

$$b_{\alpha\beta} n^i = x^i_{\alpha,\beta}. \tag{5.71}$$

Pomoću relacije $g_{ij} n^i n^j = 1$ može se transformisati jednačina (5.71) u oblik

$$b_{\alpha\beta} = g_{ij} n^j x^i_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\delta} \varepsilon_{ijk} x^i_{\alpha,\beta} x^j_\gamma x^k_\delta. \tag{5.72}$$

Simetrični tenzor drugog reda $b_{\alpha\beta}$ naziva se tenzor krivine, a kvadratna forma

$$B = b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \tag{5.73}$$

naziva se *druga osnovna kvadratna forma površi*.

Može se razmotriti i tenzorski izvod po površinskim koordinatama jediničnog normalnog vektora na površ

$$n^i_{,\alpha} = \frac{\partial n^i}{\partial u^\alpha} + \begin{Bmatrix} i \\ j\ k \end{Bmatrix}_g n^j x^k_\alpha. \tag{5.74}$$

Tenzorski izvod izraza $g_{ij} n^i n^j = 1$ po površinskim koordinatama dovodi do rezultata $g_{ij} n^i n^j_{,\alpha} = 0$ koji pokazuje da je vektor $n^j_{,\alpha}$, upravan na n^i i mora ležati u tangentnoj ravni površi. Zato se on može izraziti kao linearna kombinacija površinskih tangentnih vektora x^i_α i zapisati u obliku

$$n^i_{,\alpha} = \eta^\beta_\alpha x^i_\beta \tag{5.75}$$

gde se koeficijenti η^β_α mogu zapisati preko komponenata površinske metrike $a_{\alpha\beta}$ i komponenata $b_{\alpha\beta}$ na sledeći način. Jedinični vektor n^i je upravan na površi te je

$$g_{ij}n^i x^j_\alpha = 0. \tag{5.76}$$

Tenzorski izvod ove jednačine po površinskim koordinatama daje

$$g_{ij}n^i_\beta x^j_\alpha + g_{ij}n^i x^j_{\alpha,\beta} = 0. \tag{5.77}$$

Kada se u jednačinu (5.77) zamene relacije iz jednačina (5.57), (5.71) i (5.75) pokazuje se da je

$$b_{\alpha\beta} = -a_{\alpha\gamma}\eta^\gamma_\beta. \tag{5.78}$$

Rešavanjem jednačine (5.78) po koeficijentima η^γ_β nalazi se

$$\eta^\gamma_\beta = -a^{\alpha\gamma}b_{\alpha\beta}, \tag{5.79}$$

a zamena ovog rezultata u jednačinu (5.75) dovodi do Weingarten-ove formule

$$n^i_{,\alpha} = -a^{\gamma\beta}b_{\gamma\alpha}x^i_\beta. \tag{5.80}$$

Ova relacija izražava izvod jedinične normale preko površinske metrike, tenzora krivine i površinskih tangenti.

Treća osnovna kvadratna forma površi definiše se sa

$$C = c_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta \tag{5.81}$$

gde je $c_{\alpha\beta}$ definisano kao simetrični površinski tenzor

$$c_{\alpha\beta} = g_{ij}n^i_{,\alpha}n^j_{,\beta}. \tag{5.82}$$

Primenom Weingarten-ove formule na jednačinu (5.81) može se verifikovati da je

$$c_{\alpha\beta} = a^{\gamma\delta}b_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta}. \tag{5.83}$$

5.8 GEODEZIJSKE KOORDINATE

U Dekartovom koordinatnom sistemu metrički tenzor g_{ij} je konstantan te su posledično Kristofelovi simboli nula u svim tačkama prostora. To je, naravno, tako jer se

Kristofelovi simboli izračunavaju preko izvoda metričkog tenzora koji je konstantan. Ako prostor V_N nije Dekartov, Kristofelovi simboli se ne anuliraju u svim tačkama prostora. Međutim, moguće je naći koordinatni sistem gde će svi Kristofelovi simboli biti nula u datoj tački P prostora. Takve koordinate se nazivaju geodezijske koordinate tačke P.

Neka se posmatra dvodimenzijska površ sa površinskim koordinatama u^α i površinskom metrikom $a_{\alpha\beta}$. Ako se izvrši transformacija u neki drugi dvodimenzijski koordinatni sistem, recimo $\bar{u}^\alpha$ sa metrikom $\bar{a}_{\alpha\beta}$, preko transformacionih jednačina oblika

$$u^\alpha = u^\alpha(\bar{u}^1, \bar{u}^2), \quad \alpha = 1, 2, \tag{5.84}$$

tada se iz transformacione jednačine (4.7), nakon promene oznaka, može napisati

$$\begin{Bmatrix} \delta \\ \beta\ \gamma \end{Bmatrix}_{\bar{a}} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\delta} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \delta\ \varepsilon \end{Bmatrix}_a \frac{\partial u^\delta}{\partial \bar{u}^\beta} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \bar{u}^\gamma} + \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta \partial \bar{u}^\gamma}. \tag{5.85}$$

Ovo je relacija između Kristofelovih simbola u dva koordinatna sistema. Ako se $\left\{ {\delta \atop \beta\ \gamma} \right\}_{\bar{a}}$ anulira u nekoj tački P, tada se u toj istoj tački jednačina (5.85) svodi na

$$\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta \partial \bar{u}^\gamma} = -\begin{Bmatrix} \alpha \\ \delta\ \varepsilon \end{Bmatrix}_a \frac{\partial u^\delta}{\partial \bar{u}^\beta} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \bar{u}^\gamma} \tag{5.86}$$

gde su svi članovi uzeti u tački P. Obrnuto, ako je jednačina (5.86) zadovoljena u tački P, tada u toj tački mora Kristofel symbol $\left\{ {\delta \atop \beta\ \gamma} \right\}_{\bar{a}}$ biti jednak nuli.

Neka se dalje posmatra sledeća specijalna transformacija koordinata

$$u^\alpha = u_0^\alpha + \bar{u}^\alpha - \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\ \gamma \end{Bmatrix}_a \bar{u}^\beta \bar{u}^\alpha \tag{5.87}$$

gde su u_0^α površinske koordinate tačke P. U novom koordinatnom sistemu tačka P je zadata sa $\bar{u}^\alpha = 0$. Diferenciranjem relacije (5.87) može se proveriti da li ona zadovoljava jednačinu (5.86). Izvodi su

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\tau} = \delta_\tau^\alpha - \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\ \tau \end{Bmatrix}_a \bar{u}^\beta - \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \tau\ \gamma \end{Bmatrix}_a \bar{u}^\gamma |_{u^\alpha = 0} \tag{5.88}$$

i

$$\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \bar{u}^\tau \partial \bar{u}^\sigma} = - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \tau\ \sigma \end{Bmatrix}_a \Bigg|_{u^\alpha = 0} \tag{5.89}$$

i uzeti su u $\bar{u}^\alpha = 0$. Zaključuje se izvodi iz jednačina (5.88) i (5.89) zadovoljavaju jednačinu (5.86) lokalno u tački P. Zato će u toj naročitoj tački Kristofelovi simboli biti jednaki nuli, te se nove koordinate mogu nazvati geodezijskim koordinatama.

5.9 RIMAN-KRISTOFELOV TENZOR

Riman-Kristofelov tenzor je definisan jednačinom (4.34), a mnoga njegova svojstva se obrađuju u zadacima na kraju ovog poglavlja. Ovde se posebna pažnja posvećuje Riman-Kristofelovm tenzoru u dvodimenzijskom prostoru sa metrikom $a_{\alpha\beta}$ i koordinatama u^α. Riman-Kristofelov tenzor ima oblik

$$R^{\delta}_{.\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial}{\partial u^\beta}\begin{Bmatrix}\delta\\ \alpha\ \gamma\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial u^\gamma}\begin{Bmatrix}\delta\\ \alpha\ \beta\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\tau\\ \alpha\ \gamma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta\\ \beta\ \tau\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\tau\\ \alpha\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta\\ \gamma\ \tau\end{Bmatrix} \tag{5.90}$$

gde su Kristofelovi simboli izračunati iz površinske metrike. Gornji tenzor ima pridruženi tenzor

$$R_{\sigma\alpha\beta\gamma} = a_{\sigma\delta} R^{\delta}_{.\alpha\beta\gamma} \tag{5.91}$$

koji je koso-simetričan po indeksima (σ,α) i (β,γ) tako da je

$$R_{\sigma\alpha\beta\gamma} = -R_{\alpha\sigma\beta\gamma} \quad \text{i} \quad R_{\sigma\alpha\beta\gamma} = -R_{\sigma\alpha\gamma\beta}. \tag{5.92}$$

Pomoću dvodimenzijskog alternirajućeg tenzora definiše se konstanta

$$K = \frac{1}{4}\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma\beta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{5.93}$$

(vidi primer 54) koja je invarijanta površi i naziva se Gausova krivina ili totalna krivina. U zadacima na kraju ovog poglavlja pokazano je da se Riman-Kristofelov tenzor površine može izraziti preko totalne krivine i alternirajućeg tenzora kao

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta}. \tag{5.94}$$

Da bi se izvela neka svojstva srednje krivine H i totalne krivine K, posmatra se drugi izvod tenzora x^r_α

$$x^r_{\alpha,\beta\gamma} = \frac{\partial x^r_{\alpha,\beta}}{\partial u^\gamma} + \begin{Bmatrix}r\\ m\ n\end{Bmatrix}_g x^r_{\alpha,\beta}x^n_\gamma - \begin{Bmatrix}\delta\\ \alpha\ \gamma\end{Bmatrix}_a x^r_{\delta,\beta} - \begin{Bmatrix}\delta\\ \beta\ \gamma\end{Bmatrix}_a x^r_{\alpha,\gamma} \tag{5.95}$$

koji zadovoljava relaciju

$$x^r_{\alpha,\beta\gamma} - x^r_{\alpha,\gamma\beta} = R^{\delta}_{.\alpha\beta\gamma}x^r_\delta. \tag{5.96}$$

Pomoću relacije (5.96) mogu se izvesti neke zanimljive veze između tenzora $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, srednje krivine H i totalne krivine K.

