Један поглед на инуиционизам

Недељко Стефановић

24. Март 2006.

Сажетак

У овом тексту неће бити изложен нити један оригиналан математички резултат, већ само нов, радикално другачији поглед на интуиционистичку логику.

Наводимо један од могућих аксиоматских система за класичну исказну логику са логичким везницима $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$. Аксиоме су све формуле облика

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$,
2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C))$,
3. $(A \wedge B) \rightarrow A$,
4. $(A \wedge B) \rightarrow B$,
5. $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$,
6. $A \rightarrow (A \vee B)$,
7. $B \rightarrow (A \vee B)$,
8. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$,
9. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$,
10. $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$,
11. $A \vee \neg A$,

где су A, B, C произвољне формуле. Једино правило извођења је

$$(\text{МП})\ \ \frac{A \ \ A \rightarrow B}{B}.$$

Ту су A, B такође произвољне формуле. Што се тиче предикатског рачуна без једнакости са истим логичким везницима и са квантификаторима $\forall$ и $\exists$, задржавамо све наведене схеме аксиома, с тим што су сада A, B, C произвољне предикатске формуле, и слично за наведено правило извођења, али додајемо још две схеме аксиома и два правила извођења. Додатне аксиоме су

12. $(\forall x)\, A(x) \rightarrow A(t)$,
13. $A(t) \rightarrow (\exists x)\, A(x)$.

Овде је x произвољна променљива, $A(x)$ преоизвољна формула, а $A(t)$ формула која се добија заменом свих слободних јављања променљиве x у формули $A(x)$ термом t. Наведене формуле су аксиоме под ограничењем да је наведена замена регуларна. Правила извођења су

$$(\text{Ген}_1)\ \frac{A \rightarrow B(x)}{A \rightarrow (\forall x)\, B(x)}\,, \qquad (\text{Ген}_2)\ \frac{A(x) \rightarrow B}{(\exists x)\, A \rightarrow B}\,.$$

Ту је x произвољна променљива, A, B произвољне формуле у којима променљива x нема слободних јављања, а $A(x), B(x)$ произвољне формуле. У случају предикатске логике са једнакошћу, задржавамо све наведене схеме аксиома и правила извођења, с тим да у њима сада фигуришу формуле у којима се може појављивати и једнакост, и додајемо следеће аксиоме:

14. $x = x$,
15. $x = y \rightarrow (A(x) \rightarrow A(y))$.

Ту су x, y произвољне променљиве, $A(x)$ произвољна формула, а $A(y)$ формула која се добија заменом неких (не обавезно свих) слободних јављања променљиве x у формули $A(x)$ променљивом y.

У литератури се обично наводи да се интуиционистичка логика добија избацивањем аксиоме 11. У таквом систему, формуле следећих облика

1. $A \vee \neg A$,
2. $\neg A \vee \neg\neg A$,
3. $\neg\neg A \rightarrow A$,
4. $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$,
5. $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$,
6. $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$,
7. $\neg (\forall x)\, A \rightarrow (\exists x) \neg A$,

у општем случају нису теореме, иако су теореме класичне логике. Због тога се тврди да у инуиционистичкој логици не важе многи од закона класичне логике. Ми ћемо ствари посматрати другачије.

Осим што ћемо избацити поменуту аксиому, знак $\rightarrow$ ћемо преозначити знаком $\supset$, знак $\vee$ ћемо преозначити знаком $|$, а знак $\exists$ преозначити са K. Тако добијамо следећи аксиоматски систем за исказну логику. Аксиоме су све формуле облика

1. $A \supset (B \supset A)$,
2. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset C) \supset (B \supset C))$,

3. $(A \wedge B) \supset A$,

4. $(A \wedge B) \supset B$,

5. $A \supset (B \supset (A \wedge B))$,

6. $A \supset (A|B)$,

7. $B \supset (A|B)$,

8. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A|B) \supset C))$,

9. $\neg A \supset (A \supset B)$,

10. $(A \supset \neg B) \supset (B \supset \neg A)$.