Tenzorski izvod jednačine (5.71) može se napisati u obliku

$$x^i_{\alpha,\beta\gamma} = b_{\alpha\beta,\gamma}n^i + b_{\alpha\beta}n^i_{,\gamma} \tag{5.97}$$

gde je

$$b_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\alpha} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \alpha\ \gamma \end{Bmatrix}_a b_{\sigma\beta} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \beta\ \gamma \end{Bmatrix}_a b_{\alpha\sigma}. \tag{5.98}$$

Pomoću Weingarten-ove formule, date jednačinom (5.80), može se jednačina (5.97) izraziti u obliku

$$x^i_{\alpha,\beta\gamma} = b_{\alpha\beta,\gamma} n^i - b_{\alpha\beta} a^{\tau\sigma} b_{\tau\gamma} x^i_\sigma. \tag{5.99}$$

a pomoću jednačina (5.98) i (5.99) može se ustanoviti da važi

$$x^r_{\alpha,\beta\gamma} - x^r_{\alpha,\gamma\beta} = (b_{\alpha,\beta\gamma} - b_{\alpha\gamma,\beta}) n^r - a^{\tau\delta}(b_{\alpha\beta} b_{\tau\gamma} - b_{\alpha\gamma} b_{\tau\beta}) x^r_\delta. \tag{5.100}$$

Izjednačavanjem rezultata iz jednačina (5.96) i (5.100) dolazi se do relacije

$$R^\delta_{.\alpha\beta\gamma} x^r_\delta = (b_{\alpha,\beta\gamma} - b_{\alpha\gamma,\beta}) n^r - a^{\tau\delta}(b_{\alpha\beta} b_{\tau\gamma} - b_{\alpha\gamma} b_{\tau\beta}) x^r_\delta. \tag{5.101}$$

Množenjem jednačine (5.101) sa n_r i korišćenjem rezultata iz jednačine (5.76) dobija se Codazzi-eva jednačina

$$b_{\alpha\beta,\gamma} - b_{\alpha\gamma,\beta} = 0. \tag{5.102}$$

Množenjem jednačine (5.101) sa $g_{rm} x^m_\sigma$ i pojednostavljenjem može se izvesti Gausova jednačina površine

$$R_{\sigma\alpha\beta\gamma} = b_{\alpha\gamma} b_{\sigma\beta} - b_{\alpha\beta} b_{\sigma\gamma}, \tag{5.103}$$

a pomoću ove jednačin može se zapisati jednačina (5.94) kao

$$K\varepsilon_{\sigma\alpha}\varepsilon_{\beta\gamma} = b_{\alpha\gamma} b_{\sigma\beta} - b_{\alpha\beta} b_{\sigma\gamma}. \tag{5.104}$$

Drugačiji oblik jednačine (5.104) dobija se pomoću jednačine (5.83) i relacije $a_{\alpha\beta} = -a^{\sigma\gamma}\varepsilon_{\sigma\alpha}\varepsilon_{\beta\gamma}$. Neka čitalac za vežbu pokaže da se tako dolazi do

$$-K a_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} - a^{\sigma\gamma} b_{\sigma\gamma} b_{\alpha\beta}. \tag{5.105}$$

Ako se srednja krivina definiše sa

$$H = \frac{1}{2} a^{\sigma\gamma} b_{\sigma\gamma}, \tag{5.106}$$

tada se jednačina (5.105) može zapisati u obliku

$$c_{\alpha\beta} - 2H b_{\alpha\beta} + K a_{\alpha\beta} = 0. \tag{5.107}$$

Množenjem jednačine (5.107) sa $du^\alpha du^\beta$ i sabiranjem nalazi se

$$C - 2\,H\,B + K\,A = 0 \tag{5.108}$$

o povezuje prvu, drugu i treću osnovnu kvadratnu formu.

PRIMER 55. U dvodimenzijskom prostoru Riemann-Christoffel-ov tenzor ima samo jednu nezavisnu komponentu različitu od nule: R_{1212} (vidi zadatak 21 na kraju ovog poglavlja). Posledično, jednačina (5.104) se može napisati u obliku $K\sqrt{a}e_{12}\sqrt{a}e_{12} = b_{22}b_{11} - b_{21}b_{12}$ i rešiti po Gausovoj krivini K. Tako se nalazi

$$K = \frac{b_{22}b_{11} - b_{12}b_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{b}{a} = \frac{R_{1212}}{a}. \tag{5.109}$$

5.10 KRIVINA POVRŠI

Kod površinske krive $u^\alpha = u^\alpha(s)$, $\alpha = 1, 2$ koja leži na površi $x^i = x^i(u^1, u^2)$, $i = 1, 2, 3$, reč je o dvodimenzijskom prostoru unutar trodimenzijskog prostora. Tako, ako je $t^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds}$ jedinični tangentni vektor na površinskoj krivoj važi $a_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds} = a_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta = 1$. Ovaj isti vektor može se prikazati i kao jedinični tangentni vektor na prostornu krivu $x^i = x^i(u^1(s), u^2(s))$, tj. $T^i = \frac{dx^i}{ds}$. Dugim rečima važiće $g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = g_{ij}T^iT^j = 1$. Površinski vektor t^α i prostorni vektor T^i povezani su relacijom

$$T^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{du^\alpha}{ds} = x^i_\alpha t^\alpha. \tag{5.110}$$

Površinski vektor t^α je jedinični tako da je $a_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta = 1$. Ako se izvrši prâvo diferenciranje ove jednačine po parametru s, dobija se $a_{\alpha\beta}t^\alpha\frac{\delta t^\beta}{\delta s} = 0$, što pokazuje da je površinski vektor $\frac{\delta t^\alpha}{\delta s}$ upravan na površinski vektor t^α. Neka u^α označava jedinični normalni vektor u ravni površi koji je ortogonalan na tangentni vektor t^α. Pravac vektora u^α bira se tako da je $\varepsilon_{\alpha\beta}t^\alpha u^\beta = 1$. Zato postoji skalar $\kappa_{(g)}$ takav da je

$$\frac{\delta t^\alpha}{\delta s} = \kappa_{(g)}u^\alpha, \tag{5.111}$$

gde se skalar $\kappa_{(g)}$ naziva *geodezijska krivina krive*. Na sličan način može se pokazati da je $\frac{\delta u^\alpha}{\delta s}$ površinski vektor ortogonalan na t^α. Neka je $\frac{\delta u^\alpha}{\delta s} = \alpha t^\alpha$ gde skalarnu konstantu α treba odrediti. Prâvim diferenciranjem relacije $a_{\alpha\beta}t^\alpha u^\beta = 0$ i pojednostavljenjem nalazi se da je $\alpha = -\kappa_{(g)}$ i zato

$$\frac{\delta u^\alpha}{\delta s} = -\kappa_{(g)}t^\alpha. \tag{5.112}$$

Jednačine (5.111) i (5.112) se nazivaju Frene-Seret-ove formule za krivu u odnosu na površ.

Apsolutni izvod jednačine (5.110) po parametru s dovodi do

$$\frac{\delta T^i}{\delta s} = x^i_\alpha \frac{\delta t^\alpha}{\delta s} + x^i_{\alpha,\beta} \frac{du^\beta}{ds} t^\alpha. \tag{5.113}$$

Kada se kriva posmatra kao prostorna kriva koriste se Freneove formule (5.13), kada se posmatra kao površinska kriva koriste se Freneove formule (5.111) i (5.112). Na taj način se jednačina (5.113) može zapisati u obliku

$$\kappa N^i = x^i_\alpha \kappa_{(g)} u^\alpha + x^i_{\alpha,\beta} t^\beta t^\alpha. \tag{5.114}$$

Pomoću rezultata iz jednačine (5.71) i jednačine (5.114) dobija se

$$\kappa N^i = \kappa_{(g)} u^i + b_{\alpha\beta} n^i t^\alpha t^\beta \tag{5.115}$$

gde je u^i prostorni vektor ekvivalentan površinskom vektoru u^α. Ako je θ ugao između površinske normale n^i i glavne normale N^i, tada je $\cos\theta = n_i N^i$, te se množenjem jednačine (5.115) sa n_i dobija

$$\kappa \cos\theta = b_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta. \tag{5.116}$$

Posledično, veličina $\kappa\cos\theta$ ostaje konstantna za sve krive na površi sa istim tangentnim vektorom t^α. Ovaj rezltat je poznat pod nazivom Meusnier-ova teorema. Zapaziti da je $\kappa\cos\theta = \kappa_{(n)}$ normalna komponente krivine, a da je $\kappa\sin\theta = \kappa_{(g)}$ geodezijska komponenta krivine. Zato se jednačina (5.116) zapisuje kao

$$\kappa_{(n)} = b_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta \tag{5.117}$$

što predstavlja normalnu krivinu površi u pravcu t^α. Jednačina (5.117) može se napisati i u obliku

$$\kappa_{(n)} = b_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} = \frac{B}{A} \tag{5.118}$$

što je odnos kvadratnih formi.

Pravci na površi za koje $\kappa_{(n)}$ ima maksimalnu ili minimalnu vrednost određuju se iz jednačine (5.118) koja se može prepisati kao

$$(b_{\alpha\beta} - \kappa_{(n)} a_{\alpha\beta}) \lambda^\alpha \lambda^\beta = 0. \tag{5.119}$$

Pravac koji daje maksimum ili minimum vrednosti $\kappa_{(n)}$ mora tada zadovoljavati

$$(b_{\alpha\beta} - \kappa_{(n)} a_{\alpha\beta}) \lambda^\beta = 0 \tag{5.120}$$

tako da $\kappa_{(n)}$ mora biti koren jednačine

$$\det(b_{\alpha\beta} - \kappa_{(n)} a_{\alpha\beta}) = 0. \tag{5.121}$$

Razvijeni oblik jednačine (5.121) je

$$\kappa_{(n)}^2 - a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} \kappa_{(n)} + \frac{b}{a} = 0 \tag{5.122}$$

gde su $a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ i $b = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$. Pomoću definicije date u jednačini (5.106) i rezultata datog jednačinom (5.109), može se jednačina (5.122) zapisati u obliku

$$\kappa_{(n)}^2 - 2H\kappa_{(n)} + K = 0. \tag{5.123}$$

Koreni $\kappa_{(1)}$ i $\kappa_{(2)}$ jednačine (5.123) tada zadovoljavaju relacije

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_{(1)} + \kappa_{(2)}) \tag{5.124}$$

i

$$K = \kappa_{(1)}\kappa_{(2)}. \tag{5.125}$$

Ovde je H srednja vrednost glavnih krivina, a K je Gausova ili totalna krivina koja proizvod glavnih krivina. Lako je proveriti da su

$$H = \frac{Eg - 2fF + eG}{2(EG - F^2)} \quad \text{i} \quad K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

invarijante dobijene iz površinske metrike i tenzora krivine.

5.11 TEORIJA RELATIVNOSTI

Isaac Newton i Albert Einstein imali su različit pogled na svet što se tiče opisa gravitacije i kretanja planeta. Ovde se u kratkom uvodu u teoriju relativnosti upoređuju njutnovske jednačine sa relativističkim jednačinama za opis planetarnog kretanja. Prvo se rezimiraju njutnovski sistemi.

Njutn je posmatrao planetarno kretanje kao problem više tela, no u cilju jednostavnosti ovde se posmatra problem samo dva tela, recimo Sunca i neke planete pod pretpostavkom da se kretanje odvija u ravni. Njutnov zakon gravitacije tvrdi da se dve mase m i M privlače jedna ka drugoj silom intenziteta $\frac{GmM}{\rho^2}$, gde je G konstanta, ρ rastojanje između masa, m je masa planete a M masa Sunca. Ako se konstruiše x, y ravan u kojoj leže obe mase tako da je u ishodištu lociran centar mase Sunca, tada jedinični vektor $\hat{\mathbf{e}}_\rho = \cos\phi\hat{\mathbf{e}}_1 + \sin\phi\hat{\mathbf{e}}_2$ u ishodištu koordinatnog sistema pokazuje u pravcu mase m. Vektor sile kojom masa M privlači masu m dat je relacijom

$$\vec{F} = \frac{-GmM}{\rho^2}\hat{\mathbf{e}}_\rho. \tag{5.126}$$

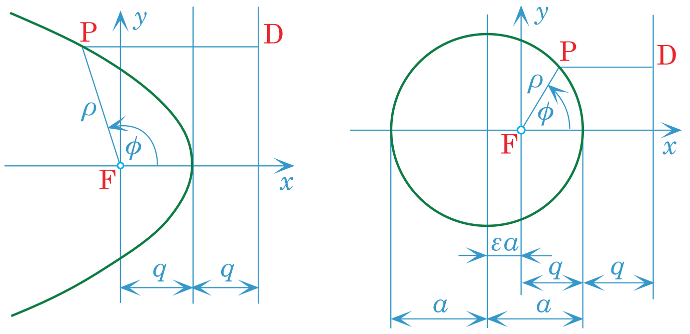

Figure 5.2. Parabolični i eliptični konusni preseci.

Jednačina kretanja mase m u odnosu na masu M dobija se iz drugog Njutnovog zakona. Neka $\vec{\rho} = \rho\hat{\mathbf{e}}_\rho$ označava vektor položaja mase m u odnosu na ishodište, pa se Njutnov drugi zakon može zapisati u jednom od sledećih oblika

$$\vec{F} = \frac{-GmM}{\rho^2}\hat{\mathbf{e}}_\rho = m\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{-GmM}{\rho^3}\vec{\rho}. \tag{5.127}$$

Na osnovu ovih jednačina može se pokazati da je kretanje mase m opisano konusnim presekom.

Treba se podsetiti da je konusni presek definisan kao geometrijsko mesto tačaka P(x, y) takvo da mu je rastojanje od fiksne tačke (ili tačaka), zvane *fokus* (fokusi), proporcionalno rastojanju tačke P od fiksne prave, zvane *direktrisa*, koja ne prolazi kroz fokus. Konstanta proporcionalnosti naziva se *ekscentricitet* i obeležava se sa ε. Za $\varepsilon = 1$ dobija se parabola, za $0 \leq \varepsilon \leq 1$ dobija se elipsa, za $\varepsilon > 1$ dobija se hiperbola, a ako je $\varepsilon = 0$ konusni pesek je krug.

U skadu sa slikom 5.2., konusni presek se definiše preko odnosa $\frac{\overline{\mathrm{FP}}}{\overline{\mathrm{PD}}} = \varepsilon$ gde su duži $\overline{\mathrm{FP}} = \rho$ i $\overline{\mathrm{PD}} = 2q - \rho\cos\phi$. Iz ekscentriciteta ε može se naći radijus ρ i time dobiti zapis konusnog preaeka u polarnim koordinatama

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\phi} \tag{5.128}$$

gde je $p = 2q\varepsilon$ i naziva se polu-parametar konusnog preseka (zapaziti da je $\rho = p$ za $\phi = \frac{\pi}{2}$). Polarni ugao ϕ naziva se prâva anomalija orbite. Opštiji oblik gornje jednačine je

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\phi - \phi_0)} \quad \text{ili} \quad u = \frac{1}{\rho} = A[1 + \varepsilon\cos(\phi - \phi_0)], \tag{5.129}$$

gde je ϕ_0 proizvoljna početna anomalija. Kod orbita koristi se još jedan parametar a, tzv. polu-glavne ose eliptične orbite. Parametri konusnog preseka q, p, ε, a

međusobno su povezani sledećim relacijama

$$\frac{p}{1+\varepsilon} = q = a(1-\varepsilon) \quad \text{ili} \quad p = a(1-\varepsilon^2). \tag{5.130}$$

Da se pokaže da jednačina (5.127) dovodi do konusnog preseka za kretanje mase m u odnosu na masu M, pokazaće se da je jedan od oblika rešenja jednačine (5.127) dat jednačinom (5.128). Da se to verifikuje koristiće se sledeći vektorski identiteti:

$$\begin{aligned} \vec{\rho} \times \hat{\mathbf{e}}_\rho &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\vec{\rho} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}\right) &= \vec{\rho} \times \frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} \\ \hat{\mathbf{e}}_\rho \cdot \frac{d\hat{\mathbf{e}}_\rho}{dt} &= 0 \\ \hat{\mathbf{e}}_\rho \times \left(\hat{\mathbf{e}}_\rho \times \frac{d\hat{\mathbf{e}}_\rho}{dt}\right) &= -\frac{d\hat{\mathbf{e}}_\rho}{dt}. \end{aligned} \tag{5.131}$$

Iz jednačine (5.127) nalazi se

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\rho} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}\right) = \vec{\rho} \times \frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = -\frac{GM}{\rho^2}\vec{\rho} \times \hat{\mathbf{e}}_\rho = \vec{0} \tag{5.132}$$

što se može integraliti:

$$\vec{\rho} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{h} = \text{const.} \tag{5.133}$$

Veličina $\vec{H} = \vec{\rho} \times m\vec{V} = \vec{\rho} \times m\frac{d\vec{\rho}}{dt}$ je moment količine kretanja mase m, te je $\vec{h}$ predstavlja moment količine kretanja po jedinici mase. Jednačina (5.133) govori da je u problemu dva tela $\vec{h}$ konstantno. Kako je $\vec{h}$ konstantno, biće

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\vec{V} \times \vec{h}\right) &= \frac{d\vec{V}}{dt} \times \vec{h} = -\frac{GM}{\rho^2}\hat{\mathbf{e}}_\rho \times \left(\vec{\rho} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}\right) \\ &= -\frac{GM}{\rho^2}\hat{\mathbf{e}}_\rho \times \left[\vec{\rho}\hat{\mathbf{e}}_\rho \times (\left(\rho\frac{d\hat{\mathbf{e}}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\hat{\mathbf{e}}_\rho\right)\right] \\ &= -\frac{GM}{\rho^2}\hat{\mathbf{e}}_\rho \times \left(\hat{\mathbf{e}}_\rho \times \frac{d\hat{\mathbf{e}}_\rho}{dt}\right)\rho^2 = GM\frac{d\hat{\mathbf{e}}_\rho}{dt} \end{aligned}$$

i posledično integracija dovodi do

$$\vec{V} \times \vec{h} = GM\hat{\mathbf{e}}_\rho + \vec{C}$$

gde je $\vec{C}$ vektorska konstanta integracije. Formula za trostruki skalarni proizvod daje

$$\vec{\rho} \cdot (\vec{V} \times \vec{h}) = \vec{h} \cdot \left(\vec{\rho} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}\right) = h^2 = GM\vec{\rho} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\rho + \vec{\rho} \cdot \vec{C}$$

ili

$$h^2 = GM\rho + C\rho\cos\phi \tag{5.134}$$

gde je ϕ ugao između vektora $\vec{C}$ i $\vec{\rho}$. Iz jednačine (5.134) nalzi se

$$\rho = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\phi} \tag{5.135}$$

gde su $p = h^2/GM$ and $\varepsilon = C/GM$. Ovaj rezultat je poznati *prvi Kepler-ov zakon* i implicira da za $\varepsilon < 1$ masa m opisuje eliptičnu orbitu kada je Sunce u jednom fokusu.

Jednačina (5.129) može se izvesti i na drugačiji način. Prikazaće se i taj alternativan način koji će biti kasnije od koristi. Iz jednačine (5.127) nalazi se

$$2\frac{d\vec{\rho}}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{\rho}}{dt}\cdot\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right) = -2\frac{GM}{\rho^3}\vec{\rho}\cdot\frac{d\vec{\rho}}{dt} = -\frac{GM}{\rho^3}\frac{d}{dt}(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho}). \tag{5.136}$$

Ovu jednačinu korisno je transformisati u sferne koordinate ρ, θ, ϕ. U sfernim koordinatama tenzorske komponente brzine su $V^1 = \frac{d\rho}{dt}$, $V^2 = \frac{d\theta}{dt}$, $V^3 = \frac{d\phi}{dt}$, a fizičke komponente brzine su $V_\rho = \frac{d\rho}{dt}$, $V_\theta = \rho\frac{d\theta}{dt}$, $V_\phi = \rho\sin\theta\frac{d\phi}{dt}$, tako da se vektor brzine može zapisati

$$\vec{V} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho\frac{d\theta}{dt}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \rho\sin\phi\frac{d\phi}{dt}\hat{\mathbf{e}}_\phi. \tag{5.137}$$

Zamenom jednačine (5.137) u jednačinu (5.136) dobija se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \rho^2\sin^2\phi\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right] &= -\frac{GM}{\rho^3}\frac{d}{dt}(\rho^2)\\ &= -\frac{2GM}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} = 2GM\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)\end{aligned}$$

što se može neposredno integraliti u

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \rho^2\sin^2\phi\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{2GM}{\rho} - E \tag{5.138}$$

gde je $-E$ integraciona konstanta. Za specijalni slučaj ravanske orbite treba staviti konstantan ugao $\theta = \frac{\pi}{2}$, tako da se jednačina (5.138) svodi na

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= 2\frac{GM}{\rho} - E\\ \left(\frac{d\rho}{d\phi}\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= 2\frac{GM}{\rho} - E.\end{aligned} \tag{5.139}$$

Za specijalni slučaj ravanskog kretanja važi i

$$\left|\vec{\rho} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}\right| = \rho^2 \frac{d\phi}{dt} = h, \tag{5.140}$$

što se može upotrebiti za eliminisanje $\frac{d\phi}{dt}$ iz jednačine (5.139), te dobiti rezultat

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2 = \frac{2GM}{h^2}\rho^3 - \frac{E}{h^2}\rho^4. \tag{5.141}$$

Smenom $\rho = \frac{1}{u}$ jednačina (5.141) postaje

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 - \frac{2GM}{h^2}u + \frac{E}{h^2} = 0 \tag{5.142}$$

što je oblik koje će se upotrebiti kasnije. Zapaziti da se i u jednačini (5.141) i u jednačini (5.142) mogu razdvojiti promenljive i integracijom dobiti (5.129).

Za uvod u teoriju relativnosti nužno je podsetiti se još jednog Njutnovog problema: relativnog kretanja dva inercijalna sistema. Neka je reč o dva inercijalna sistema, recimo S i $\bar{S}$, prikazna respektivno crvenim i zelenim osama na slici 5.3.. Sistem $\bar{S}$ se kreće u x pravcu brzinom v u odnosu na sistem S.

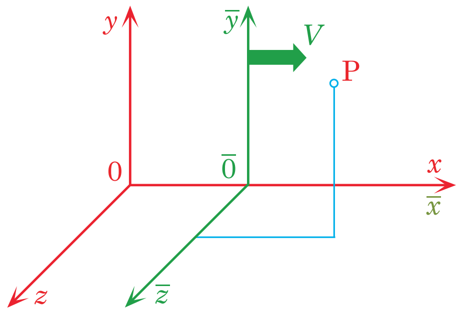

Figure 5.3. Relativno kretanje dvaju inercijalnih sistema.

Ako su u trenutku $t = 0$ satovi jednako postavljeni u oba sistema, tada se u trenutku t tačka P$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ u sistemu $\bar{S}$ može opisati transformacionim jednačinama

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + v\bar{t} \\ y &= \bar{y} \\ z &= \bar{z} \\ t &= \bar{t} \end{aligned} \qquad \text{ili} \qquad \begin{aligned} \bar{x} &= x - vt \\ \bar{y} &= y \\ \bar{z} &= z \\ \bar{t} &= t. \end{aligned} \tag{5.143}$$

Ove transformacione jednačine njutnovske relativnosti poznate su i pod imenom Galilejove transformacije.

Do Ajnštajna principom relativnosti zahtevano je da brzine budu aditivne i da se pokoravaju Galilejovom pravilu sabiranja brzina

$$V_{\mathrm{P/R}} = V_{\mathrm{P/Q}} + V_{\mathrm{Q/R}}. \tag{5.144}$$

Drugi rečima, brzina tačke P u odnosu na tačku R jednaka je brzini tačke P u odnosu na tačku Q plus brzina tačke Q u odnosu na tačku R. Na primer, osoba (P) koja se kreće na sever brzinom od 3 km/h u vozu (Q) koji se takođe kreće na sever ali brzinom od 60 km/h u odnosu na tlo (R) ima brzinu od 63 km/h u odnosu na tlo. Šta se dešava kada je objekat P svetlost koja se kreće u vozu (Q) koji se kreće brzinom V u odnosu na tlo? Da li su brzine tada aditivne? Pitanje ovakvog tipa vodi ka čuvenom Michelson-Morley-evom eksperimentu za koji se smatra da polazište teorije relativnosti. Ajnštajnov odgovor na gornje pitanje bio je "NE" i zahtevao je da $V_{\mathrm{P/R}} = V_{\mathrm{P/Q}} = c =$ brzina svetlosti bude univerzalna konstanta.