где су A, B, C произвољне формуле. Једино правило извођења је

$$(\text{МП})\ \frac{A \quad A \supset B}{B}.$$

Ту су A, B такође произвољне формуле. Што се тиче предикатског рачуна без једнакости са истим логичким везницима и са квантификаторима $\forall$ и K, задржавамо све наведене схеме аксиома, с тим што су сада A, B, C произвољне предикатске формуле, и слично за наведено правило извођења, али додајемо још две схеме аксиома и два правила извођења. Додатне аксиоме су

11. $(\forall x)\, A(x) \supset A(t)$,

12. $A(t) \supset (K\, x)\, A(x)$.

Овде је x произвољна променљива, $A(x)$ преоизвољна формула, а $A(t)$ формула која се добија заменом свих слободних јављања променљиве x у формули $A(x)$ термом t. Наведене формуле су аксиоме под ограничењем да је наведена замена регуларна. Правила извођења су

$$(\text{Ген}_1)\ \frac{A \supset B(x)}{A \supset (\forall x)\, B(x)}\,, \qquad (\text{Ген}_2)\ \frac{A(x) \supset B}{(K\, x)\, A \supset B}\,.$$

Ту је x произвољна променљива, A, B произвољне формуле у којима променљива x нема слободних јављања, а $A(x), B(x)$ произвољне формуле. У случају предикатске логике са једнакошћу, задржавамо све наведене схеме аксиома и правила извођења, с тим да у њима сада фигуришу формуле у којима се може појављивати и једнакост, и додајемо следеће аксиоме:

13. $x = x$,

14. $x = y \supset (A(x) \supset A(y))$.

Ту су x, y произвољне променљиве, $A(x)$ произвољна формула, а $A(y)$ формула која се добија заменом неких (не обавезно свих) слободних јављања променљиве x у формули $A(x)$ променљивом y.

Такође, уводемо следеће дефиниције:

$$
\begin{aligned}
(A \to B) &:= \neg (A \wedge \neg B),\\
(A \vee B) &:= \neg (\neg A \wedge \neg B),\\
(\exists x)\, A &:= \neg (\forall x) \neg A.
\end{aligned}
$$

У овом систему заиста неће бити доказиве све формуле облика

1. $A | \neg A$,
2. $\neg A | \neg\neg A$,
3. $\neg\neg A \supset A$,
4. $((A \supset B) \supset A) \supset A$,
5. $(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$,
6. $(\neg A \supset B) \supset (\neg B \supset A)$,
7. $\neg (\forall x)\, A \supset (K\, x) \neg A$,

али ће бити доказиве све формуле облика

1. $A \vee \neg A$,
2. $\neg A \vee \neg\neg A$,
3. $\neg\neg A \to A$,
4. $((A \to B) \to A) \to A$,
5. $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$,
6. $(\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$,
7. $\neg (\forall x)\, A \to (\exists x) \neg A$,

као и све остале теореме класичне логике (са логичким везницима $\wedge, \vee, \neg, \to$, квантификаторима $\forall, \exists$, са једнакошћу и заградама као јединим логичким симболима). Штавише, све инстанце таквих формула, које могу обухватати и интуициоистичке логичке симболе $|, \supseteq, K$ ће такође бити теореме.

Преводи претходних формула ће заправо бити формуле

1. $\neg (\neg A \wedge \neg\neg A)$,
2. $\neg (\neg\neg A \wedge \neg\neg\neg A)$,
3. $\neg (\neg\neg A \wedge \neg A)$,
4. $\neg (\neg (\neg (A \wedge \neg B) \wedge \neg A) \wedge \neg A)$,
5. $\neg (\neg (\neg A \wedge \neg\neg B) \wedge \neg\neg (B \wedge \neg A))$,

6. $\neg(\neg(\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg\neg(\neg B \wedge \neg A))$,
7. $\neg(\neg(\forall x) A \wedge \neg\neg(\forall x)\neg\neg A)$,

које јесу теореме интуиционистичке логике.

Са друге стране, оваква логика има логичке везнике и логичке операторе који нису дефинабилни у класичној логици. То значи да је интуиционистичка логика једно **право проширење** класичне логике.

У таквом проширењу можемо формулисати и решавати задатке типа "Нађи објекат за који важи...", односно "Примером показати да постоји објекат такав да је...", а да у потпуности **задржимо** целокупну класичну логику.