Za razliku od njutnovskih jednačina, Ajnštajn je posmatrao kretanje svetlosti od ishodišta 0 i $\bar{0}$ sistema S i $\bar{S}$. Ako se sistem $\bar{S}$ kreće brzinom v u odnosu na sistem S i ako je u trenutku $t = 0$ poslat svetlosni signal iz sistema S u sistem $\bar{S}$, tada će se on prostirati sfernim talasnim frontom i ležati na sferi

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \tag{5.145}$$

gde je c brzina svetlosti. Obrnuto, ako je svetlosni signal poslat iz sistema $\bar{S}$ u trenutku $\bar{t} = 0$, on će ležati na sfernom talasnom frontu

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = c^2\bar{t}^2. \tag{5.146}$$

Zapaziti da njutnovske jednačine (5.143) ne zadovoljavaju jednačine (5.145) i (5.146). Ako je $y = \bar{y}$ i $z = \bar{z}$ tada prostorne promenljive $(x, \bar{x})$ i vremenske promenljive $(t, \bar{t})$ moraju biti povezane. Ajnštajn je predložio sledeće transformacione jednačine između ovih promenljivih

$$\bar{x} = \gamma(x - vt) \quad \text{i} \quad x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t}) \tag{5.147}$$

gde konstantu γ treba odrediti. Iz diferencijala jednačina (5.147)

$$d\bar{x} = \gamma(dx - vdt) \quad \text{i} \quad dx = \gamma(d\bar{x} + vd\bar{t}) \tag{5.148}$$

mogu se dobiti odnosi

$$\frac{d\bar{x}}{\gamma(d\bar{x} + vd\bar{t})} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{dx} \quad \text{ili} \quad \frac{1}{\gamma(1 + \frac{v}{\frac{d\bar{x}}{dt}})} = \gamma(1 - \frac{v}{\frac{dx}{dt}}). \tag{5.149}$$

Kada je $\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{dx}{dt} = c$, brzina svetlosti, jednačina (5.149) zahteva da je

$$\gamma^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \quad \text{ili} \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \tag{5.150}$$

Iz jednačina (5.147) može se eliminisati $\bar{x}$ i naći

$$\bar{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right). \tag{5.151}$$

Tako se njutnovske jednačine (5.143) mogu zameniti sa relativističkim transformacionim jednačinama

$$\begin{array}{lcl} x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t}) & & \bar{x} = \gamma(x - vt) \\ y = \bar{y} & \text{ili} & \bar{y} = y \\ z = \bar{z} & & \bar{z} = z \\ t = \gamma\left(\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x}\right) & & \bar{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{array} \tag{5.152}$$

gde je γ dato jednačinom (5.150). Ove jednačine su poznate pod imenom *Lorentz-ova transformacija*. Zapaziti da za $v << c$, sledi $\frac{v}{c^2} \approx 0$ i $\gamma \approx 1$, te jednačine (5.152) aproksimiraju jednačine (5.143). Jednačine (5.152) identički zadovoljavaju jednačine (5.145) i (5.146) što se proverava neposrednom zamenom. Dalje, posrednim diferenciranje iz relacija (5.147) dobija se

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{d\bar{x}}{dt} + v}{1 + \frac{\frac{d\bar{x}}{dt}}{c}\frac{v}{c}}. \tag{5.153}$$

Jednačina (5.153) predstavlja Ajnštajnovo pravilo sabiranja brzina kojim se zamenjuje ranije njutnovsko pravilo dato jednačinom (5.144). Korišćenjem oznaka iz jednačine (5.144) može se jednačina (5.153) prepisati u sledećem obliku

$$V_{\mathrm{P/R}} = \frac{V_{\mathrm{P/Q}} + V_{\mathrm{Q/R}}}{1 + \frac{V_{\mathrm{P/Q}}}{c}\frac{V_{\mathrm{Q/R}}}{c}}. \tag{5.154}$$

Zapaziti da za $V_{\mathrm{P/Q}} << c$ i $V_{\mathrm{Q/R}} << c$ jednačina (5.154) aproksimira jednačinu (5.144). Kada $V_{\mathrm{P/Q}}$ i $V_{\mathrm{Q/R}}$ teže ka brzini svetlosti dobija se

$$\lim_{\substack{V_{\mathrm{P/Q}} \to c \\ V_{\mathrm{Q/R}} \to c}} \frac{V_{\mathrm{P/Q}} + V_{\mathrm{Q/R}}}{1 + \frac{V_{\mathrm{P/Q}}}{c}\frac{V_{\mathrm{Q/R}}}{c}} = c \tag{5.155}$$

što se slaže sa Ajnštajnovom hipotezom da brzina svetlosti invarijanta.

Dalje će se nastaviti razmatranjem pitanja suštine gravitacije. Ajnštajn je smatrao da su prostor i vreme povezani i posmatrao kretanje planeta po geodezijskim linijama u prostorno-vremenskom kontinuumu. Treba sa podsetiti da su geodezijske linije date diferencijalnim jednačinama

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0, \tag{5.156}$$

gde je s dužina luka. Ove jednačine treba pridružiti četvorodimenzijskom prostorno-vremenskom metrikom g_{ij} gde indeksi i, j primeju vrednosti 1, 2, 3, 4 a x^i su generalisane koordinate. Ajnštajn je postavi pitanje: “Može li se uvesti prostorno-vremenska metrika g_{ij} takva da jednačine (5.156) nekako reprodukuju zakon gravitacionog privlačenja $\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} + \frac{GM}{\rho^3}\vec{\rho} = 0$?” Tada se kretanje planeta može posmatrati kao optimizirano kretanje u prostorno-vremenskom kontinuumu gde metrika prostora simuliše zakon gravitacionog privlačenja. Ajnštajn je smatrao da takvo kretanje mora biti u vezi sa krivinom prostora koja se može dobiti iz Riman-Kristofelovog tenzora R^i_{jkl}. Metrika koja se traži g_{ij}, $i, j = 1, 2, 3, 4$ ima 16 komponenata. Konjugovani metrički tenzor g^{ij} je definisan tako da je $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$, a element kvadrata dužine luka je $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$. Ajnštajn je mislio da se ta metrika može dobiti iz Riman-Kristofelovog tenzora krivine koji, za $n = 4$, ima 256 komponenata od kojih su samo 20 linearno nezavisnih. Ovo izgleda ogroman broj jednačina iz kojeg bi se dobio zakon gravitacionog privlačenja te je Ajnštajn posmatrao kontakovan tenzor

$$G_{ij} = R^t_{ijt} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left\{\begin{matrix} n \\ i\ n \end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x^n}\left\{\begin{matrix} n \\ i\ j \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} m \\ i\ n \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} n \\ m\ j \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} m \\ i\ j \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} n \\ m\ n \end{matrix}\right\}. \quad (5.157)$$

Sferne koordinate (ρ, θ, ϕ) sugerišu metriku oblika

$$ds^2 = -(d\rho)^2 - \rho^2(d\theta)^2 - \rho^2\sin^2\theta(d\phi)^2 + c^2(dt)^2$$

gde su $g_{11} = -1$, $g_{22} = -\rho^2$, $g_{33} = -\rho^2\sin^2\theta$, $g_{44} = c^2$ i $g_{ij} = 0$ za $i \neq j$. Negativni predznaci su uvedeni da bi $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = c^2 - v^2$ bilo pozitivno kada je $v < c$ i brzina ne prelazi brzinu svetlosti c. Međutim, ovakva metrika se ne može upotrebiti jer se tenzor krivine anulira. Sferna simetrija posmatranog problema sugeriše da se g_{11} i g_{44} moraju menjati dok g_{22} i g_{33} moraju ostati isti. Neka je $(x^1, x^2, x^3, x^4) = (\rho, \theta, \phi, t)$ i neka su

$$g_{11} = -e^u, \quad g_{22} = -\rho^2, \quad g_{33} = -\rho^2\sin^2\theta, \quad g_{44} = e^v \quad (5.158)$$

gde su u i v nepoznate funkcije od ρ koje treba odrediti. Tako se dobija konjugovani metrički tenzor

$$g^{11} = -e^{-u}, \quad g^{22} = \frac{-1}{\rho^2}, \quad g^{33} = \frac{-1}{\rho^2\sin^2\theta}, \quad g^{44} = e^{-v} \quad (5.159)$$

i $g^{ij} = 0$ za $i \neq j$. Ovakav izbor metrike daje element kvadrata dužine luka

$$ds^2 = -e^u(d\rho)^2 - \rho^2(d\theta)^2 - \rho^2\sin^2\theta(d\phi)^2 + e^v(dt)^2 \quad (5.160)$$

i Kristofelove simbole različite od nule:

$$\begin{array}{llll}
\left\{\begin{matrix} 1 \\ 1\ 1 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\frac{du}{d\rho} & \left\{\begin{matrix} 2 \\ 1\ 2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\rho} & \left\{\begin{matrix} 3 \\ 1\ 3 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\rho} & \left\{\begin{matrix} 4 \\ 1\ 4 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\frac{dv}{d\rho} \\
\left\{\begin{matrix} 1 \\ 2\ 2 \end{matrix}\right\} = -\rho e^{-u} & \left\{\begin{matrix} 2 \\ 2\ 1 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\rho} & \left\{\begin{matrix} 3 \\ 2\ 3 \end{matrix}\right\} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} & \left\{\begin{matrix} 4 \\ 4\ 1 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\frac{dv}{d\rho}. \\
\left\{\begin{matrix} 1 \\ 3\ 3 \end{matrix}\right\} = -\rho e^{-u}\sin^2\theta & \left\{\begin{matrix} 2 \\ 3\ 3 \end{matrix}\right\} = -\sin\theta\cos\theta & \left\{\begin{matrix} 3 \\ 3\ 1 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\rho} & \\
\left\{\begin{matrix} 1 \\ 4\ 4 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}e^{v-u}\frac{dv}{dr} & & \left\{\begin{matrix} 3 \\ 3\ 2 \end{matrix}\right\} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} &
\end{array}$$

(5.161)

Pomoću ovih izraza nalaze se G_{ij} različiti od nule iz jednačina (5.157)

$$\begin{aligned}
G_{11} &= \tfrac{1}{2}\tfrac{d^2v}{d\rho^2} + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{dv}{d\rho}\right)^2 - \tfrac{1}{4}\tfrac{du}{d\rho}\tfrac{dv}{d\rho} - \tfrac{1}{\rho}\tfrac{du}{d\rho}\\
G_{22} &= e^{-u}\left(1 + \tfrac{1}{2}\rho\tfrac{dv}{d\rho} - \tfrac{1}{2}\rho\tfrac{du}{d\rho} - e^u\right)\\
G_{33} &= e^{-u}\left(1 + \tfrac{1}{2}\rho\tfrac{dv}{d\rho} - \tfrac{1}{2}\rho\tfrac{du}{d\rho} - e^u\right)\sin^2\theta\\
G_{44} &= -e^{v-u}\left[\tfrac{1}{2}\tfrac{d^2v}{d\rho^2} - \tfrac{1}{4}\tfrac{du}{d\rho}\tfrac{dv}{d\rho} + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{dv}{d\rho}\right)^2 + \tfrac{1}{\rho}\tfrac{dv}{d\rho}\right]
\end{aligned} \tag{5.162}$$

i $G_{ij} = 0$ za $i \neq j$. Pretpostavka da su $G_{ij} = 0$ za sve i, j dovodi do diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned}
\frac{d^2v}{d\rho^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{d\rho}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{du}{d\rho}\frac{dv}{d\rho} - \frac{2}{\rho}\frac{du}{d\rho} &= 0\\
1 + \frac{1}{2}\rho\frac{dv}{d\rho} - \frac{1}{2}\rho\frac{du}{d\rho} - e^u &= 0\\
\frac{d^2v}{d\rho^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{d\rho}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{du}{d\rho}\frac{dv}{d\rho} + \frac{2}{\rho}\frac{dv}{d\rho} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.163}$$

Oduzimanjem prve od ovih jednačina od treće daje

$$\frac{du}{d\rho} + \frac{dv}{d\rho} = 0 \quad \text{ili} \quad u + v = c_1 = \text{const.} \tag{5.164}$$

Tada druga od jednačina (5.163) postaje

$$\rho\frac{du}{d\rho} = 1 - e^u, \tag{5.165}$$

što se može integraliti razdvajanjem promenljivih i dobiti

$$e^u = \frac{1}{1 - \frac{c_2}{\rho}} \tag{5.166}$$

gde je c_2 integraciona konstanta. Tako se dobija

$$e^v = e^{c_1 - u} = e^{c_1}\left(1 - \frac{c_2}{\rho}\right). \tag{5.167}$$

Konstanta c_1 se bira tako da g_{44} teži ka c^2 kada ρ neograničeno raste. Time se dolazi do metrika

$$g_{11} = \frac{-1}{1 - \frac{c_2}{\rho}}, \quad g_{22} = -\rho^2, \quad g_{33} = -\rho^2\sin^2\theta, \quad g_{44} = c^2\left(1 - \frac{c_2}{\rho}\right) \tag{5.168}$$

gde još treba odrediti konstantu c_2. Metrike iz (5.168) se koriste da se diferencijalne jednačine (5.156) koje definišu geodezijske linije napišu u razvijenom obliku u četvorodimenzijskom prostoru:

$$\frac{d^2\rho}{ds^2}+\frac{1}{2}\frac{du}{d\rho}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2-\rho e^{-u}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2-\rho e^{-u}\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2+\frac{1}{2}e^{v-u}\frac{dv}{d\rho}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=0 \tag{5.169}$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2}+\frac{2}{\rho}\frac{d\theta}{ds}\frac{d\rho}{ds}-\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2=0 \tag{5.170}$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2}+\frac{2}{\rho}\frac{d\phi}{ds}\frac{d\rho}{ds}+2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\phi}{ds}\frac{d\theta}{ds}=0 \tag{5.171}$$

$$\frac{d^2t}{ds^2}+\frac{dv}{d\rho}\frac{dt}{ds}\frac{d\rho}{ds}=0. \tag{5.172}$$

Jednačina (5.170) je identički zadovoljena za ravanske orbite kod kojih je konstantno $\theta=\frac{\pi}{2}$. Za ovu vrednost θ pojednostavljuju se i jednačine (5.171) i (5.172) tako da se iz (5.171) dobija

$$\frac{d}{ds}\left(\rho^2\frac{d\phi}{ds}\right)=0 \quad \text{ili} \quad \rho^2\frac{d\phi}{ds}=c_4, \tag{5.173}$$

a iz jednačine (5.172)

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dt}{ds}e^v\right)=0 \quad \text{ili} \quad \frac{dt}{ds}e^v=c_5, \tag{5.174}$$

gde su c_4 i c_5 integracione konstante. Tako preostaje samo jednačina (5.169) koja određuje ρ. Zamenom rezulata iz (5.173) i (5.174), kao i relacije (5.160), svodi se jednačina (5.169) na

$$\frac{d^2\rho}{ds^2}+\frac{c_2}{2\rho^2}+\frac{c^2c_4^2}{2\rho^4}-\left(1-\frac{c_2}{\rho}\right)\frac{c_4^2}{\rho^3}=0. \tag{5.175}$$

Posrednim diferenciranjem je

$$\frac{d^2\rho}{ds^2}=\frac{d^2\rho}{d\phi^2}\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2+\frac{d\rho}{d\phi}\frac{d^2\phi}{ds^2}=\frac{d^2\rho}{d\phi^2}\frac{c_4^2}{\rho^4}+\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2\left(\frac{-2c_4^2}{\rho^5}\right)$$

te se jednačina (5.175) može prepisati u obliku

$$\frac{d^2\rho}{d\phi^2}-\frac{2}{\rho}\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2+\frac{c_2}{2}\frac{\rho^2}{c_4^2}+\frac{c_2}{2}-\left(1-\frac{c_2}{\rho}\right)\rho=0, \tag{5.176}$$

koji nakon smene $\rho = \frac{1}{u}$ daje

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - \frac{c_2}{2c_4^2} = \frac{3}{2}c_2u^2. \tag{5.177}$$

Množenjem jednačine (5.177) sa $2\frac{du}{d\phi}$ i integracijom po ϕ dobija se

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 - \frac{c^2}{c_4^2}u = c_2u^3 + c_6. \tag{5.178}$$

gde je c_6 integraciona konstanta. Za određivanje konstante c_6 potrebno je napisati jednačinu (5.160) za specialni slučaj $\theta = \frac{\pi}{2}$ i iskoristiti smene iz jednačina (5.173) i (5.174) da se dobije

$$e^u\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 = e^u\left(\frac{d\rho}{d\phi}\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 1 - \rho^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 + e^v\left(\frac{dt}{ds}\right)^2$$

ili

$$\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 + \left(1 - \frac{c_2}{\rho}\right)\rho^2 + \left(1 - \frac{c_2}{\rho} - \frac{c_5^2}{c^2}\right)\frac{\rho^4}{c_4^2} = 0. \tag{5.179}$$

Smena $\rho = \frac{1}{u}$ svodi ovu jednačinu na oblik

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 - c_2u^3 + \frac{1}{c_4^2} - \frac{c_2}{c_4^2}u - \frac{c_5^2}{c^2c_4^2} = 0. \tag{5.180}$$

Sada se, konačno, upoređivanjem jednačina (5.180) i (5.178) može izabrati

$$c_6 = \left(\frac{c_5^2}{c^2} - 1\right)\frac{1}{c_4^2}$$

tako da jednačina (5.178) dobija oblik

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 - \frac{c_2}{c_4^2}u + \left(1 - \frac{c_5^2}{c^2}\right)\frac{1}{c_4^2} = c_2u^3 \tag{5.181}$$

Sada se mogu uporediti relativistička jednačina (5.181) i njutnovska jednačina (5.142). Da se te dve jednačine slože biraju se konstante c_2, c_4, c_5 tako da je

$$\frac{c_2}{c_4^2} = \frac{2GM}{h^2} \quad \text{ili} \quad \frac{1 - \frac{c_5^2}{c^2}}{c_4^2} = \frac{E}{h^2}. \tag{5.182}$$

Kako su to dve jednačine po tri nepoznate koristi se dopunski uslov

$$\lim_{\rho\to\infty}\rho^2\frac{d\phi}{dt} = \lim_{\rho\to\infty}\rho^2\frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = h \tag{5.183}$$

koji se dobija iz jednačine (5.140). Zamenom jednačina (5.173) i (5.174) u jednačinu (5.183), sređivanjem i nalaženjem granične vrednosti dobija se

$$\frac{c_4 c^2}{c_5} = h. \tag{5.184}$$

Tako se, konačno, iz jednačina (5.182) i (5.184) nalaze tri integracione konstante

$$c_5^2 = \frac{c^2}{1+\frac{E}{c^2}}, \quad c_2 = \frac{2GM}{c^2}\frac{1}{1+\frac{E}{c^2}}, \quad c_4 = \frac{h}{c\sqrt{1+\frac{E}{c^2}}} \tag{5.185}$$

koje nakon zamene u jednačinu (5.180) dovode do diferencijalne jednačine

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 - \frac{2GM}{h^2}u + \frac{E}{h^2} = \frac{2GM}{c^2}\frac{1}{1+\frac{E}{c^2}}u^3. \tag{5.186}$$

Ako se obeleži $\alpha = \frac{c_2}{c_4^2} = \frac{2GM}{h^2}$ i $\beta = c_2 = \frac{2GM}{c^2}\frac{1}{1+E/c^2}$, tada se diferencijalna jednačina (5.186) može zapisati kao

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}\beta u^2. \tag{5.187}$$

Rešenje jednačine (5.142) je

$$u = \frac{1}{\rho} = A\left(1 + \varepsilon\cos(\phi - \phi_0)\right) \tag{5.188}$$

pa se pretpostavlja da je i rešenje jednačine (5.187) takvog opšteg oblika. Kako je A mala veličina može se učiniti pretpostavka da je rešenje jednačine (5.187) oblika (5.188) takvo da je ϕ_0 približno konstanta i da se menja vrlo sporo kao funkcija od $A\phi$. U tu svrhu treba primetiti da ako je $\phi_0 = \phi_0(A\phi)$, tada su $\frac{d\phi_0}{d\phi} = \phi_0' A$ i $\frac{d^2\phi_0}{d\phi^2} = \phi_0'' A^2$, gde primovi označavaju diferencirenje po argumentu funkcije, tj. $A\phi$ u ovom slučaju. Prvi i drugi izvod jednačine (5.188) su

$$\begin{aligned}
\frac{du}{d\phi} &= -\varepsilon A\sin(\phi-\phi_0)(1-\phi_0' A)\\
\frac{d^2u}{d\phi^2} &= \varepsilon A^3\sin(\phi-\phi_0)\phi_0'' - \varepsilon A\cos(\phi-\phi_0)(1 - 2A\phi_0' + A^2(\phi_0')^2)\\
&= -\varepsilon A\cos(\phi-\phi_0) + 2\varepsilon A^2\phi_0'\cos(\phi-\phi_0) + O(A^3).
\end{aligned}$$

Zamenom ovog u diferencijalnu jednačinu (5.187) dobija se jednakost

$$\begin{aligned}
2\varepsilon A^2\phi_0'\cos(\phi-\phi_0) + A - \frac{\alpha}{2} = \frac{3\beta}{2}&\left(A^2 + 2\varepsilon A^2\cos(\phi-\phi_0) + \varepsilon^2 A^2\cos^2(\phi-\phi_0)\right)\\
&+ O(A^3).
\end{aligned}$$

Kako je A malo članovi $O(A^3)$ se mogu zanemariti, te izjednačavanjem konstantnih članova i koeficijenata uz $\cos(\phi - \phi_0)$ dobijaju se jednačine

$$A - \frac{\alpha}{2} = \frac{3\beta}{2}A^2 \qquad 2\varepsilon A^2 \phi_0' = 3\beta\varepsilon A^2 + \frac{3\beta}{2}\varepsilon^2 A^2 \cos(\phi - \phi_0).$$

Smatrajući ϕ_0 pravom konstantom, ovaj sistem jednačina ima približno rešenje

$$A \approx \frac{\alpha}{2}, \qquad \phi_0 \approx \frac{3\beta}{2}A\phi + \frac{3\beta}{4}A\varepsilon \sin(\phi - \phi_0) \tag{5.189}$$

Rešenja data jednačinama (5.189) pokazuju da se ϕ_0 menja sporo sa vremenom. Ovom promenom ϕ_0, za ε manje od 1, poremećuje se eliptično kretanje. Ona izaziva sporu rotaciju polu-glavne osa elipse i to brzinom $\frac{d\phi_0}{dt}$. Ta spora brzina rotacije polu-glavne ose može se približno izračunati, recimo, na primeru planete Merkur, pomoću sledećih podataka

$$\begin{array}{ll}
G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ dyne cm}^2/\text{g}^2 & c = 3 \times 10^{10} \text{ cm/s} \\
M = 1.99 \times 10^{33} \text{ g} & \beta \approx \frac{2GM}{c^2} = 2.95 \times 10^5 \text{ cm} \\
a = 5.78 \times 10^{12} \text{ cm} & h \approx \sqrt{GMa(1-\varepsilon^2)} = 2.71 \times 10^{19} \text{ cm}^2/\text{s} \\
\varepsilon = 0.206 & \frac{d\phi}{dt} \approx \left(\frac{GM}{a^3}\right)^{1/2} \text{ sec}^{-1} \text{ Keplerov treći zakon}
\end{array} \tag{5.190}$$

U rezultatu se dobija

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi_0}{dt} &= \frac{d\phi_0}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} \approx \frac{3}{2}\beta A \frac{d\phi}{dt} \approx 3\left(\frac{GM}{ch}\right)^2 \left(\frac{GM}{a^3}\right)^{1/2} = 6.628 \times 10^{-14} \text{ s}^{-1} \\
&= 43.01 \text{ lučnih sekundi po stoleću.}
\end{aligned} \tag{1.5.192}$$

Spora promena Merkurove polu-glavne ose je opažena i izmerena i slaže se sa gornjom vrednošću. Njutnovska mehanika nije mogla ustanoviti ovakvu promenu Merkurove polu-glavne ose, dok je Ajnštajnova teorija relativnosti dala valjano pretskazanje. Rezultujuće rešenje jednačine (5.187) može se smatrati da je posledica zakrivljenosti prostorno-vremenskog kontinuuma.

Izjednačavanje sa nulo kontraktovanog tenzora krivine G_{ij} je samo jedan od mnogih uslova koji se mogu usvojiti u cilju nalaženja metrike prostorno-vremenskog kontinuuma. Svaka pretpostavka o vrednosti G_{ij} u suštini je zadavanje neke vrste zakrivljenosti prostora. Samo nas mašta može ograničiti u pretpostavkama kakve su unutar ogromne vasione interakcije prostora, vremena i materije. Može se zamisliti postojanje drugačijih metričkih tenzora u višedimenzijskim prostorima gde geodezijske linije u prostorno-vremenskom kontinuumu određuju kretanje drugih fizičkih veličina.

U zaključku ovog kratkog uvoda u teoriju relativnosti daje se citat sa NASA sajta News@hg.nasa.gov iz proleća 1998, Izdanje: 98-51: ”An international team of NASA and university researchers has found the first direct evidence of a phenomenon predicted 80 years ago using Einstein's theory of general relativity $-$ that the Earth is dragging space and time around itself as it rotates.” Ova vest objašnjava da se efekat naziva povlačenje referentnog sistema i nastavlja: ”Frame dragging is like what happens if a bowling ball spins in a thick fluid such as molasses. As the ball spins, it pulls the molasses around itself. Anything stuck in the molasses will also move around the ball. Similarly, as the Earth rotates it pulls space-time in its vicinity around itself. This will shift the orbits of satellites near the Earth.” Rezultati ovog istraživanja prikazani su časopisu *Science*.

5.12 ZADACI

► **1.** Neka su $\kappa = \frac{\delta \vec{T}}{\delta s} \cdot \vec{N}$ i $\tau = \frac{\delta \vec{N}}{\delta s} \cdot \vec{B}$. Pretpostaviti da su prâvi izvodi od $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ linearne kombinacije od $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$, pa tako izvesti Frene-Sereove formule diferencijalne geometrije.

► **2.** Ustanoviti o kojim površima je reč, te opisati rečima i skicom krivolinijske kordinate na svakoj od površi: (a) $\vec{r}(u,v) = u\hat{\mathbf{e}}_1 + v\hat{\mathbf{e}}_2$; (b) $\vec{r}(u,v) = u\cos v\hat{\mathbf{e}}_1 + u\sin v\hat{\mathbf{e}}_2$; (c) $\vec{r}(u,v) = \frac{2uv^2}{u^2+v^2}\hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{2u^2v}{u^2+v^2}\hat{\mathbf{e}}_2$.

► **3.** Ustanoviti o kojim površima je reč, te opisati krivolinijske koordinate na površi. Pomoću nekog računarskog programskog paketa nacrtati grafik površi i ilustrovati koordinatne krive na površi. Naći delić površine dS preko u i v. Sve to za sledeće slučajeve:

(a) $\vec{r}(u,v) = a\sin u\cos v\hat{\mathbf{e}}_1 + b\sin u\sin v\hat{\mathbf{e}}_2 + c\cos u\hat{\mathbf{e}}_3$, gde su a, b, c konstante, a $0 \leq u, v \leq 2\pi$;

(b) $\vec{r}(u,v) = (4 + v\sin\frac{u}{2})\cos u\hat{\mathbf{e}}_1 + (4 + v\sin\frac{u}{2})\sin u\hat{\mathbf{e}}_2 + v\cos\frac{u}{2}\hat{\mathbf{e}}_3$, za $-1 \leq v \leq 1, 0 \leq u \leq 2\pi$;

(c) $\vec{r}(u,v) = au\cos v\hat{\mathbf{e}}_1 + bu\sin v\hat{\mathbf{e}}_2 + cu\hat{\mathbf{e}}_3$;

(d) $\vec{r}(u,v) = u\cos v\hat{\mathbf{e}}_1 + u\sin v\hat{\mathbf{e}}_2 + \alpha v\hat{\mathbf{e}}_3$, gde je α konstanta;

(e) $\vec{r}(u,v) = a\cos v\hat{\mathbf{e}}_1 + b\sin v\hat{\mathbf{e}}_2 + u\hat{\mathbf{e}}_3$, gde su a i b konstante;

(f) $\vec{r}(u,v) = u\cos v\hat{\mathbf{e}}_1 + u\sin v\hat{\mathbf{e}}_2 + u^2\hat{\mathbf{e}}_3$.

► **4.** Razmotriti dvodimenzijski prostor sa metričkim tenzorom $(a_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$.
Pretpostaviti da je površ opisana jednačinama oblika $y^i = y^i(u,v)$ i da je bilo koja tačka na površi data vektorom položaja $\vec{r} = \vec{r}(u,v) = y^i\hat{\mathbf{e}}_i$. Pokazati da su metrike E, F, G funkcije parametera u, v i da su date sa $E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u$, $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$, $G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$ gde su $\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ i $\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$.

► **5.** Pokazati da su Kristofelovi simboli prve vrste za metriku iz zadatka 4:

$$\begin{array}{lll} [11,1] = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_{uu} & [12,1] = [21,1] = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_{uv} & [22,1] = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_{vv} \\ [11,2] = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_{uu} & [12,2] = [21,2] = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_{uv} & [22,2] = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_{vv} \end{array}$$

što se može zapisati kao $[\alpha\beta,\gamma] = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$.

► **6.** Pokazati da se rezultati iz zadatka 5 mogu napisati i u obliku

$$[11,1] = \frac{1}{2}E_u \quad [12,1] = [21,1] = \frac{1}{2}E_v \quad [22,1] = F_v - \frac{1}{2}G_u$$
$$[11,2] = F_u - \frac{1}{2}E_v \quad [12,2] = [21,2] = \frac{1}{2}G_u \quad [22,2] = \frac{1}{2}G_v$$

gde indeksi označavaju parcijalno diferenciranje.
► **7.** Pokazati da su Kristofelovi simboli druge vrste za metriku iz zadatka 4 oblika $\left\{{\gamma \atop \alpha\ \beta}\right\} = a^{\gamma\delta}[\alpha\beta,\delta]$, $\alpha,\beta,\gamma = 1,2$ što dovodi do rezultata

$$\left\{{1 \atop 1\ 1}\right\} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG-F^2)} \qquad \left\{{1 \atop 1\ 2}\right\} = \left\{{1 \atop 2\ 1}\right\} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG-F^2)}$$
$$\left\{{1 \atop 2\ 2}\right\} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG-F^2)} \qquad \left\{{2 \atop 1\ 2}\right\} = \left\{{2 \atop 2\ 1}\right\} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG-F^2)}$$
$$\left\{{2 \atop 1\ 1}\right\} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG-F^2)} \qquad \left\{{2 \atop 2\ 2}\right\} = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG-F^2)}$$

gde indeksi označavaju parcijalno diferenciranje.
► **8.** Izvesti Gausove jednačine smatrajući da su

$$\vec{r}_{uu} = c_1\vec{r}_u + c_2\vec{r}_v + c_3\hat{n}, \quad \vec{r}_{uv} = c_4\vec{r}_u + c_5\vec{r}_v + c_6\hat{n}, \quad \vec{r}_{vv} = c_7\vec{r}_u + c_8\vec{r}_v + c_9\hat{n}$$

gde su $c_1, ..., c_9$ konstante određene uzimanjem skalarnog proizvoda tih vektora sa vektorima $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, i $\hat{n}$. Pokazati da su $c_1 = \left\{{1 \atop 1\ 1}\right\}$, $c_2 = \left\{{2 \atop 1\ 1}\right\}$, $c_3 = e$, $c_4 = \left\{{1 \atop 1\ 2}\right\}$, $c_5 = \left\{{2 \atop 1\ 2}\right\}$, $c_6 = f$, $c_7 = \left\{{1 \atop 2\ 2}\right\}$, $c_8 = \left\{{2 \atop 2\ 2}\right\}$, $c_9 = g$. Pokazati da se Gausove jednačine mogu napisati u obliku $\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \left\{{\gamma \atop \alpha\ \beta}\right\}\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^\gamma} + b_{\alpha\beta}\hat{n}$.
► **9.** Izvesti Weingarten-ove jednačine

$$\begin{array}{lcl} \hat{n}_u = c_1\vec{r}_u + c_2\vec{r}_v & \quad \text{i} \quad & \vec{r}_u = c_1^*\hat{n}_u + c_2^*\hat{n}_v \\ \hat{n}_v = c_3\vec{r}_u + c_4\vec{r}_v & & \vec{r}_v = c_3^*\hat{n}_u + c_4^*\hat{n}_v \end{array}$$

i pokazati da su

$$c_1 = \frac{fF - eG}{EG - F^2} \quad c_3 = \frac{gF - fG}{EG - F^2} \quad c_1^* = \frac{fF - gE}{eg - f^2} \quad c_3^* = \frac{fG - gF}{eg - f^2}$$
$$c_2 = \frac{eF - fE}{EG - F^2} \quad c_4 = \frac{fF - gE}{EG - F^2} \quad c_2^* = \frac{fE - eF}{eg - f^2} \quad c_4^* = \frac{fF - eG}{eg - f^2}$$

Konstante u ovim jednačinam određene su na način sličan onom u zadatku 8. Pokazati da se Weingarten-ove jednačine mogu naisati u obliku $\frac{\partial\hat{n}}{\partial u^\alpha} = -b_\alpha^\beta\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^\beta}$.

► **10.** Pomoću $\hat{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}$, rezultata zadatka 9(a) iz prvog poglavlja, i rezultata iz zadataka 5, verifikovati da važi

$$(\vec{r}_u \times \vec{r}_{uu}) \cdot \hat{n} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1\ 1 \end{matrix} \right\} \sqrt{EG-F^2} \quad (\vec{r}_u \times \vec{r}_{uv}) \cdot \hat{n} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1\ 2 \end{matrix} \right\} \sqrt{EG-F^2}$$
$$(\vec{r}_v \times \vec{r}_{uu}) \cdot \hat{n} = -\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1\ 1 \end{matrix} \right\} \sqrt{EG-F^2} \quad (\vec{r}_u \times \vec{r}_{vv}) \cdot \hat{n} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2\ 2 \end{matrix} \right\} \sqrt{EG-F^2}$$
$$(\vec{r}_v \times \vec{r}_{uv}) \cdot \hat{n} = -\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2\ 1 \end{matrix} \right\} \sqrt{EG-F^2} \quad (\vec{r}_v \times \vec{r}_{vv}) \cdot \hat{n} = -\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2\ 2 \end{matrix} \right\} \sqrt{EG-F^2}$$
$$(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot \hat{n} = \sqrt{EG-F^2}$$

a zatim izvsti formulu za geodezijsku krivinu datu jednačinom (5.48). Uputstvo: $(\hat{n} \times \vec{T}) \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = (\vec{T} \times \frac{d\vec{T}}{ds}) \cdot \hat{n}$ i $a^{\alpha\delta}[\beta\gamma, \delta] = \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta\ \gamma \end{smallmatrix} \right\}$.

► **11.** Verififikovati jednačinu (5.39) koja pokazuje da su pravci normalne krivine ortogonalni, tj. verifikovati da je $G\lambda_1\lambda_2 + F(\lambda_1 + \lambda_2) + E = 0$.

► **12.** Verifikovat da je $\delta^{\beta\gamma}_{\sigma\tau}\delta^{\omega\alpha}_{\lambda\nu} R_{\omega\alpha\beta\gamma} = 4R_{\lambda\nu\sigma\tau}$.

► **13.** Naći prvu osnovnu kvadratnu formu i jediničnu normalu na površ definisanu sa $z = f(x, y)$.

► **14.** Verifikovati da je $A_{i,jk} - A_{i,kj} = A_\sigma R^\sigma_{.ijk}$, gde je

$$R^\sigma_{.ijk} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ i\ k \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ i\ j \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n \\ i\ k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ n\ j \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} n \\ i\ j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ n\ k \end{matrix} \right\},$$

što se može napisati i kao

$$R_{injk} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x^j} & \frac{\partial}{\partial x^k} \\ [nj, k] & [nk, i] \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \left\{ \begin{smallmatrix} s \\ n\ j \end{smallmatrix} \right\} & \left\{ \begin{smallmatrix} s \\ n\ k \end{smallmatrix} \right\} \\ [ij, s] & [ik, s] \end{vmatrix}$$

► **15.** Kako je $R_{ijkl} = g_{i\sigma} R^\sigma_{.jkl}$ pokazati da važi

$$R_{injk} = \frac{\partial}{\partial x^j}[nk, i] - \frac{\partial}{\partial x^k}[nj, i] + [ik, s] \left\{ \begin{matrix} s \\ n\ j \end{matrix} \right\} - [ij, s] \left\{ \begin{matrix} s \\ n\ k \end{matrix} \right\}$$

što se može napisati i kao

$$R^\sigma_{.ijk} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x^j} & \frac{\partial}{\partial x^k} \\ \left\{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ i\ j \end{smallmatrix} \right\} & \left\{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ i\ k \end{smallmatrix} \right\} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ i\ k \end{smallmatrix} \right\} & \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ i\ j \end{smallmatrix} \right\} \\ \left\{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ n\ k \end{smallmatrix} \right\} & \left\{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ n\ j \end{smallmatrix} \right\} \end{vmatrix}.$$

► **16.** Pokazati da je

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} \right)$$
$$+ g^{\alpha\beta}([jk, \beta][il, \alpha] - [jl, \beta][ik, \alpha]).$$

► **17.** Pomoću rezultata iz zadatka 15 pokazati da su

$$\text{(i) } R_{jikl} = -R_{ijkl}, \quad \text{(ii) } R_{ijlk} = -R_{ijkl}, \quad \text{(iii) } R_{klij} = R_{ijkl}$$

Zato je tenzor R_{ijkl} koso-simetričan po indeksima i, j i k, l. Tenzor R_{ijkl} je simetričan i po parovima indeksa (ij) i (kl).

► **18.** Verifikovati sledeća ciklična svojstva Riman-Kristofelovog tenzora

(i)	$R_{nijk} + R_{njki} + R_{nkij} = 0$	prvi indeks fiksiran
(ii)	$R_{injk} + R_{jnki} + R_{knij} = 0$	drugi indeks fiksiran
(iii)	$R_{ijnk} + R_{jkni} + R_{kinj} = 0$	treći indeks fiksiran
(iv)	$R_{ikjn} + R_{kjin} + R_{jikn} = 0$	četvrti indeks fiksiran

► **19.** Pomoću rezultata iz prethodnih zadataka, pokazati da sve komponente Riman-Kristofelovog tenzora oblika R_{iijk}, R_{injj}, R_{iijj}, R_{iiii}, (bez sabiranja po i ili j) moraju biti nula.

► **20.** Naći broj nezavisnih komponenata Riman-Kristofelovog tenzora R_{ijkm}, $i, j, k, m = 1, 2, ..., N$. U $N-$dimenzijskom prostoru treba ispitati N^4 komponena od kojih su mnoge nula, a od onih koje nisu nula mnoge su međusobno povezane simetrijama ili cikličnim svojstvima. Verifikovati sledeće slučajeve.

SLUČAJ I. Ispituju se komponente oblika R_{inin}, $i \neq n$ bez sabiranja po i ili n. Prvi indeks se može izabrati na N načina, a zbog $i \neq n$ drugi indeks se može izabrati na $N-1$ načina. Kada se zapazi da je $R_{inin} = R_{nini}$, (bez sabiranja po i ili n) proizilazi da se polovina ukupnog broja kombinacija ponavlja. Tako ostaje $M_1 = \frac{1}{2}N(N-1)$ komponenata oblika R_{inin}. Veličina M_1 može se smatrati i brojem različitih parova indeksa (i, n).

SLUČAJ II. Ispituju se komponente oblika R_{inji}, $i \neq n \neq j$ gde nema sabiranja po indeksu i. Iz prethodnog slučaja se zna da se prvi par indeksa može izabrati na M_1 načina. Zato se treći indeks može izabrati na $N-2$ načina i posledično postoji $M_2 = \frac{1}{2}N(N-1)(N-2)$ različitih komponenti oblika R_{inji} za $i \neq n \neq j$.

SLUČAJ III. Ispituju se komponente oblika R_{injk} za $i \neq n \neq j \neq k$. Iz slučaja I sledi da se prvi par indeksa (i, n) može izabrati na M_1 načina. Uzimajući u obzir simetrije, može se pokazati da se drugi par indeksa može izabrati na $\frac{1}{2}(N-2)(N-3)$ načina. To implicira sa postoji $\frac{1}{4}N(N-1)(N-2)(N-3)$ načina da se izaberu indeksi i, n, j i k za $i \neq n \neq j \neq k$. Zbog simetrije parovi (i, n) i (j, k) se mogu međusobno zameniti pa je samo polovina tih kombinacija različita. Tako ostaje $\frac{1}{8}N(N-1)(N-2)(N-3)$ različitih parova indeksa. Dalje se iz cikličnih relacija nalazi da su samo dve trećine tih komponenata različite. Tako se nalazi da postoji $M_3 = \frac{1}{12}N(N-1)(N-2)(N-3)$ različitih komponenata oblika R_{injk} za $i \neq n \neq j \neq k$.

Sabiranjem komponenata iz svih od gornjih slučajeva nalazi se da postoji $M_4 = M_1 + M_2 + M_3 = \frac{1}{12}N^2(N^2-1)$ različitih i nezavisnih komponenata.

Verifikovati podatke u sledećoj tabeli:

Dimenzija prostora N	1	2	3	4	5
Broj komponenata N^4	1	16	81	256	625
$M_4 =$ nezavisne komponente tenzora R_{ijkm}	0	1	6	20	50

Napomena 1. Jednodimenzijski prostor ne može biti zakrivljen i svi jednodimenzijski prostori su euklidski. (tj. ako je element kvadrata dužine luka dat sa $ds^2 = f(x)(dx)^2$, može se napraviti transformacija koordinata $\sqrt{f(x)}dx = du$ i svesti element kvadrat dužine luka na oblik $ds^2 = du^2$.)
Napomena 2. U dvodimenzijskom prostoru indeksi mogu primiti samo vrednosti 1 i 2 i moguće je 16 komponenta tenzora. Može se pokazati da su jedine komponeta različite od nule: $R_{1212} = -R_{1221} = -R_{2112} = R_{2121}$. Među njima postoji samo jedna nezavisna komponenta. Prema konvenciji bira se komponenta R_{1212} kao jedina nezavisna komponenta i sve druge različite od nule komponente se izražavaju preko nje.
Naći različite od nule nezavisne komponente tenzora R_{ijkl} za $i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$ i pokazati da se

$$\begin{array}{cccc} R_{1212} & R_{3434} & R_{2142} & R_{4124} \\ R_{1313} & R_{1231} & R_{2342} & R_{4314} \\ R_{2323} & R_{1421} & R_{3213} & R_{4234} \\ R_{1414} & R_{1341} & R_{3243} & R_{1324} \\ R_{2424} & R_{2132} & R_{3143} & R_{1432} \end{array}$$

mogu izabrati kao 20 nezavisnih komponenata.
▶ **21.** (a) Pokazati za $N = 2$ da je R_{1212} jedina nezavisna komponenta različita od nule i da je $R_{1212} = R_{2121} = -R_{1221} = -R_{2112}$.
(b) Pokazati da na površi sfere radijusa r_0 važi $R_{1212} = r_0^2 \sin^2 \theta$.
▶ **22.** Pokazati za $N = 2$ da je $\bar{R}_{1212} = R_{1212}J^2 = R_{1212} \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right|^2$.
▶ **23.** Neka je $R_{ij} = R^{s}_{.ijs}$ Ričiev tenzor i $G^i_j = R^i_j - \frac{1}{2}\delta^i_j R$ Ajnštajnov tenzor, gde su $R^i_j = g^{ik}R_{kj}$ i $R = R^i_i$. Pokazati da važi:

(a) $\quad R_{jk} = g^{ab}R_{jabk}$

(b) $\quad R_{ij} = \frac{\partial^2 log\sqrt{g}}{\partial x^i \partial x^j} - \left\{ {b \atop i\ j} \right\} \frac{\partial log\sqrt{g}}{\partial x^b} - \frac{\partial}{\partial x^a} \left\{ {a \atop i\ j} \right\} + \left\{ {b \atop i\ a} \right\} \left\{ {a \atop j\ b} \right\}$

(c) $\quad R_{iijk} = 0$

▶ **24.** Pomoću rezultata iz prethodnog zadatka pokazati da za $N = 2$ važi

$$\frac{R_{11}}{g_{11}} = \frac{R_{22}}{g_{22}} = \frac{R_{12}}{g_{12}} = -\frac{R_{1212}}{g}$$

gde je g determinanta od g_{ij}.
▶ **25.** Razmotriti slučaj $N = 2$ gde su $g_{12} = g_{21} = 0$ i pokazati da važi

(a) $\quad R_{12} = R_{21} = 0$ $\qquad$ (c) $\quad R = \frac{2R_{1221}}{g_{11}g_{22}}$

(b) $\quad R_{11}g_{22} = R_{22}g_{11} = R_{1221}$ $\qquad$ (d) $\quad R_{ij} = \frac{1}{2}Rg_{ij}$, gde je $R = g^{ij}R_{ij}$

Skalarna invarijanta R naziva se Ajnštajnova krivina površi, a tenzor $G^i_j = R^i_j - \frac{1}{2}\delta^i_j R$ naziva se Ajnštajnov tenzor.

► **26.** Za $N = 3$ pokazati da su R_{1212}, R_{1313}, R_{2323}, R_{1213}, R_{2123}, R_{3132} nezavisne komponente Riman-Kristofelovog tenzora.

► **27.** Za $N = 2$ i $a_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ pokazati da je

$$K = \frac{R_{1212}}{a} = \frac{-1}{2\sqrt{a}} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial a_{22}}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial a_{11}}{\partial u^2} \right) \right].$$

► **28.** Za $N = 2$ i $a_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ pokazati da je

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{2\sqrt{a}} \Bigg\{ \frac{\partial}{\partial u^1} \left[\left(\frac{a_{12}}{a_{11}\sqrt{a}} \frac{\partial a_{11}}{\partial u^2} \right) - \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial a_{22}}{\partial u^1} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial u^2} \left[\frac{2}{\sqrt{a}} \frac{\partial a_{12}}{\partial u^1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial a_{11}}{\partial u^2} - \frac{a_{12}}{a_{11}\sqrt{a}} \frac{\partial a_{11}}{\partial u^1} \right] \Bigg\}. \end{aligned}$$

Proveriti rezultat stavljanjem $a_{12} = a_{21} = 0$ i upoređivanjem sa rezultata sa onim datim u zadatku 27.

► **29.** Ispisati Frene-Seret-ove formule (5.111) i (5.112) za površinske krive preko Kristofelovih simbola druge vrste.

► **30.** (a) Pomoću činjenice da za $N = 2$ važi $R_{1212} = R_{2121} = -R_{2112} = -R_{1221}$ i dvodimenzijskih alternirajućih tenzora $e_{\alpha\beta}$ i $e^{\alpha\beta}$ pokazati da se jednačina (5.109) može napisati kao $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta}$ gde su $\varepsilon_{\alpha\beta} = \sqrt{a}e_{\alpha\beta}$ i $\varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{a}}e^{\alpha\beta}$ odgovarajući epsilon tenzori.
(b) Pokazati da se iz rezultata pod (a) dobija $\frac{1}{4}R_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma\delta} = K$.
Uputstvo: videti jednačine (5.82), (5.93) i (5.94).

► **31.** Verifikovati rezultate date jednačinom (5.100).

► **32.** Pokazati da je $a^{\alpha\beta}c_{\alpha\beta} = 4H^2 - 2K$.

► **33.** Naći jednačine za glavne krivine površi $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$.

► **34.** (*Geodezijske linije na sferi*) Neka (θ, ϕ) označavaju površinske koordinate na sferi poluprečnika ρ definisane parametarskim jednačinama

$$x = \rho \sin\theta \cos\phi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\phi, \quad z = \rho\cos\theta. \tag{1}$$

Posmatrati ravan koja prolazi kroz ishodište sa normalom čiji su koeficijenti pravca (n_1, n_2, n_3). Jednačina te ravni je $n_1x + n_2y + n_3z = 0$ i ona seče sferu po velikom krugu koji je opisan relacijom

$$n_1 \sin\theta\cos\phi + n_2 \sin\theta\sin\phi + n_3\cos\theta = 0. \tag{2}$$

Ovo je implicitna relacija između površinskih koordinata θ, ϕ i opisuje veliki krug koji leži na sferi. Ova jednačina se može pisati u obliku

$$n_1\cos\phi + n_2\sin\phi = -\frac{n_3}{\tan\theta} \tag{3}$$

i u specijalnom slučaju kada su $n_1 = \cos\beta$, $n_2 = \sin\beta$, $n_3 = -\tan\alpha$, može se izraziti u obliku

$$\cos(\phi - \beta) = \frac{\tan\alpha}{\tan\theta} \quad \text{ili} \quad \phi - \beta = \cos^{-1}\left(\frac{\tan\alpha}{\tan\theta}\right). \tag{4}$$

Ova jednačina daje eksplicitnu vezu između površinskih koordinata na velikom krugu na sferi. Relacija za element kvadrata dužine luka zadovoljena površinskim koordinatama skupa sa jednačinom dobijenom diferenciranjem jednačine (4) po dužini luka s daju relacije

$$\sin^2\theta\frac{d\phi}{ds} = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1 - \frac{\tan^2\alpha}{\tan^2\theta}}}\frac{d\theta}{ds} \tag{5}$$

$$ds^2 = \rho^2 d\theta^2 + \rho^2\sin^2\theta d\phi^2 \tag{6}$$

Jednačine (1)-(6) su nužne za razmatranje sledećeg zadatka.
(a) Pokazati da su diferencijalne jednačine koje definišu geodezijske linije na površini sfere [jednačine (5.51)]

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0 \tag{7}$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + 2\cot\theta\frac{d\theta}{ds}\frac{d\phi}{ds} = 0 \tag{8}$$

(b) Pomnožiti jednačinu (8) sa $\sin^2\theta$ i integraliti da se dobije

$$\sin^2\theta\frac{d\phi}{ds} = c_1 \tag{9}$$

gde je c_1 integraciona konstanta.
(c) Pomnožiti jednačinu (7) sa $\frac{d\theta}{ds}$ i iskoristiti rezultat (9) i pokazati da integracija dovodi do

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = -\frac{c_1^2}{\sin^2\theta} + c_2^2 \tag{10}$$

gde je c_2^2 integraciona konstanta.
(d) Pomoću jednačina (5) i (6) pokazati da su $c_2 = 1/\rho$ i $c_1 = \frac{\sin\alpha}{\rho}$.
(e) Pokazati da jednačine (9) i (10) impliciraju da je

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{\tan\alpha}{\tan^2\theta}\frac{\sec^2\theta}{\sqrt{1 - \frac{\tan^2\alpha}{\tan^2\theta}}},$$

a da se smenom $u = \frac{\tan\alpha}{\tan\theta}$ ova jednačina može integraliti da se dobije jednačina (4). Sređivanjem jednačine (4) i izražavanjem rezultata preko x, y, z dobija se jednačina

(3). To dovodi do ravni koja seče sferu po velikom krugu. Posledično, geodezijske linije na sferi su veliki krugovi.
► **35.** Naći diferencijalne jednačine geodezijskih linija na cilindarskoj površi.
► **36.** Naći diferencijalne jednačine geodezijskih linija na torusnoj površini. (Vidi zadatak 13 u trećem poglavlju.)
► **37.** Naći diferencijalne jednačine geodezijskih linija na obrtnoj površi $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $z = f(r)$. Zapaziti da kriva $z = f(x)$ predstavlja površi. Krive $r =$ const. su paralele, a krive $\phi =$ const. su meridijani površi, a $ds^2 = (1 + f'^2)dr^2 + r^2 d\phi^2$.
► **38.** Naći ravan jedinične normale i tangente u proizvoljnoj tački pravog kružnog konusa $x = u\sin\alpha\cos\phi$, $y = u\sin\alpha\sin\phi$, $z = u\cos\alpha$. Konus je obrtna površ sa $r = u\sin\alpha$ i $f(r) = r\cot\alpha$ uz konstantno α.
► **39.** Neka s označava dužinu luka i neka je vektor položaja $\vec{r}(s)$ analitičan oko tačke s_0. Pokazati da Tejlorov red $\vec{r}(s) = \vec{r}(s_0) + h\vec{r}'(s_0) + \frac{h^2}{2!}\vec{r}''(s_0) + \frac{h^3}{3!}\vec{r}'''(s_0) +$ oko tačke s_0, sa $h = s - s_0$ glasi $\vec{r}(s) = \vec{r}(s_0) + h\vec{T} + \frac{1}{2}\kappa h^2\vec{N} + \frac{1}{6}h^3(-\kappa^2\vec{T} + \kappa'\vec{N} + \kappa\tau\vec{B}) +$ što se dobija diferenciranjem Freneovih formula.
► **40.** (a) Pokazati da kružna zavojnica definisana sa $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ gde su a i b konstante, ima svojstvo da svaka tangenta na krivu čini konstantan ugao sa pravom koja definiše z-osu. (tj. $\vec{T}\cdot\hat{\mathbf{e}}_3 = \cos\alpha =$ const.)
(b) Pokazati da je $\vec{N}\cdot\hat{\mathbf{e}}_3 = 0$ i posledično $\hat{\mathbf{e}}_3$ je paralelan rektifikacionoj ravni, što implicira da je $\hat{\mathbf{e}}_3 = \vec{T}\cos\alpha + \vec{B}\sin\alpha$.
(c) Diferencirati rezultat pod (b) i pokazati da je $\kappa/\tau = \tan\alpha$ konstanta.
► **41.** Za prostornu krivu $x_i = x_i(s)$ u Dekartovim koordinatama:
(a) pokazati da je $\kappa = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \sqrt{x_i' x_i'}$
(b) pokazati da je $\tau = \frac{1}{\kappa^2} e_{ijk} x_i' x_j'' x_k'''$. Uputstvo: posmatrati $\vec{r}' \cdot \vec{r}'' \times \vec{r}'''$.
► **42.** (a) Naći kosinuse pravca normale na površ $z = f(x, y)$.
(b) Naći kosinuse pravca normale na površ $F(x, y, z) = 0$.
(c) Naći kosinuse pravca normale na površ $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$.
► **43.** Pokazati da je za glatku površ $z = f(x, y)$ Gausova krivina u tački na površi data sa

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2 + 1)^2}.$$

► **44.** Pokazati da je za glatku površ $z = f(x, y)$ srednja krivina u tački na površi data sa

$$H = \frac{(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}}{2(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}.$$

► **45.** Izraziti Frene-Sereove formule (5.13 preko Kristofelovih simbola druge vrste.
► **46.** Verifikovati relaciju (5.105).
► **47.** U V_n usvojiti da je $R_{ij} = \rho g_{ij}$ pa pokazati da je $\rho = \frac{R}{n}$ gde je $R = g^{ij}R_{ij}$. Ovaj rezultat je poznat pod nazivom Ajnštajnova gravitaciona jednačina u tačkama

gde je prisutna materija. To je analogon Poasonove jednačine $\nabla^2 V = \rho$ iz njutnovske teorije gravitacije.

▶ **48.** U V_n usvojiti da je $R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$ pa pokazati da je $R = Kn(1-n)$. Uputstvo: vidi zadatak 23.

▶ **49.** Neka je $g_{ij} = 0$ za $i \neq j$ pa verifikovati sledeće:

(a) $R_{hijk} = 0$ za $h \neq i \neq j \neq k$

(b) $R_{hiik} = \sqrt{g_{ii}} \left(\frac{\partial^2 \sqrt{g_{ii}}}{\partial x^h \partial x^k} - \frac{\partial \sqrt{g_{ii}}}{\partial x^h} \frac{\partial \ln \sqrt{g_{hh}}}{\partial x^k} - \frac{\partial \sqrt{g_{ii}}}{\partial x^k} \frac{\partial \ln \sqrt{g_{kk}}}{\partial x^h} \right)$ za različite h, i, k.

(c) za $h \neq i$:

$$R_{hiih} = \sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{hh}} \left[\frac{\partial}{\partial x^h} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{hh}}} \frac{\partial \sqrt{g_{ii}}}{\partial x^h} \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial \sqrt{g_{hh}}}{\partial x^i} \right) \right.$$
$$\left. + \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq h \;\; m\neq i}}^{n} \frac{\partial \sqrt{g_{ii}}}{\partial x^m} \frac{\partial \sqrt{g_{hh}}}{\partial x^m} \right].$$

▶ **50.** Razmotriti obrtnu površ kod koje $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ i $z = f(r)$ zadata funkcija od r.

(a) Pokazati da je ovom V_2 prostoru $ds^2 = [1 + (f')^2]dr^2 + r^2 d\theta^2$ gde je $' = \frac{d}{ds}$.

(b) Pokazati da su geodezijske jednačine u ovom V_2:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{f' f''}{1 + (f')^2} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - \frac{r}{1 + (f')^2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = 0$$
$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{ds} \frac{dr}{ds} = 0$$

(c) Rešiti drugu jednačinu pod (b) i dobiti $\frac{d\theta}{ds} = \frac{a}{r^2}$. Zameniti ovaj rezultat za ds u izraz pod (a) i pokazati da je $d\theta = \pm \frac{a\sqrt{1+(f')^2}}{r\sqrt{r^2 - a^2}} dr$ što se u principu može integraliti.